LES TONALITÉS MUSICALES VUES PAR UN MATHÉMATICIEN

Michel Broué

3 Juillet 2001

"Pourquoi la musique des XIIIèmes, XIVèmes, XVèmes et XVIèmes siècles, dans les longs cheminements qu'elle a suivis, en partant des monodies du plain-chant, en superposant et enchevêtrant des lignes mélodiques différentes, en en compliquant de plus en plus les combinaisons, pourquoi cette musique a-t-elle fini par se fixer sur cette échelle plutôt que sur celles dont elle était sortie ? Eh bien, c'est parce que, peu à peu, au cours d'une très lente évolution, l'oreille a fini par reconnaître dans certaines agrégations de sons, d'abord fortuites puis, une fois l'attention arrêtée sur elles, de plus en plus recherchées en elles-mêmes, une plénitude de sonorité, une sensation d'équilibre, un certain hédonisme."

Henry Barraud

"Le plus difficile pour un mathématicien lorsqu'il s'agit de mathématiques appliquées, est souvent de comprendre de quoi il s'agit et de traduire dans son propre langage les données de la question."

André Weil

Résumé . L'objet de cet article est, en particulier, de montrer que le choix des 7 notes de la gamme classique (do–ré–mi–fa–sol–la–si) parmi les 12 notes du système tempéré (do–do#–ré–ré#–mi–fa–fa#–sol–sol#–la–la#–si) est *le seul* choix possible qui satisfasse à des critères naturels liés à la transposition. L'approche utilisée, qui n'emploie que des considérations mathématiques élémentaires, fournit également des justifications purement mathématiques ou combinatoires à l'usage de la gamme mineure augmentée (la–si–do–ré–mi–fa–sol#) ou d'autres gammes utilisées dans l'histoire (telle la gamme pentatonique javanaise), ou encore à l'importance d'autres gammes et accords classiques de l'harmonie musicale.

Sommaire

Introduction
1. Quelques données physiques et psycho–physiologiques
Sons purs
La perception humaine et les sons
A. La transposition
B. L'octave et la définition d'une note
C. Un logarithme naturel
2. La convention du dodécaphonique et le cadre tonal occidental
Les douze notes
Le cercle dodécaphonique et la transposition
Le cadre tonal occidental
Convention de base : cadre tonal occidental et transposition
A. Choix du type tonal
B. Passer d'un cadre tonal à un autre
C. Un autre type tonal
3. Tous les cadres tonals, leurs types et leurs transposés
Nombres de transposés des cadres tonals

David Bessis, Serge Bouc et Isabelle Broué ont bien voulu relire cet article, qui a bénéficié de leurs critiques pertinentes.

Les cadres tonals de type $\mathcal{L}_d$ (pour $d = 1, 2, 3, 4, 6, 12$)
4. Le type tonal occidental et la transposition
Engendrer les transpositions
Types tonals adaptés à la transposition
Le théorème d'existence et d'unicité
Le "Diabolus in Musica"
Sur le type mineur augmenté
Conclusion

Introduction

Bien que la variété des fréquences, donc des sons, soit *a priori* infinie, les instruments à clavier de la musique moderne n'utilisent que DOUZE notes différentes : avec l'image du clavier du piano, nous les désignerons par

DO, DO DIÈSE, RÉ, RÉ DIÈSE, MI, FA, FA DIÈSE, SOL, SOL DIÈSE, LA, LA DIÈSE, SI .

Ces douze notes possèdent la propriété suivante : l'intervalle entre deux notes consécutives (appelé un "demi–ton") est toujours le même.

Or on sait bien qu'il y a un sous–ensemble de ces douze notes qui semble jouer un rôle privilégié : l'ensemble des sept notes blanches du piano, qui, décrit dans l'ordre croissant, donne la gamme bien connue DO, RÉ, MI, FA, SOL, LA, SI .

Ce sous–ensemble est construit, par exemple à partir de DO, de façon qui peut sembler étrange : pour obtenir la note suivante, on ajoute 2 demi–tons ; puis encore 2 demi–tons, puis 1 demi–ton, puis 2, puis 2, puis encore 2 — un demi–ton de plus et on retrouve un DO.

Qu'a donc cet ensemble de si particulier, qu'il semble être le "cadre naturel" de la musique occidentale ? L'un des buts de cet article est de proposer une "explication" mathématique, en démontrant que cet ensemble est essentiellement *le seul* sous–ensemble des douze notes qui possède des propriétés essentielles à la transposition.

Nous introduirons d'abord très sommairement quelques notions de base (intervalle, notion de note, conventions du dodécaphonisme, notion de transposition, etc.) et poserons nos conventions et nos notations. Puis nous examinerons les propriétés des divers choix possibles de sous–ensembles des douze notes (sous–ensembles que nous baptisons ici "cadres tonals"). Chemin faisant, nous retrouverons la classification de Messiaen des "modes à transposition limitée". Nous mettrons en évidence des propriétés particulières, voire caractéristiques, de certains des cadres tonals (celui "des notes blanches", mais aussi celui de la gamme mineure augmentée, par exemple) qui sont apparus au cours de l'histoire de la musique. Nous mettrons brièvement en évidence les explications mathématiques de certaines règles ou contraintes harmoniques.

Le musicien verra dans ce travail une approche extrêmement réductrice et outrageusement simplificatrice de la musique. Il aura raison. L'objectif en est aussi modeste en ce qui concerne ses "applications" à la musique que ses méthodes sont rudimentaires du point de vue mathématique. Mais ses résultats, pour modestes qu'ils soient, nous ont paru amusants.

1. Quelques données physiques et psycho–physiologiques

Sons purs

Les sons parviennent à notre conscience par une vibration du tympan – cette vibration du tympan est produite par la vibration de l'air ambiant, laquelle est produite par la vibration source du son (membrane ou corde vibrante, par exemple).

En première approximation, un *son pur* correspond à une vibration d'une fréquence (*i.e.*, le nombre de battements par seconde) précise. C'est ainsi que ce qu'on appelle aujourd'hui le *LA* du diapason correspond à une vibration de 440 fois par seconde (on dit “440 Hertz” et on écrit “440 Hz”).

Cette fréquence n’a pas été celle–ci de toute éternité. Pour Haendel, aux environs de 1750, la fréquence du LA était de 422,5 Hz. Le gouvernement français, en 1829, l’avait fixée à 435 Hz.

La perception humaine et les sons

Les faits suivants sont une donnée universelle de l’espèce humaine. Nous les prenons comme axiomes, sans aborder la question de l’origine génétique ou culturelle des ces faits.

A. La transposition.

Appelons provisoirement *mélodie rudimentaire* une succession de fréquences $(f_1, f_2, f_3, \dots)$. Ainsi, la succession de fréquences (en nombres de battements par seconde, ou Hertz) :

$$M := (440, 440, 440, 493, 552, 493, 440, 552, 493, 493, 440)$$

sera perçue comme le début de *Au clair de la lune* – c’est à peu près la suite de sons que produirait un piano sur lequel, à partir du “la du milieu”, on taperait les touches

(la, la, la, si, do dièse, si, la, do dièse, si, si, la)

(*Au clair de la lune* en *la majeur*).

Considérons maintenant la nouvelle mélodie rudimentaire définie par la suite de fréquences

$$M' := (622, 622, 622, 697, 780, 697, 622, 780, 697, 697, 622)\,.$$

À peu près n’importe quel être humain y reconnaîtra “la même mélodie”, “jouée à des hauteurs différentes”, celle que produirait un piano sur lequel, au–dessus du “la du milieu”, on taperait les touches

(ré dièse, ré dièse, ré dièse, fa, sol, fa, ré dièse, sol, fa, fa, ré dièse)

(*Au clair de la lune* en *ré dièse majeur*).

Qu’y a–t–il de commun entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$? Il y a que les fréquences constituant $\mathcal{M}'$ s’obtiennent en multipliant celles constituant $\mathcal{M}$ par un facteur constant, puisque, à quelques décimales près, on a

$$1,414 \times (440, 440, 440, 493, 552, 493, 440, 552, 493, 493, 440) \simeq (622, 622, 622, 697, 780, 697, 622, 780, 697, 697, 622)\,.$$

[En fait, 1,414 est une approximation de $\sqrt{2}$. Nous reviendrons sur le rôle particulier joué par $\sqrt{2}$.]

De manière générale, si l’on multiplie toutes les fréquences de $\mathcal{M}$ par un même nombre réel plus grand que 1, on reconnaît dans la nouvelle mélodie “*Au clair de la lune* joué plus haut”, et si l’on multiplie toutes les fréquences de $\mathcal{M}$ par un même nombre réel positif plus petit que 1, on reconnaît dans la nouvelle mélodie “*Au clair de la lune* joué plus bas”. Nous prenons ce fait comme axiome.

Appelons *transposition* toute opération consistant à multiplier tous les éléments d’un ensemble de fréquences par un facteur constant positif.

Axiome de la transposition. *Si on multiplie toutes les fréquences d’une mélodie rudimentaire par un même facteur, un être humain y reconnaît “la même mélodie”, “jouée à des hauteurs différentes”.*

B. L'octave et la définition d'une note.

Axiome de l'octave. *L'être humain perçoit un son de fréquence donnée et le son de fréquence double comme "la même note" (l'une étant simplement déclarée "plus haute" que l'autre).*

Doubler la fréquence d'un son s'appelle "remplacer le son par l'octave de ce son".

Il résulte de l'axiome de l'octave que si deux fréquences ont un rapport égal à une puissance (positive ou négative) de 2, elles sont perçues comme produisant "la même note".

C'est ainsi qu'un son de fréquence 880 est perçu comme un LA aigu ("une octave au–dessus" du LA du diapason), tandis qu'un son de fréquence 110 est perçu comme un LA "grave" ("deux octaves en–dessous" du LA du diapason).

Le langage des mathématiques se prête immédiatement à la définition de la notion de *note*, conséquence de l'axiome de l'octave.

Définition. La note associée à une fréquence f est l'ensemble de fréquences de la forme

$$N = \{\dots, 2^{-2}f, 2^{-1}f, f, 2f, 2^2f, 2^3f, \dots ...\}\,.$$

Ainsi, on appelle LA l'ensemble des fréquences $\{\dots, 55, 110, 220, 440, 880, 1760, \dots\}$.

On voit que N est associée à n'importe laquelle des fréquences qui la constituent : si f' est une autre fréquence de N, on a $N = \{\dots, 2^{-2}f', 2^{-1}f', f', 2f', 2^2f', 2^3f', \dots ...\}$.

C. Un logarithme naturel.

L'axiome suivant n'est pas sans rapport avec l'axiome de la transposition.

Axiome du logarithme. *Les rapports entre fréquences sont perçus comme des intervalles entre les sons correspondants.*

C'est ainsi qu'un être humain (éduqué à la musique) entend, devant un piano, à peu près "le même intervalle" entre le LA et le DO DIÈSE qui le suit qu'entre ce DO DIÈSE et le FA qui le suit, intervalle baptisé *tierce majeure*. Il entend un intervalle "double" entre le LA et le FA.

Or, si le LA a une fréquence de 440 Hz, le DO DIÈSE a une fréquence d'environ 554 Hz, et le FA une fréquence d'environ 698. Ainsi les *différences*

$$\text{fréquence(DO DIÈSE)} - \text{fréquence(LA)} = 114\,Hz$$

et

$$\text{fréquence(FA)} - \text{fréquence(DO DIÈSE)} = 144\,Hz$$

ne sont pas égales. Par contre, leurs *rapports*

$$\frac{554}{440} \quad \text{et} \quad \frac{698}{554}$$

le sont.

En d'autres termes, les accords produits par les paires de fréquences $\{440, 554\}$ et $\{554, 698\}$ sont transposés l'un de l'autre, et sont donc perçus comme "les mêmes".

L'être humain formule que "des fréquences de mêmes rapports correspondent à des sons de mêmes intervalles". De ce point de vue, le cerveau humain (ou l'oreille humaine ?) fonctionne comme un logarithme naturel : il transforme les produits en sommes et les divisions en différences.

Un intervalle correspondant à un rapport de fréquence de 1,03 est en général perçu par une oreille humaine exercée. L'intervalle correspondant à un rapport de 1,01 est en général imperceptible.

2. La convention du dodécaphonisme et le cadre tonal occidental

Les douze notes

Sur un violon, le déplacement continu du doigt appuyant sur la corde, combiné à l'action de l'archet, produit des sons dont la fréquence varie (presque) continûment — penser au violon tzigane qui pleure, ou à certaines "attaques" de notes d'Yves Montand.

Mais sur un piano (accordé), on n'a que DOUZE notes possibles. Ce sont les douze notes utilisées par (presque) toute la musique occidentale – et singulièrement par tous les instruments à clavier, les guitares, etc. :

{ LA, LA DIÈSE, SI, DO, DO DIÈSE, RÉ, RÉ DIÈSE, MI, FA, FA DIÈSE, SOL, SOL DIÈSE } .

Elles sont déterminées, en théorie, par la condition suivante :

Convention du dodécaphonisme.

(1) *On fixe (par décret, ou par accord international) la fréquence de l'une d'entre elles (en général, une fréquence de référence pour le LA),*
(2) *deux fréquences successives ont toujours le même intervalle.*

Rappelons que, par l'axiome du logarithme, "avoir le même intervalle" signifie que les rapports sont les mêmes.

Notons δ ce rapport commun. Si f_1 désigne la fréquence de LA, f_2 celle du LA DIÈSE qui le suit, f_3 celle de SI, ..., f_{12} celle de SOL DIÈSE (et f_{13} celle du LA à l'octave du LA de départ), on a donc

$$\delta = \frac{f_2}{f_1} = \frac{f_3}{f_2} = \cdots = \frac{f_{13}}{f_{12}} \,.$$

Les fréquences des 12 notes du dodécaphonisme sont donc déterminées à partir de la fréquence f_1 de LA (ou d'ailleurs de n'importe quelle autre note de départ) par la formule

$$f_2 = \delta f_1 \,,\; f_3 = \delta f_2 = \delta^2 f_1 \,,\; \dots \,,\; f_{12} = \delta^{11} f_1 \,.$$

Comme $f_{13} = 2f_1$, on voit que $\delta^{12} = 2$, donc δ est la racine 12ième de 2, *i.e.*, environ 1,06.

Ce n'est pas notre propos ici d'expliquer la genèse de cette convention – de cette limitation ? – de la musique occidentale contemporaine consistant à utiliser seulement 12 notes, et ces douze notes là.

Une explication souvent avancée est la "naturalité" de la gamme de Pythagore, que l'on peut présenter et justifier sommairement comme suit.

Une corde vibrante, avec la fréquence f, fait aussi entendre des vibrations secondaires (appelées *harmoniques*), de fréquences $2f$, $3f$, $4f$, $5f$, ... , dont l'intensité décroît, en général, au fur et à mesure qu'augmente le facteur multiplicatif ("en général", écrivons–nous, car en fait, la répartition des intensités de ces harmoniques contribue de façon essentielle à ce qu'on appelle le "timbre"). Les fréquences $2f$ et $4f$ produisant la même note (axiome de l'octave), la fréquence triple $3f$ produit une note qui paraît donc, plus que toute autre, attachée à la note initiale.

Si on choisit, dans un ensemble de conventions musicales, d'utiliser une note de fréquence f, il paraît donc naturel d'utiliser aussi celle de fréquence $3f$, et par conséquent, d'utiliser celles de fréquences $9f$, $27f$, etc., soit les notes de fréquences $3^n f$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$.

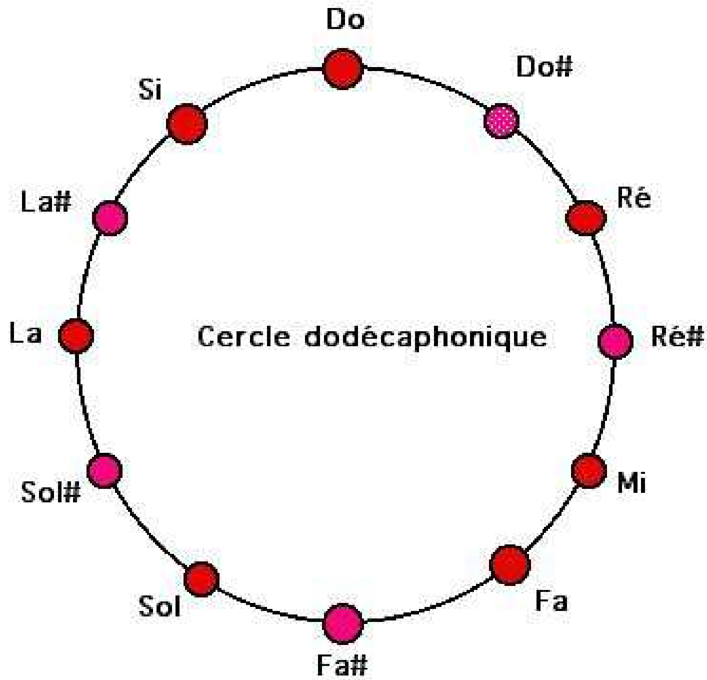
C'est alors que doit être mentionnée cette particularité arithmétique : 3^{12} est peu différent de 2^{19}, en ce sens que $\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1,01$. Il s'ensuit que, dans la suite des notes de fréquences $f, 3f, 3^2 f, 3^3 f, \dots$, la douzième (celle de fréquence $3^{12} f$) est difficilement distinguable de la première, et les douze premières notes de cette suite diffèrent fort peu des douzes notes du dodécaphonisme.

Le cercle dodécaphonique et la transposition

Dans le cadre du dodécaphonisme, on ne peut pas multiplier une fréquence par un facteur arbitraire, mais seulement par une puissance de δ.

Il est commode de représenter les douze notes du dodécaphonisme sur un cercle comme dans la figure ci–dessous, *i.e.*, comme sur une montre. La multiplication par δ^n (où n est un nombre entier positif ou négatif) est alors représentée par un tour de n crans dans le sens des aiguilles de la montre (si $n = -3$, on tourne donc de 3 dans le sens inverse des aiguilles !). Comme sur une montre, ajouter 12 revient à ne rien changer (c'est la multiplication par δ^{12}, *i.e.*, par 2, qui ne change pas la note). Donc, comme sur la montre, $15 = 3$, $21 = 9$, etc. et de manière générale, tourner de n crans revient à tourner de r crans, où r est le reste de la division de n par 12.

Appelons ce cercle le *cercle dodécaphonique*, et désignons-le par $\mathcal{D}$.



Le groupe cyclique à 12 éléments C_{12}, consistant en l'ensemble des 12 nombres entiers

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

muni de l'addition "modulo 12" (comme décrite ci–dessus : $7 + 8 = 3$, $4 - 9 = 7$, etc.), *opère* sur le cercle dodécaphonique par rotation : si N est une note du cercle dodécaphonique, et si n est un élément du groupe C_{12}, on désigne par $N + n$ la note obtenue à partir de N par la rotation de n crans[1].

Une mélodie rudimentaire peut être représentée par une suite de notes $(N_1, N_2, N_3, \dots)$ et "transposer" signifie seulement "faire tourner d'un facteur constant cette mélodie", *i.e.*, la remplacer par une mélodie du type $(N_1 + n, N_2 + n, N_3 + n, \dots)$.

Le cadre tonal occidental

Le clavier du piano.

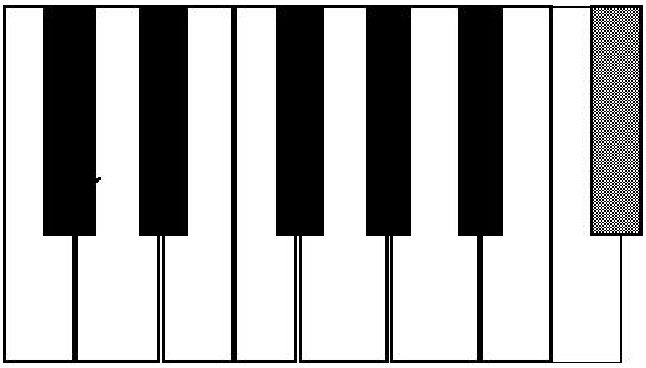
Quelques instants de réflexion devant un clavier de piano suffisent à prendre conscience du caractère totalement "dissymétrique" de sa construction. Alors que l'intervalle (le rapport des

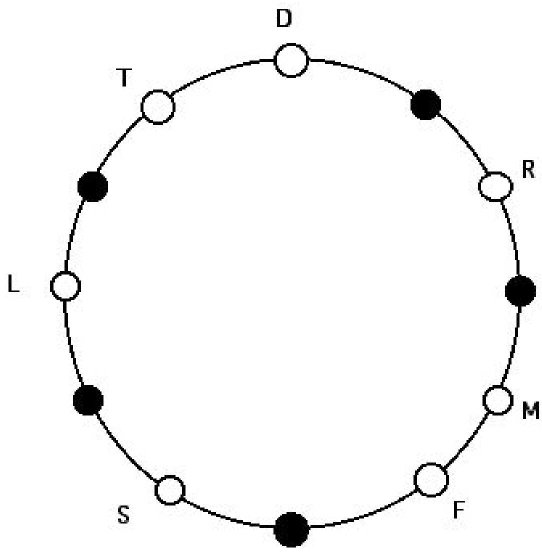
[1] Le premier à avoir utilisé l'action du groupe C_{12} dans les questions d'harmonie musicale est sans doute Pierre Barbaud (voir le site *http://www.olats.org/schoffer/barbaud1.htm*).

fréquences) entre deux notes successives est toujours le même, les touches ne semblent pas avoir toutes le même rôle : les blanches semblent avoir un rôle privilégié — elles sont en tout cas plus accessibles aux doigts du débutant. Elles constituent l'ensemble connu par cœur par tout un chacun :

$$\{\text{DO, RÉ, MI, FA, SOL, LA, SI}\}\,.$$

Désignons par $\mathcal{O}$ ("$\mathcal{O}$" comme "occidental") cet ensemble de sept notes, sous–ensemble de l'ensemble $\mathcal{D}$ des notes du cercle dodécaphonique.

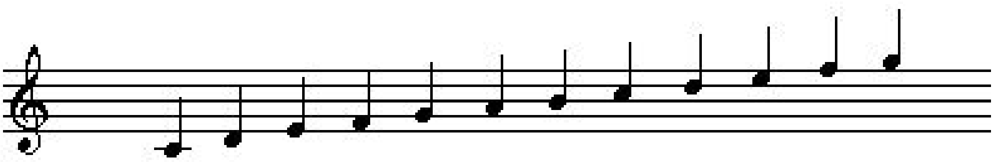




La notation musicale.

De même que le clavier des instruments de musique, la notation musicale ne reflète PAS le principe du dodécaphonisme.

Remarquons en effet que deux notes successives sur une portée n'ont pas nécessairement le même intervalle : en clé de sol, il y a un demi–ton d'intervalle entre la note à cheval sur la ligne du bas (le MI) et celle située immédiatement au–dessus (le FA), alors qu'il y a un ton d'intervalle entre la note située sur la deuxième ligne en partant du bas (le SOL) et celle située immédiatement au–dessus (le LA).



Les notes de la portée sont celles de l'ensemble $\mathcal{O}$ — pour désigner les autres, il convient d'ajouter des "altérations à la clef", dièse (notée $\sharp$) ou bémol (notée $\flat$).

Ainsi l'ensemble $\mathcal{O}$, sous–ensemble à 7 notes de l'ensemble $\mathcal{D}$ des notes du cercle dodécaphonique, est privilégié, dans la facture de certains instruments, comme dans la notation musicale.

Désignons par $\{D, Dd, R, Rd, M, F, Fd, S, Sd, L, Ld, T\}$ (la lettre T y représente SI, conformément à la notation anglo–saxonne, et n'est ainsi pas confondue avec le SOL) l'ensemble des douze notes du cercle dodécaphonique $\mathcal{D}$. L'ensemble $\mathcal{O}$ est alors écrit

$$\mathcal{O} = \{D, R, M, F, S, L, T\}\,.$$

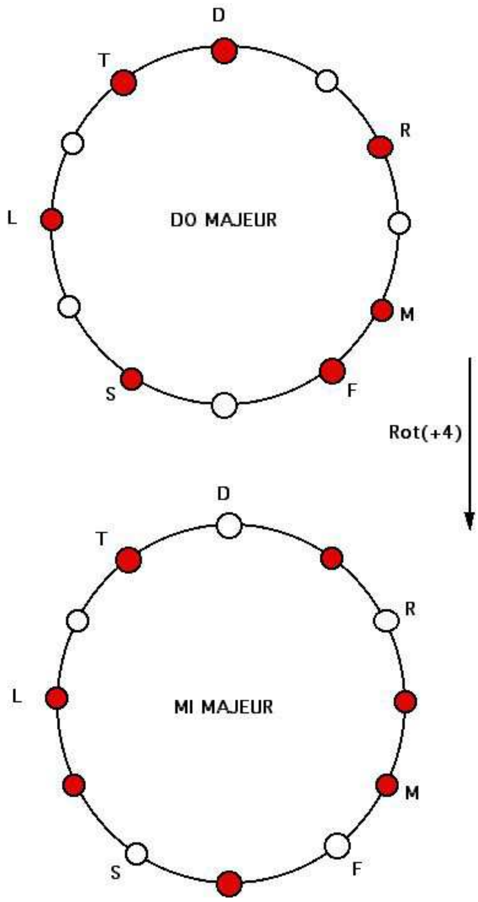
En utilisant les rotations déjà considérées sur le cercle $\mathcal{D}$, l'ensemble $\mathcal{O}$ peut être décrit de la manière suivante :

$$\mathcal{O} = \{D, D+2, D+4, D+5, D+7, D+9, D+11\}\,.$$

À première vue — singulièrement sur le cercle dodécaphonique $\mathcal{D}$, cet ensemble ne semble rien avoir de remarquable. Pourquoi donc est–il si essentiel dans la musique ? Nous fournirons plus loin une possible réponse.

Remarques.

• Jouées dans cet ordre, les notes de l'ensemble $\mathcal{O}$ produisent la *gamme majeure de DO*.



• En partant de n'importe laquelle de ces notes, on peut transposer l'ensemble $\mathcal{O}$, et obtenir (par exemple en ajoutant 4 à chacune des notes de $\mathcal{O}$ comme sur le dessin ci–dessus)

$$\mathcal{O}+4 = \{D+4, D+6, D+8, D+9, D+11, D=1, D+3\} = \{M, Fd, Sd, L, T, Dd, Rd\}\,,$$

Jouées dans cet ordre, les notes de $\mathcal{O}+4$ produisent la gamme majeure de MI.

Nous ne considèrerons ici que les *ensembles* de notes, et n'entrerons donc pas plus avant dans les considérations plus subtiles concernant la notion de *mode*.

Notons simplement que, jouées dans l'ordre des aiguilles d'une montre *à partir du LA*, les notes de l'ensemble $\mathcal{O}$ produisent la *gamme mineure de LA* :

$$\{L, T, D, R, M, F, S\}\,,$$

relevant de ce que l'on appelle le *mode mineur*, tandis que jouées à partir de DO DIÈSE, celles de l'ensemble $\mathcal{O}+4$ produisent la gamme mineure de DO DIÈSE. Jouées à partir du RÉ, les notes de $\mathcal{O}$ produisent la gamme dite du *mode phrygien*, etc.

Le mathématicien définit un mode comme un ensemble de paires $(\mathcal{T}+n, N+n)$, où $\mathcal{T}$ est un cadre tonal fixé et N une note fixée dans $\mathcal{T}$, et où n parcourt le groupe C_{12}. La gamme du mode de N (dans le type tonal défini par $\mathcal{T}$) est alors la succession des notes de $\mathcal{T}$, à partir de N, dans l'ordre des aiguilles d'une montre sur le cercle dodécaphonique.

Convention de base : Cadre tonal occidental et transposition

La raison de la facture particulière du piano, et sans doute des conventions de la notation musicale (qui ne reflètent pas le fait que deux notes successives ont le même intervalle) est à rechercher dans les pratiques et conventions de la musique occidentale.

Pour décrire (sommairement) ces règles et conventions, nous allons procéder par approximations successives, en énonçant des principes que nous préciserons (ou infirmerons partiellement) dans la suite.

A. Choix du type tonal.

Notre première approximation est vraiment caricaturalement simpliste (et donc caricaturalement fausse !). Elle nous sert cependant de point de départ commode.

Première approximation du Principe de la musique. *Principe 1 : Les mélodies simples de la musique occidentale n'utilisent que les notes de l'ensemble $\mathcal{O}$.*

C'est ainsi que *Au Clair de la Lune* peut être entièrement joué sur les touches blanches du piano ou écrit sur les notes non altérées de la portée (l'ensemble $\mathcal{O}$) :

$$\begin{aligned}(&D, D, D, R, M, R, D, M, R, R, D, D, D, D, R, M, R, D, M, R, R, D,\\ &R, R, R, R, L, L, R, D, T, L, S,\\ &D, D, D, R, M, R, D, M, R, R, D)\,,\end{aligned}$$

de même que *Let it be*, dont voici le début sur une portée :

ou encore *Ma P'tite Chanson* :

$$\begin{aligned}(&L, T, D, T, L, L, D, M, L, S, F, M,\\ &R, M, F, M, R, R, F, L, M, R, D, T,\\ &T, D, S, L)\,,\end{aligned}$$

Ainsi, si ce principe est appliqué, la musique occidentale, non seulement n'utilise pas l'infinie variété des fréquences, mais n'utilise que SEPT des douze notes de l'ensemble dodécaphonique.

Appelons *cadre tonal* tout sous–ensemble de l'ensemble $\mathcal{D}$ des douze notes. Le principe 1 exprime que la musique occidentale choisit de se placer entièrement dans le cadre tonal $\mathcal{O}$, que nous appellerons désormais le *cadre tonal occidental*.

Transposition et Principe 1.

L'axiome de transposition force à modifier le principe 1.

En effet, si n est un élément quelconque du groupe C_{12} des transpositions, toute mélodie "transposée de n crans" est perçue comme analogue — et elle utilise alors les notes du cadre tonal transposé $\mathcal{O}+n$.

On peut en effet jouer *Au Clair de la Lune* en utilisant par exemple les notes du cadre tonal $\mathcal{O}+3$ (*i.e.*, "en RÉ DIÈSE").
On sait également que les œuvres de la musique classique peuvent être écrites "en DO MAJEUR" (*i.e.*, dans le cadre tonal $\mathcal{O}$), mais aussi par exemple "en FA MAJEUR" (*i.e.*, dans le cadre tonal $\mathcal{O}+5$) ou en "MI MINEUR" (*i.e.*, dans le cadre tonal $\mathcal{O}+7$).

Appelons *type tonal* l'ensemble des transposés d'un cadre tonal $\mathcal{T}$.
Le type du cadre tonal $\mathcal{O}$ est appelé *type tonal occidental*

Le type tonal occidental est donc constitué de tous les cadres tonals $\mathcal{O}, \mathcal{O}+1, \mathcal{O}+2, \ldots, \mathcal{O}+11$.
Chacun de ces cadres tonals est dit "de type occidental".

Le principe 1, joint au principe de transposition, donne la deuxième version du principe de la musique.

Deuxième approximation du Principe de la musique. *Principe 2 : Dans la musique occidentale, on choisit, pour chaque œuvre (ou pour de grandes parties de chaque œuvre) de n'utiliser que les notes d'un cadre tonal de type occidental.*

B. Passer d'un cadre tonal à un autre.

On vient de voir que le principe 2 autorise, dans le cours d'une œuvre, de passer d'un cadre tonal (de type occidental) à un autre cadre tonal (de type occidental).

C'est ainsi que la mélodie (*Et mourir de plaisir*) retranscrite ci–dessous

- débute dans le cadre tonal de type occidental $\mathcal{O}+5 = \{F, S, L, Ld, D, R, M\}$ (noter qu'avec nos conventions, — celles du piano — la note notée en musique SI$^\flat$ coïncide avec celle que nous notons Ld),
- mais passe, dans la septième mesure, dans le cadre $\mathcal{O}$.

Cadres tonals voisins.

Ce n'est pas par hasard que l'on passe du cadre tonal $\mathcal{O}+5$ au cadre tonal $\mathcal{O}$ "sans presque le remarquer". On peut noter en effet que ces deux cadres sont peu différents — nous dirons qu'ils sont "voisins" : ils ne diffèrent que d'une seule note, puisque, pour passer de $\mathcal{O}$ à $\mathcal{O}+5$, il suffit de remplacer T par Ld.

Le fait que deux cadres soient voisins permet un passage musical "en douceur" d'un cadre à l'autre.

À l'inverse, on peut noter que les cadres tonals $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}+6 = \{Fd, Sd, Ld, T, Dd, Rd, F\}$ sont "distants" l'un de l'autre : ils n'ont en commun que les deux notes F et T. Passer du cadre $\mathcal{O}$ au cadre $\mathcal{O}+6$ est perçu comme choquant, comme on peut l'entendre en plaquant successivement les deux accords suivants :

$$\{D, M, S\} \quad \text{puis} \quad \{Fd, Ld, Dd\}\,.$$

De façon plus générale, il est facile de vérifier la propriété suivante, dont nous verrons plus loin qu'elle est spécifique du type tonal occidental.

Proposition. *Tout cadre tonal $\mathcal{T}$ de type occidental est voisin de ses transposés $\mathcal{T}+5$ et $\mathcal{T}+7$.*

Engendrer toutes les transpositions.

Les transpositions par 5 et 7 (comme les transpositions par 1 et 11=-1) possèdent une propriété remarquable : lorsqu'on les itère, on obtient TOUTES les transpositions — à la différence des transpositions par 0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, ou 10.

La table suivante donne toutes les valeurs des itérés successifs des transpositions par 5 et 7.

La deuxième ligne donne les valeurs des itérés successifs de la rotation de 5 crans du cercle dodécaphonique (en d'autres termes, elle donne les valeurs de multiples successifs de 5 modulo 12). La troisième ligne donne les valeurs des itérés successifs de la rotation de 7 crans.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$5k$	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7
$7k$	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5

Le fait que la transposition par 5 ou 7 d'un cadre tonal occidental fournit un cadre tonal voisin, et que toute transposition peut être vue comme un itéré de transpositions par 5 et 7, permet de comprendre l'origine de la troisième version du principe de la musique énoncé ci–dessous.

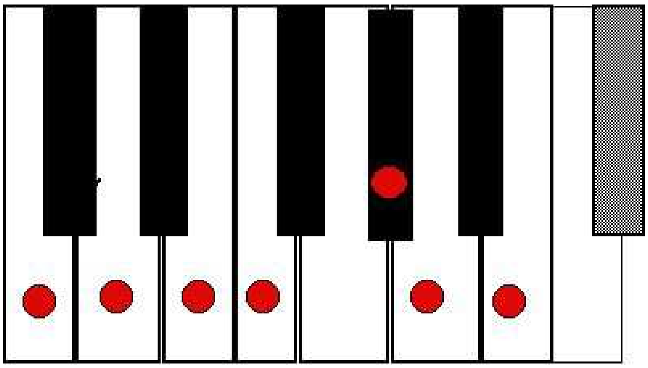
Troisième approximation du Principe de la musique. *Principe 3 : Le passage d'un cadre tonal (occidental) à un autre se fait (souvent) en utilisant une succession de passages entre un cadre $\mathcal{T}$ et ses transposés voisins $\mathcal{T}+5$ ou $\mathcal{T}+7$.*

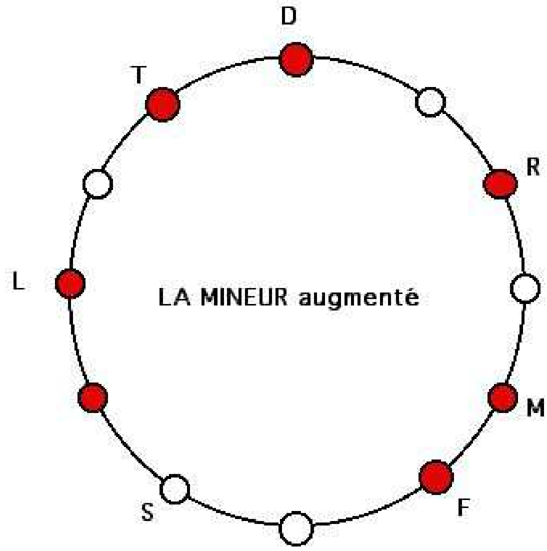
C. Un autre type tonal.

Au cours des siècles derniers, la musique occidentale a en fait, petit à petit, intégré un autre type tonal, différent de ce que nous appelons le type occidental, et à présent d'usage très fréquent dans la musique populaire : le type tonal *mineur augmenté*, défini par le cadre tonal (noté "$\mathcal{A}$" comme "augmenté")

$$\mathcal{A} := \{L, T, D, R, M, F, Sd\}\,.$$

Le fait suivant est étrange, mais ne relève pas du sujet traité ici : alors que les mélodies et accords du type mineur paraissent aujourd'hui parfaitement naturelles et familières, la gamme (L, T, D, R, M, F, Sd) donne encore une impression un peu étrange et vaguement orientale.





On note que $\mathcal{A}$ est, lui aussi, voisin de $\mathcal{O}$ (puisque on passe de $\mathcal{O}$ à $\mathcal{A}$ en substituant Sd à S) — mais $\mathcal{A}$ n'est pas de type occidental.

On dit que deux cadres tonals $\mathcal{T}$ et $\mathcal{U}$, où $\mathcal{T}$ est de type occidental et $\mathcal{U}$ est de type mineur augmenté, sont *associés* s'il existe un élément n du groupe C_{12} tel que $\mathcal{T} = \mathcal{O}+n$ et $\mathcal{U} = \mathcal{A}+n$. Ainsi deux tels cadres tonals sont voisins.

Il est ainsi possible de passer "en douceur" d'une partie de mélodie écrite dans un certain cadre tonal à un cadre tonal associé.

C'est ce que montre l'exemple suivant (*Le galérien*), dont la première ligne est dans le type occidental (DO MAJEUR) et la deuxième en mineur augmenté associé.

À la différence des cadres tonals de type occidental, un cadre de type mineur augmenté n'est voisin d'aucun de ses transposés distincts — voir ci–dessous, §4.

Quatrième approximation du Principe de la musique. *Principe 4 :*

- *Chaque œuvre de la musique occidentale est (en général) composée de plusieurs parties, chacune écrite avec les notes d'un cadre tonal déterminé, qui est soit de type occidental,* *soit de type mineur augmenté.*

- *Deux parties contiguës sont (en général) écrites dans des cadres tonals voisins (et ainsi le passage de l'une à l'autre se fait "en douceur").*

Les cadres voisins en question sont

- soit de la forme $(\mathcal{T}, \mathcal{T} \pm 5)$, où $\mathcal{T}$ est de type occidental,
- soit de la forme $(\mathcal{T}, \mathcal{U})$ où $\mathcal{T}$ est de type occidental, $\mathcal{U}$ de type mineur augmenté, et $\mathcal{T}$ et $\mathcal{U}$ sont associés.

Nous verrons plus loin que le type mineur augmenté se prête en fait à d'autres transpositions en douceur que celles par voisinage.

3. Tous les cadres tonals, leurs types et leurs transposés

Ayant grossièrement établi les principes de la musique (occidentale et populaire), qui reposent essentiellement sur le choix d'un type tonal particulier et sur les règles de transposition par voisinage, nous allons maintenant étudier quels sont TOUS les types tonals possibles, et en quoi le type que nous appelons occidental, de même que le type mineur augmenté, se distingue de tous les autres.

Rappelons que l'on nomme *cadre tonal* un sous–ensemble de l'ensemble $\mathcal{D}$ des douze notes du cercle dodécaphonique, et que l'on appelle *type tonal* d'un cadre tonal l'ensemble de tous les transformés de ce cadre tonal par transposition.

Nombres de transposés des cadres tonals

On peut dénombrer et classifier les cadres tonals selon leur nombre de transposés. Nous allons voir que le nombre de transposés d'un cadre tonal arbitraire est toujours un diviseur de 12 (*i.e.*, 1, 2, 3, 4, 6 ou 12), et qu'un cadre tonal "pris au hasard" a de grandes chances d'avoir 12 transposés : le type tonal occidental est l'un des 335 types correspondant à des cadres à 12 transposés (voir le théorème ci–dessous).

Les types tonals des cadres qui ont moins de 12 transposés correspondent à ce que Olivier Messiaen appelait les *modes à transposition limitée*, qu'il avait aussi classifiés.

Théorème.

(1) Il y a 4096 cadres tonals différents, et exactement 352 types de cadres tonals.

(2) Plus précisément, il y a :

4020 cadres tonals avec exactement 12 transposés différents, qui définissent 335 types,
54 cadres tonals avec exactement 6 transposés différents, qui définissent 9 types,
12 cadres tonals avec exactement 4 transposés différents, qui définissent 3 types,
6 cadres tonals avec exactement 3 transposés différents, qui définissent 2 types,
2 cadres tonals avec exactement 2 transposés différents, qui définissent 1 type,
2 cadres tonals avec exactement 1 transposé, qui définissent 2 types.

Remarques.

• Les types correspondant aux deux cadres tonals à un transposé sont les types "triviaux" donnés par

– l'ensemble des douze notes,
– l'ensemble vide (dont l'intérêt en mathématique ne peut être méprisé, mais dont l'intérêt musical est contestable).

• L'unique type correspondant à un cadre tonal à deux transposés est celui défini par ce que l'on appelle la *gamme par tons* : $\{D, R, M, Fd, Sd, Ld\}$.

Pour démontrer le théorème, on peut évidemment dénombrer "à la main" les sous–ensembles (cadres tonals) de $\mathcal{D}$ et leurs transposés. C'est un travail long, fastidieux, et susceptible de produire bien des erreurs. Nous lui préférons une démonstration mathématique — qui peut être omise par le lecteur rétif aux mathématiques : elle présente l'avantage, outre d'être relativement brêve et fiable, de se généraliser à d'autres cas ; nous l'écrivons pour le cas général où 12 est remplacé par un entier positif quelconque n.

Démonstration. Soit G le groupe cyclique $C_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On note $\mathcal{D}_n$ un ensemble de n sommets régulièrement distribués sur un cercle.

• Les sous–groupes de G sont en bijection naturelle avec les diviseurs de n : pour tout diviseur d de n, il existe un et un seul sous–groupe de G d'ordre d — que nous noterons G_d.

En effet, soit H un sous–groupe de G. Son ordre d est un diviseur de n (d'après un théorème de Lagrange). Posons $n = dd'$. Puisque le groupe quotient G/H est d'ordre d', l'image de d' modulo n appartient à H. Il en résulte que l'ensemble $\{kd' \,;\, (k = 0, 1, \ldots, d-1)\}$ est contenu dans H. Comme cet ensemble forme un sous–goupe d'ordre d, il est égal à H.

On remarque que si e est un autre diviseur de n, alors $G_d \subseteq G_e$ si et seulement si $d \mid e$.

• Les orbites de G_d sur l'ensemble des n notes $\mathcal{D}_n$ sont en bijection avec les classes de G modulo G_d. Ainsi, il y a n/d orbites de G_d sur $\mathcal{D}_n$, chacune de cardinal d.

• Si $\mathcal{T}$ est un cadre tonal (*i.e.*, un sous–ensemble de $\mathcal{D}_n$), alors $\mathcal{T}$ est stable sous l'action de G_d si et seulement si il est une union d'orbites de G_d sur $\mathcal{D}_n$. Il y a donc exactement $2^{n/d}$ cadres tonals stables sous l'action de G_d.

• Soit $s_d(n)$ le nombre de cadres tonals dont le stabilisateur est le groupe G_d. D'après ce qui précède, on a

$$2^{n/d} = \sum_{\{e\,;\,(d|e|n)\}} s_e(n)\,.$$

On définit la *fonction de Möbius* par la formule

$$\mu(1) = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{d|e} \mu(d) = 0 \quad \text{for } e > 1\,.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que la fonction de Möbius se calcule de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mu(k) = 0 & \text{si } k \text{ est divisible par un carré,} \\ \mu(k) = (-1)^m & \text{si } k \text{ est produit de } m \text{ nombres premiers distincts.} \end{cases}$$

Soit alors $k = l/d$ (où $d \mid l \mid n$) un diviseur de n/d. En remplaçant $2^{n/l}$ par $\sum_{l|e|n} s_e(n)$ dans l'expression $\sum_{k|(n/d)} 2^{(n/d)/k}\mu(k)$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k|(n/d)} 2^{(n/d)/k}\mu(k) &= \sum_{\{e,l\,;\,(l|e|n)\}} s_e(n)\mu(l/d) \\ &= \sum_{e|n} s_e(n) \sum_{l|e} \mu(l/d)\,, \end{aligned}$$

ce qui, par définition de μ, donne la formule

$$s_d(n) = \sum_{\{e\,;\,(e|(n/d))\}} \mu\left(\frac{n/d}{e}\right) 2^e\,.$$

Un calcul simple donne alors les nombres énoncés dans le théorème. $\square$

Les cadres tonals de type $\mathcal{L}_d$ (pour $d = 1, 2, 3, 4, 6, 12$)

Des constituants essentiels des types "à transpositions limitées" sont donnés par des types tonals particuliers, que nous définissons maintenant.

Soit d un diviseur de 12. Posons $12 = dd'$.

Soit N une note. On désigne par $\mathcal{L}_d(N)$ ("$\mathcal{L}$" comme "limité") le cadre tonal à d notes défini à partir de N par la formule

$$\mathcal{L}_d(N) := \{N, N + d', N + 2d', \ldots, N + (d-1)d'\} .$$

On dit qu'un cadre tonal est *de type* $\mathcal{L}_d$ s'il est de la forme $\mathcal{L}_d(N)$ pour une certaine note N.

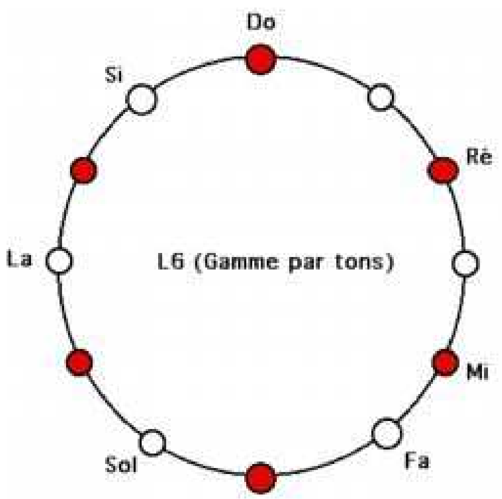
Les propriétés suivantes sont faciles à vérifier.

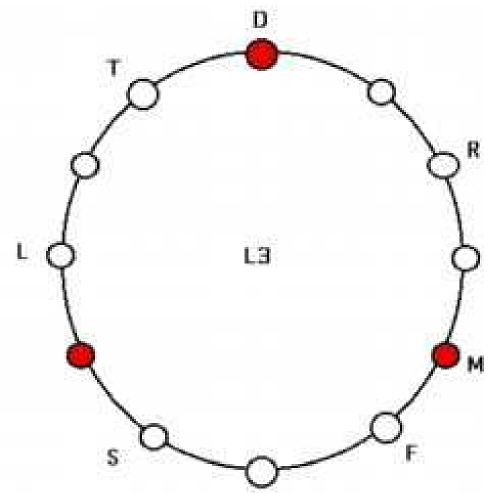
Proposition. *Un cadre tonal $\mathcal{T}$ de type $\mathcal{L}_d$*

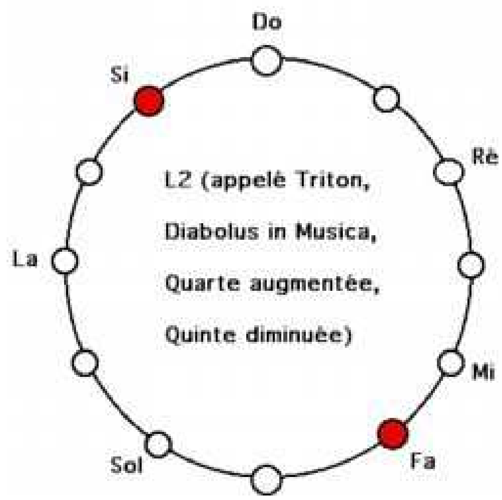
- *est égal à $\mathcal{L}_d(N)$ pour n'importe laquelle des notes N qu'il contient,*
- *a exactement d' transposés, à savoir les cadres tonals*

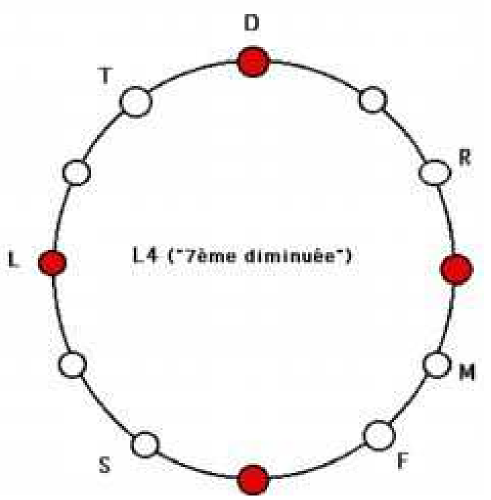
$$\mathcal{T}, \mathcal{T} + 1, \mathcal{T} + 2, \ldots, \mathcal{T} + d' - 1 .$$

Les dessins ci–dessous décrivent les cadres tonals de type $\mathcal{L}_d$ pour $d = 2, 3, 4, 6$ sur le cercle dodécaphonique $\mathcal{D}$ (la description de ceux de type $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_{12}$ est laissée à la sagacité du lecteur).









Le type $\mathcal{L}_6$, donné par exemple par $\mathcal{L}_6(D) := \{D, R, M, Fd, Sd, Ld\}$, correspond à la gamme par tons déjà mentionnée, souvent utilisée par Debussy.

• Parmi les cadres tonals à 3 transposés figurent ceux de type $\mathcal{L}_4$, et parmi les cadres tonals à 4 transposés figurent ceux de type $\mathcal{L}_3$.

• Nous laissons au lecteur, à titre d'exercice, le soin de déterminer *tous* les cadres tonals "à transposition limitée" – dont le nombre est connu *a priori* grâce au théorème ci–dessus.

Nous omettons la démonstration (facile) de la propriété suivante.

Proposition. *Supposons que $\mathcal{T}$ est un cadre tonal à 12 tranposés, qui contient un cadre $\mathcal{L}$ de type $\mathcal{L}_d$. Alors $\mathcal{L}$ est contenu dans exactement d cadres tonals de même type que $\mathcal{T}$, plus précisément dans les cadres tonals*

$$\mathcal{T}\,,\, \mathcal{T}+d'\,,\, \mathcal{T}+2d'\,,\, \dots\,,\, \mathcal{T}+(d-1)d'\,.$$

Supposons que nous avons choisi, pour composer de la musique, un cadre tonal $\mathcal{T}$ qui contient un cadre tonal de type $\mathcal{L}_d$. Ce qui précède montre que le sous–ensemble de type $\mathcal{L}_d$ est un outil commode pour transposer : si, après un passage (mélodie ou accord) clairement écrit dans le cadre $\mathcal{T}$, on plaque $\mathcal{L}_d$ comme un accord (ou on le déroule comme un arpège), on peut passer ensuite à l'un des autres cadres $\mathcal{T}+kd'$ ($k = 1, 2 \dots, d-1$) de manière perçue comme "naturelle" par l'auditeur.

C'est l'une des propriétés essentielles du type mineur augmenté, sur laquelle nous allons revenir ci–dessous : en effet, un cadre tonal de type mineur augmenté contient à la fois un cadre tonal de type $\mathcal{L}_3$ et un cadre tonal de type $\mathcal{L}_4$.

4. Le type tonal occidental et la transposition

Engendrer les transpositions

Nous avons vu que, par itération, les rotations de 5 et 7 fournissent les 12 rotations possibles de C_{12}.

Il s'agit d'une propriété générale des groupes cycliques C_n (définis de manière analogue en remplaçant 12 par n comme les groupes des rotations d'un cercle à n sommets) : l'ensemble des multiples d'un élément m de C_n est égal à C_n si et seulement m est premier avec n.

Pour $n = 12$, on voit donc bien que la condition précédente est satisfaite par $m = 1, 11, 5, 7$ [Noter que $-1 = 11$ et $-5 = 7$].

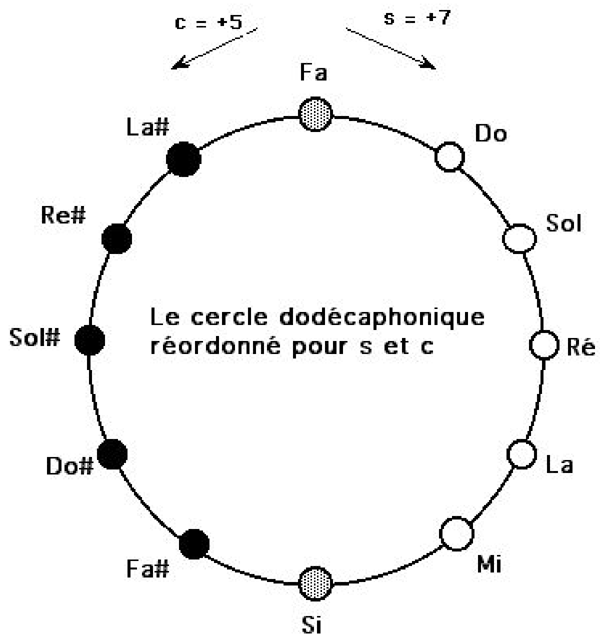
Notation.

- *On note* **s** *la transposition correspondant à la rotation de* 7 *crans sur le cercle dodécaphonique $\mathcal{D}$.*
- *On note* **c** *la transposition correspondant à la rotation de* 5 *crans sur le cercle dodécaphonique $\mathcal{D}$.*

Si N est une note de $\mathcal{D}$ (resp. si $\mathcal{T}$ est un sous–ensemble ou "cadre tonal" de $\mathcal{D}$), on pose ainsi

$$\mathbf{s}(N) := N + 7\,,\, \mathbf{s}(\mathcal{T}) := \mathcal{T} + 7\,,\, \mathbf{c}(N) := N + 5\,,\, \mathbf{c}(\mathcal{T}) := \mathcal{T} + 5\,.$$

Appliquer la transposition **s** après avoir appliqué la transposition **c**, de même qu'appliquer la transposition **c** après avoir appliqué la transposition **s**, revient à ne pas transposer (tourner de 0), ou encore à transformer selon la transposition qui laisse tout identique. On peut réordonner les notes sur le cercle dodécaphonique de sorte à obtenir une description commode des opérations **s** et **c** – en parcourant ce nouveau cercle, on obtient alors le "cycle des quintes", et aussi l'ordre des dièses et des bémols dans les différentes armures.



Types tonals adaptés à la transposition

On dit qu'un cadre tonal $\mathcal{T}$ est *voisin* de $\mathbf{s}(\mathcal{T})$ s'il en diffère aussi peu que possible, *i.e.*, si $\mathbf{s}(\mathcal{T})$ s'obtient à partir de $\mathcal{T}$ en y changeant une seule note.

Avec les notations des mathématiques, on décrit cette propriété en écrivant par exemple qu'il existe deux notes N et N' telles que

$$\mathbf{s}(\mathcal{T}) = (\mathcal{T} - \{N\}) \cup \{N'\}\,, \text{ ou encore que } \mathbf{s}(\mathcal{T}) = (\mathcal{T} \cap \mathbf{s}(\mathcal{T})) \cup \{N'\}\,.$$

Il est facile de voir que la propriété de "voisinage" précédente est invariante par transposition : si $\mathcal{T}$ est voisin de $\mathbf{s}(\mathcal{T})$, alors $\mathcal{T}+n$ est voisin de $\mathbf{s}(\mathcal{T}+n) = \mathcal{T}+n+7$ pour tout n dans C_{12} — et en particulier $\mathcal{T}$ est voisin de $\mathbf{c}(\mathcal{T})$ (puisque $\mathcal{T} = \mathbf{s}(\mathbf{c}(\mathcal{T}))$). On peut donc donner la définition suivante :

Définition. *On dit qu'un type tonal est adapté à la transposition si un (quelconque) cadre tonal $\mathcal{T}$ de ce type est voisin de $\mathbf{s}(\mathcal{T})$ (ou de $\mathbf{c}(\mathcal{T})$).*

Exemples.

- Appelons *type tonal javanais* le type tonal du cadre $\mathcal{J} :== \{Fd, Sd, Ld, Dd, Rd\}$ consistant en les cinq notes noires du piano (ce type correspond à ce que l'on appelle la *gamme pentatonique javanaise*).

  En utilisant le cercle dodécaphonique réordonné, on voit immédiatement que $\mathbf{s}(\mathcal{J}) = \{Dd, Sd, Rd, Ld, F\}$, et ainsi que $\mathbf{s}(\mathcal{J})$ s'obtient à partir de $\mathcal{J}$ en y substituant la note F à la note Fd.

  Le type tonal javanais est donc adapté à la transposition.
- Nous avons déjà vu que le type tonal majeur occidental est adapté à la transposition, et que par contre le type mineur augmenté ne l'est pas.
- Les types $\mathcal{L}_d$ pour $d = 2, 3, 4, 6$ ne sont pas adaptés à la transposition.

Le théorème d'existence et d'unicité

Nous allons énoncer un résultat (facile du point de vue mathématique) qui montre en particulier que pour tout choix *a priori* d'un nombre entier $m \leq 12$, il existe *un et un seul type tonal à m notes qui est adapté à la transposition* :

- pour $m = 5$, il s'agit du type javanais,
- pour $m = 7$, il s'agit du type occidental classique.

Nous énonçons le résultat dans un cadre général, permettant de remplacer les 12 notes du dodécaphonisme par un nombre arbitraire n de notes.

Soit n un nombre entier positif. Soit u un nombre entier inversible modulo n, et soit v son opposé modulo 12 (on appliquera ce qui suit au cas $n = 12$, $u = 7$ et $v = 5$). Nous étendons de manière évidente à ce cas général les notions de cadre tonal et de type définis dans le cas $n = 12$.

Soit $\mathbf{s}$ la transposition correspondant à la rotation de u demi–tons, et soit $\mathbf{c}$ la transposition correspondant à la rotation de v demi–tons : les opérations $\mathbf{s}$ et $\mathbf{c}$ sont inverses l'une de l'autre.

Théorème. *Soit m un nombre entier tel que $0 < m < n$.*

(1) Il existe un et un seul type tonal $\mathcal{T}_m$ tel que, pour tout cadre tonal $\mathcal{T}$ de ce type,

(a) *$\mathcal{T}$ a m éléments,*

(b) *$\mathcal{T}$ a n différent transposés,*

(c) *$\mathcal{T}$ est voisin de $\mathbf{s}(\mathcal{T}) = \mathcal{T} + u$; en d'autres termes, $\mathcal{T} \cap \mathbf{s}(\mathcal{T})$ a $(m-1)$ éléments.*

On pose $\mathcal{T}_m(\mathbf{s}; N) := (\mathcal{T} \cap \mathbf{s}(\mathcal{T})) \cup \{N\}$. On a alors

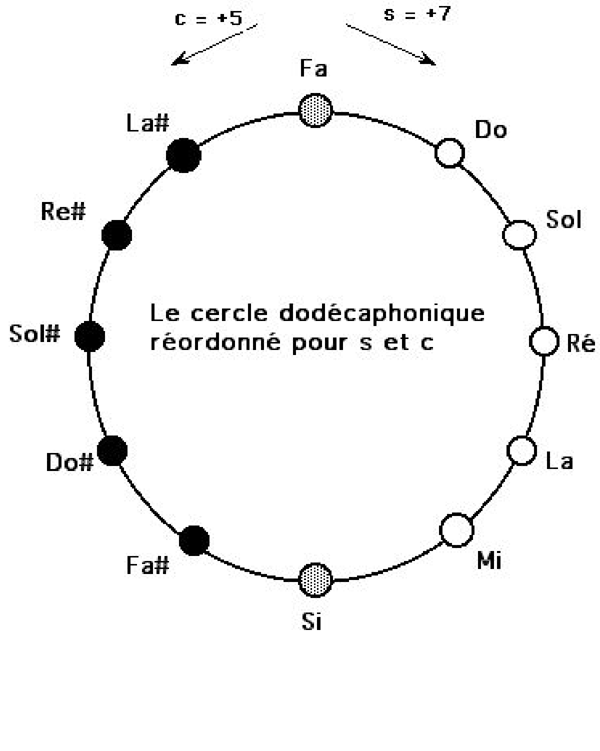
$$\mathcal{T}_m(\mathbf{s}; N) = \{N\,,\, \mathbf{s}(N)\,,\, \mathbf{s}^2(N), \dots, \mathbf{s}^{m-1}(N)\}\,.$$

(2) On a $\mathcal{T}_m(\mathbf{s}; N) = \mathcal{T}_m(\mathbf{c}; \mathbf{s}^{m-1}(N))$, et les opérations $\mathbf{s}$ et $\mathbf{c}$ peuvent être représentées de la manière suivante :

$$\begin{array}{rclcccccccl}
\mathbf{s}\,(\mathcal{T}_m(\mathbf{s}; N)) & = & \{ & & & \mathbf{s}(N), & \dots, & \mathbf{s}^{m-2}(N), & \mathbf{s}^{m-1}(N), & \mathbf{s}^m(N) & \} \\
\mathcal{T}_m(\mathbf{s}; N) & = & \{ & & N, & \mathbf{s}(N), & \dots, & \mathbf{s}^{m-2}(N), & \mathbf{s}^{m-1}(N) & & \} \\
\mathbf{c}\,(\mathcal{T}_m(\mathbf{s}; N)) & = & \{ & \mathbf{c}(N), & N, & \mathbf{s}(N), & \dots, & \mathbf{s}^{m-2}(N) & & & \}
\end{array}$$

La dernière partie du théorème ci–dessus montre que

(1) pour construire le cadre tonal $\mathcal{T}_m(\mathbf{s}; N)$, on choisit N sur le cercle dodécaphonique réordonné, et on choisit les $m-1$ notes qui suivent N dans le sens des aiguilles d'une montre sur ce cercle,



(2) pour appliquer $\mathbf{s}$ au cadre tonal $\mathcal{T}_m(\mathbf{s}; N)$, on le tourne d'un cran dans le sens des aiguilles d'une montre ; pour lui appliquer $\mathbf{c}$, on le tourne d'un cran dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Exemples.

Pour $n = 12$ **et** $m = 7$**,** on obtient le type tonal occidental.
On a en effet $\mathcal{O} = \mathcal{T}_7(\mathbf{s}, F)$.
Si $\mathcal{T} := \mathcal{T}_7(\mathbf{s}, N)$,

- la note $\mathbf{s}(N) = N + 7$ est appelée la *tonique* de $\mathcal{T}$,
- la note $\mathbf{s}^2 N = N + 10$ est appelée la *dominante* de $\mathcal{T}$,
- la note N est appelée la *sous-dominante* de $\mathcal{T}$,
- la note $N' := \mathbf{s}^6(N) = N + 6$ est appelée la *sensible* de $\mathcal{T}$.

Puisque $\mathbf{s}^7$ est la rotation de $+1$, (car $7 \times 7 = 49 \equiv 1 \mod 12$) on voit qu'on passe de $\mathcal{T}_7(N)$ à sa transformée par $\mathbf{s}$ en substituant $N + 1$ à N, *i.e.*, en remplaçant la sous–dominante N par son dièse.

Puisque $\mathbf{c}^7$ est la rotation de -1, (car $7 \times 5 = 35 \equiv -1 \mod 12$) on voit qu'on passe de $\mathcal{T}_7(N)$ à sa transformée par $\mathbf{c}$ en substituant $N' - 1$ à N', *i.e.*, en remplaçant la sensible par son bémol.

Pour $n = 12$ **et** $m = 5$**,** on obtient la base pentatonique javanaise.

Un simple coup d'œil sur le cercle dodécaphonique réordonné (ou un petit raisonnement que nous laissons au lecteur mathématicien le soin de formuler) montre la propriété suivante, qui fournit une caractérisation complète ("existence et unicité") du type tonal occidental : parmi les 335 types tonals à 12 transposés distincts, le type occidental est le seul qui possède les deux propriétés énoncées dans la proposition ci–dessous.

Lemme. *Un cadre tonal adapté à la transposition et de cardinal m*

- *contient un cadre tonal de type $\mathcal{L}_d$ pour $d = 2, 3, 4$ ou 6 si et seulement si $m \geq 7$,*
- *ne contient pas trois notes successives sur le cercle dodécaphonique (i.e., trois demi–tons successifs) si et seulement si $m \leq 7$.*

Proposition. *Le type tonal occidental est le seul (parmi les 335 types tonals à 12 transposés) qui possède les trois propriétés suivantes :*

(a) *il est adapté à la transposition,*
(b) *tout cadre tonal de ce type contient un cadre tonal de type $\mathcal{L}_2$,*
(c) *un cadre tonal de ce type ne contient pas trois notes successives sur le cercle dodécaphonique.*

Noter que l'assertion (b) peut alors être précisée : un cadre tonal de type occidental contient un *unique* triton.

Le "Diabolus in Musica"

Le cadre tonal de type $\mathcal{L}_2 = \{N, N'\}$, formé de deux notes diamétralement opposées sur le cercle dodécaphonique (on a $N = N' + 6$ et $N' = N + 6$) — en d'autres termes, formé de deux notes dont les fréquences sont dans le rapport $\sqrt{2}$ — a reçu beaucoup de noms dans la tradition musicale : on l'appelle *quinte diminuée, quarte augmentée*, ou encore *triton*, voire *Diabolus in Musica*.

Outre la sonorité particulière qu'il fournit, il joue un rôle singulier dans l'harmonie liée au type tonal occidental.

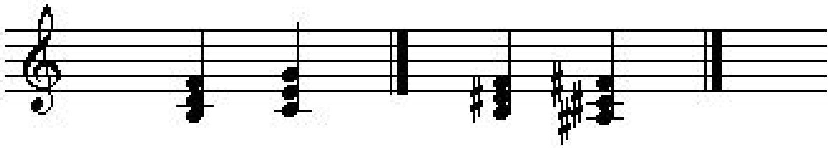
Citons tout d'abord un musicien[2] :

[2]Henry Barraud, *Pour comprendre les musiques d'aujourd'hui*, Le Seuil, Paris (1968)

"La note sensible est la dernière note de l'échelle, celle qui correspond au septième degré. Donc, en do majeur, c'est le si. Elle est douée d'une affection particulière pour la note qui lui est le plus proche, l'octave de la tonique, dont un demi-ton seulement la sépare. Ce demi-ton est pour elle une souffrance. Elle veut absolument le résorber, et toute la musique classique est saturée de cette nostalgie."

Il s'agit là d'un phénomène que connaissent bien les musiciens amateurs : un accord "de septième" appelle littéralement l'accord majeur correspondant, tend à "se résoudre" en cet accord majeur. Analysons cependant cela d'un peu plus près. Les deux successions d'accords suivant semblent naturels à nos oreilles :

$$\{T, R, F\} \longrightarrow \{D, M, S\} \quad \text{et} \quad \{T, Rd, F\} \longrightarrow \{Ld, Dd, Fd\}\,.$$



Il y a une explication mathématique à cette attirance. En effet, il est immédiat (par exemple sur le cercle dodécaphonique réordonné) de vérifier la propriété suivante.

Proposition. *Soit $\mathcal{M} = \{N, N'\}$ un cadre tonal de type $\mathcal{L}_2$.*

(1) *Il existe exactement deux cadres tonals occidentaux $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ qui contiennent $\mathcal{M}$.*
(2) *On a $\mathcal{B} = \mathcal{B}' + 6$ et $\mathcal{B}' = \mathcal{B} + 6$. De plus, toute note du cercle dodécaphonique est dans $\mathcal{B}$ ou dans $\mathcal{B}'$, et les seules notes qui sont à la fois dans $\mathcal{B}$ et dans $\mathcal{B}'$ sont celles de $\mathcal{M}$ — propriétés que le mathématicien traduit par les égalités :*

$$\mathcal{B} \cup \mathcal{B}' = \mathcal{D} \quad \textit{et} \quad \mathcal{B} \cap \mathcal{B}' = \mathcal{M}\,,$$

L'énoncé précédent explique par exemple le "caractère naturel" des successions d'accords reproduites ci–dessus.

En effet, une fois admis que l'on se situe dans le type tonal occidental,

- le triton $\{F, T\}$ n'apparaît que dans le ton de DO et celui de FA DIÈSE,
- et si on lui adjoint toute autre note, l'accord obtenu *détermine* lequel des tons précédents est concerné.

En d'autres termes, *un accord de trois notes contenant un triton est contenu dans un et un seul cadre tonal occidental, donc le détermine.*

Noter que, conformément à l'assertion (1) de la proposition ci–dessus, Bartok a utilisé le triton comme "déterminant" de deux cadres diamétralement opposés.

Sur le type mineur augmenté

Reprenons, tout en le complétant, l'extrait du livre de Henry Barraud cité ci–dessus.

[La note sensible est la dernière note de l'échelle, celle qui correspond au septième degré. Donc, en do majeur, c'est le si. Elle est douée d'une affection particulière pour la note qui lui est le plus proche, l'octave de la tonique, dont un demi-ton seulement la sépare. Ce demi-ton est pour elle une souffrance. Elle veut absolument le résorber, et toute la musique classique est saturée de cette nostalgie.]

"Elle l'est au point de n'avoir pu se résoudre à la perdre dans ses tonalités mineures. D'où cette pratique, contraire à toute logique et à tout respect de la loi naturelle, de monter, dans le ton de la mineur, le sol en sol dièse. Ce qui place le septième degré à la petite distance désirée de l'octave du premier."

À ce phénomène, “*contraire à toute logique et à tout respect de la loi naturelle*,” il y a aussi une possible “explication” mathématique. Nous allons voir en effet que modifier le cadre tonal occidental classique en substituant à la tonique la note située un demi–ton au dessus présente un avantage considérable. C’est ce que montre la proposition suivante, dont nous omettons la démonstration.

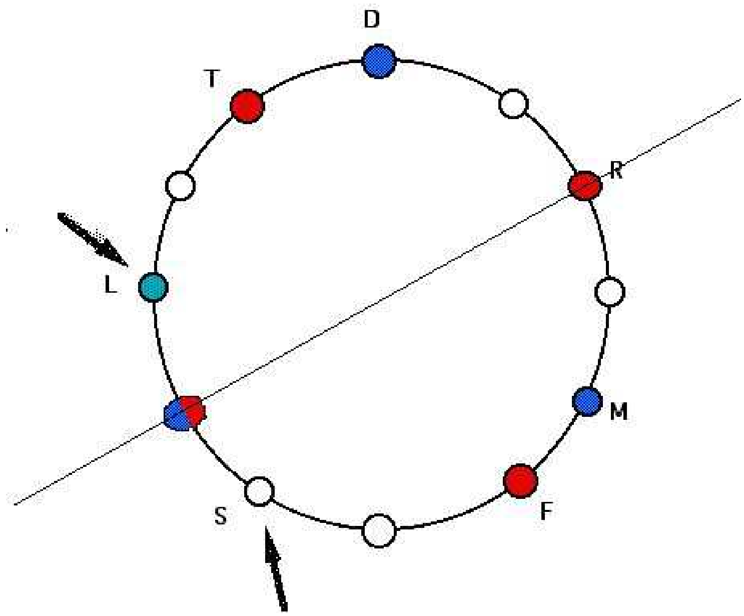
Proposition.
(1) Il existe un unique type tonal tel que, pour tout cadre tonal $\mathcal{S}$ de ce type,
(a) *$\mathcal{S}$ a 6 éléments,*
(b) *$\mathcal{S}$ est l’union d’un élément de type $\mathcal{L}_3$ et d’un élément de type $\mathcal{L}_4$.*
On a par exemple

$$\mathcal{S} = \{T, D, R, M, F, Sd\}\,.$$

(2) Il existe exactement 6 types tonals différents tels que, pour tout cadre tonal $\mathcal{T}$ de l’un de ces types,
(a) *$\mathcal{T}$ a 7 éléments,*
(b) *$\mathcal{T}$ contient un cadre tonal équivalent à $\mathcal{S}$.*
Seuls deux de ces cadres tonals sont voisins d’un cadre de type occidental. Ce sont
- $\{T, D, R, M, F, Sd, \mathbf{L}\}$,
- $\{T, D, R, M, F, \mathbf{S}, Sd\}$.

Le premier est le cadre tonal mineur augmenté.

Sur le dessin suivant figure le cadre $\mathcal{S}$ (qui possède un axe de symétrie sur le cercle dodécaphonique). On y a de plus indiqué par deux flèches chacune des deux notes qu’il convient de lui adjoindre pour obtenir l’un ou l’autre des deux cadres tonals à 7 notes décrits dans l’énoncé ci–dessus.

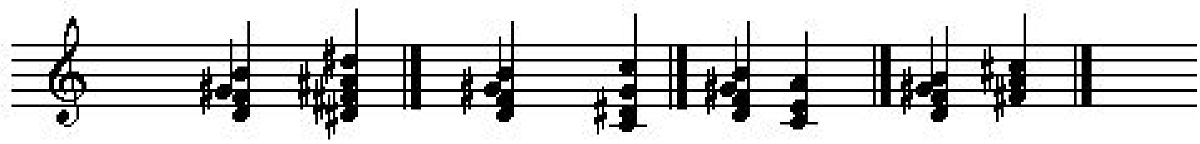


Remarques.

1. Le type du dernier des cadres tonals cités dans la proposition ci–dessus a été parfois utilisé en musique. De notre point de vue (limité !) il pourrait y jouer un rôle analogue à celui du type mineur augmenté.

2. L’ensemble $\{T, R, F, Sd\}$ (de type $\mathcal{L}_4$) est contenu dans quatre cadres mineurs augmentés : ceux correspondant aux gammes mineures augmentées de LA, DO, RÉ DIÈSE, FA DIÈSE.

Cet ensemble a été souvent utilisé pour transposer d’un cadre mineur augmenté $\mathcal{A}$ à l’un des trois autres $\mathcal{A}+3$, $\mathcal{A}+6$, $\mathcal{A}+9$.



La portée ci–dessus montre les quatres "résolutions" de l'accord de septième diminuée $\mathcal{L}_4$ en les accords mineurs augmentés qui le contiennent.

Le fait qu'un accord de type $\mathcal{L}_4$ soit contenu dans quatre cadres tonals mineurs augmentés peut être utilisé en musique à d'autres fins que la transposition. Voici ce qui est écrit dans l'*Encyclopedia Universalis* au sujet de cet accord de septième diminuée.

" Dans les enchaînements auxquels il donne lieu, il peut déboucher à volonté sur des tonalités différentes. Et, pour la même raison, s'il est employé isolément, s'il est pris comme un absolu, il est chargé d'une équivoque, d'une espèce d'inconfort ou d'inquiétude qui le désigne tout naturellement pour tous les effets mystérieux, fantastiques. C'est pourquoi le théâtre lyrique en fournit de si nombreux exemples. C'est cet accord que l'on entend lorsque la statue du Commandeur s'encadre dans la porte de Don Juan. "

Conclusion

On a compris les avantages que fournit ce que nous avons appelé le type tonal occidental : il est est *le seul*, de tous les types tonals possibles, à être à la fois adapté à la transposition et "raisonnablement distribué" sur le cercle dodécaphonique.

Mettons en garde le lecteur trop prompt à s'enthousiasmer pour ce point de vue et tenté d'en déduire que la facilité de transposition du cadre tonal occidental "explique" son usage dans la musique. En effet, il semble que ce cadre tonal soit apparu bien avant l'idée et la pratique de la transposition... Peut–être, à l'inverse, l'usage de ce cadre a–t–il permis le développement des techniques de transposition, propre, semble–t–il, à la musique occidentale ?

Revenons en conclusion sur cette adaptation à la transposition.

• Un cadre tonal occidental a 12 transposés — donc permet le plus grand nombre possible de transpositions.

• On peut passer d'un cadre tonal occidental à n'importe lequel de ses douze transposés par une succession de passages "en douceur" à des cadres occidentaux voisins (obtenus par rotation de 5 ou de 7 sur le cercle dodécaphonique).

• On peut également passer au cadre tonal mineur augmenté associé (qui en est aussi voisin),

• et ensuite utiliser les capacités de transposition du type mineur augmenté — singulièrement celles passant par un cadre de type $\mathcal{L}_4$: elles permettent de passer d'un cadre mineur augmenté $\mathcal{U}$ aux trois autres cadres $\mathcal{U} + 3k$ $(k = 1, 2, 3)$.

• On peut ensuite revenir au cadre occidental associé au dernier cadre mineur augmenté utilisé, etc.

L'approche exposée dans le présent article suggère des généralisations évidentes — dont nous nous gardons de juger l'intérêt musical...

On peut ainsi décider de ne pas admettre la "naturalité" de la partition de l'octave en *douze* parties égales, et convenir de partager l'octave en un nombre plus grand d'intervalles égaux — de sorte à augmenter la variété des mélodies et accords possibles.

On peut par exemple partager l'octave en 18 intervalles égaux.

Notons $\mathcal{D}_{18}$ le cercle des notes correspondant, sur lequel opère le groupe des rotations C_{18} (groupe des entiers modulo 18).

Le choix de 18 présente plusieurs avantages :

- 18 n'est pas trop grand (1/18 ème d'octave, soit un rapport de fréquences de $2^{1/18} \simeq 1,04$, est certainement perceptible),
- 18 "ressemble à 12" : il a le même nombre de diviseurs (puisque, de même que $12 = 2^2 \times 3$, on a $18 = 3^2 \times 2$).

Ainsi, on définit des types à transposition limités $\mathcal{L}_d$ pour $d = 1, 2, 3, 6, 9$ analogues à ceux définis dans le cas usuel.

Cependant, parmi les éléments $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 16, 17\}$ du groupe C_{18}, les éléments suivants sont premiers avec 18 :

$$1, 5, 7, 11, 13, 17$$

(noter que $11 = -7$, $13 = -5$ et $17 = -1$). On voit donc qu'il y a ici DEUX paires de tranpositions ((5,13) et (7,11)) jouant le rôle joué par la paire (5,7) dans le cas usuel :

- Notons $\mathbf{c}$ la rotation de 5 et $\mathbf{c}'$ son inverse, la rotation de 13,
- notons $\mathbf{s}$ la rotation de 7 et $\mathbf{c}'$ son inverse, la rotation de 11.

La notion de "type tonal adapté à la transposition" se dédouble : il y a les types tonals "adaptés à $\mathbf{c}$" (correspondant aux cadres tonals voisins de leur transposé de 5), et les types tonals "adaptés à $\mathbf{s}$" (correspondant aux cadres tonals voisins de leur transposé de 7).

Le théorème d'existence et d'unicité, et ses conséquences, s'appliquent à chacune des catégories précédentes de types tonals, mettant ainsi en évidence DEUX type tonals "occidentaux"...

Énonçons un résultat précis pour les types adaptés à $\mathbf{c}$.

Théorème. *Il existe un cadre tonal $\mathcal{C}$, unique à transpositions près (donc définissant un unique type tonal), tel que*

(1) *$\mathcal{C}$ est voisin de $\mathbf{c}(\mathcal{C})$,*
(2) *$\mathcal{C}$ contient un triton (cadre de type $\mathcal{L}_2$, constitué de deux notes diamétralement opposées sur $\mathcal{D}_{18}$),*
(3) *$\mathcal{C}$ ne contient pas trois notes consécutives sur $\mathcal{D}_{18}$.*

Un tel cadre $\mathcal{C}$ a alors 10 éléments, et il est déterminé à partir d'une note N par l'égalité

$$\mathcal{C} = \{N, \mathbf{c}(N), \mathbf{c}^2(N), \ldots, \mathbf{c}^9(N)\}\,.$$

Comme la suite des 9 premiers multiples de 5 dans C_{18} est $(5, 10, 15, 2, 7, 12, 17, 4, 9)$, la suite des notes de $\mathcal{C}$, écrite à partir de N dans l'ordre des aiguilles d'une montre, est

$$(N, N+2, N+4, N+5, N+7, N+9, N+10, N+12, N+15, N+17)\,.$$

Pour le cas de types adaptés à $\mathbf{s}$, on obtient un cadre tonal $\mathcal{S}$ (unique à transposition près), possédant les propriétés analogues à celles énoncées dans le théorème ci–dessus, et dont la description dans l'ordre des aiguilles d'une montre est

$$(N, N+2, N+3, N+6, N+7, N+9, N+10, N+13, N+14, N+17)\,.$$

Nous laissons au lecteur la curiosité de poursuivre l'investigation vers une partie des règles de cette "nouvelle harmonie".

Institut Henri–Poincaré, 11 rue Pierre et Marie Curie, F–75231 Paris Cédex 05, France, et Institut de Mathématiques de Jussieu–Chevaleret (CNRS UMR 7586), Université Paris 7, Case 7012, 2 Place Jussieu F–75251 Paris Cédex 05, France

E-mail address: broue@ihp.jussieu.fr

URL: http://www.math.jussieu.fr/~broue