La percolation

Après avoir introduit les principales notions permettant la compréhension des processus de percolation et la notion de probabilité critique, nous étudierons le processus de percolation par lien de Bernouilli sur différents types de graphes. D'abord sur les arbres (infinis), nous verrons que le processus de percolation dépend ici de la géométrie de l'arbre ; puis sur les réseaux cubiques en dimension d, pour lesquels nous montrerons que la probabilité critique n'est pas triviale (*i.e.* différente de 0 ou 1).

Une introduction assez complète et accessible à la percolation peut être trouvée dans [1].

1 Généralités

1.1 La percolation par liens

Soit $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ un graphe, dont V est l'ensemble des sommets, et E l'ensemble des arêtes. Soit $\Omega = \{0,1\}^{\mathrm{E}}$. Soit $\omega \in \Omega$. On dit qu'une arête $e \in \mathrm{E}$ est *ouverte* si $\omega(e) = 1$, et qu'elle est *fermée* si $\omega(e) = 0$.

Soit, pour $e \in \mathrm{E}$, μ_e une mesure de probabilité sur $\{0,1\}$. Pour chaque $e \in \mathrm{E}$, soit alors $p_e \in [0,1]$ tel que $\mu_e(1) = p_e$, et $\mu_e(0) = 1 - p_e$.

On définit alors une mesure de probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{F})$, où $\mathcal{F}$ est la tribu engendrée par les cylindres, c'est-à-dire les ensembles de la forme $\{\omega \in \Omega,\ \omega(e_1) = x_1, ..., \omega(e_m) = x_m\}$ où les x_i sont à valeurs dans $\{0,1\}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\mathrm{P} := \prod_{e \in \mathrm{E}} \mu_e.$$

On ne considèrera ici que le processus de percolation de Bernouilli de paramètre p, où tous les $p_e,\ e \in \mathrm{E}$, sont égaux à $p \in [0,1]$ un réel fixé. On note alors la mesure de probabilité obtenue : $\mathrm{P}_p := \mathrm{P}$.

Une *configuration* $\omega \in \Omega$ est identifiée au sous graphe $\mathrm{G}(\omega)$ de G, défini par :

$$\mathrm{G}(\omega) = (\mathrm{V}, \mathrm{E}(\omega)),$$

$$\mathrm{E}(\omega) = \{e \in \mathrm{E},\ \omega(e) = 1\}.$$

Un chemin sur G est dit *ouvert* si toutes les arêtes qu'il emprunte sont ouvertes. Si $x, y \in \mathrm{V}$, on note $x \leftrightarrow y$ l'événement : “il existe un chemin ouvert reliant x à y”. On définit alors, pour $x \in \mathrm{V}$, le plus grand sous graphe ouvert connexe contenant x :

$$\mathrm{C}(x) := \mathrm{C}(x, \omega) := \{y \in \mathrm{V},\ x \leftrightarrow y\}.$$

On dit qu'il y a *percolation* s'il existe un sommet $x \in \mathrm{V}$ tel que $|\mathrm{C}(x)| = \infty$.

Il est intéressant de connaître les valeurs du paramètre p pour lesquelles il y a ou non percolation. Pour $x \in \mathrm{V}$, $\mathrm{P}_p(|\mathrm{C}(x)| = \infty)$ est clairement une fonction croissante de p. Ceci motive la :

Définition On appelle *probabilité critique* le réel $p_c \in [0, 1]$, défini par :

$$p_c := \sup\{p \in [0, 1],\ \mathrm{P}_p(\exists x \in \mathrm{V}, |\mathrm{C}(x)| = \infty) = 0\}$$

(cette définition est cohérente, car bien sûr $\mathrm{P}_0(\exists x \in \mathrm{V},\ |\mathrm{C}(x)| = \infty) = 0$).

Et cette probabilité critique possède la propriété remarquable suivante : si $p \leq p_c$, alors $\mathrm{P}_p(\exists x \in \mathrm{V}, |\mathrm{C}(x)| = \infty) = 0$, et sinon $\mathrm{P}_p(\exists x \in \mathrm{V}, |\mathrm{C}(x)| = \infty) = 1$. Autrement dit, au dessus de la probabilité critique, il y a percolation (avec une probabilité égale à 1), tandis qu'en dessous la probabilité pour qu'il y ait percolation est nulle. Ceci est exprimé par le :

Lemme 1.1 *Dans le processus de percolation par lien sur un graphe connexeinfini,*

$$\mathrm{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) := \mathrm{P}_p(|\mathrm{C}(0)| = \infty) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{P}_p(\exists v \in \mathrm{V},\ |\mathrm{C}(v)| = \infty) = 0$$

et, dans le cas contraire, $\mathrm{P}_p(\exists v \in \mathrm{V},\ |\mathrm{C}(v)| = \infty) = 1$.

Démonstration Supposons $p \neq 0$ (le lemme est vérifié si $p = 0$).
Alors $\{0 \leftrightarrow \infty\} \subset \{\exists v \in \mathrm{V},\ |\mathrm{C}(v)| = \infty\}$, donc en passant aux probabilités, on obtient : $\mathrm{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) \leqslant \mathrm{P}_p(\exists v \in \mathrm{V},\ |\mathrm{C}(v)| = \infty)$, d'où une des deux implications.

Réciproquement, si $\mathrm{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) = 0$, soit v un sommet du graphe vérifiant $\mathrm{P}_p(v \leftrightarrow \infty) \neq 0$.

Alors $$\mathrm{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) \geqslant \mathrm{P}_p(v \leftrightarrow \infty)p^l > 0$$

ce qui contredit l'hypothèse (l est la longueur d'un chemin reliant 0 et v, ouvert avec la probabilité p^l). Donc $\forall v \in \mathrm{V},\ \mathrm{P}_p(v \leftrightarrow \infty) = 0$, et

$$\mathrm{P}_p(\exists v \in \mathrm{V},\ |\mathrm{C}(v)| = \infty) = \mathrm{P}_p(\bigcup_{v \in \mathrm{V}} \{v \leftrightarrow \infty\}) \leqslant \sum_{v \in \mathrm{V}} \mathrm{P}_p(v \leftrightarrow \infty) = 0$$

d'où l'autre implication. (On se place dans le cas V dénombrable, ce qui est le cas dès que le nombre d'arête incidentes est dénombrable en chaque sommet du graphe).

Le fait que $\mathrm{P}_p(\exists v \in \mathrm{V},\ |\mathrm{C}(v)| = \infty) \in \{0, 1\}$ découle immédiatement de la loi du $0-1$: l'existence d'une composante connexe infinie ouverte ne dépend pas de l'état (ouvert ou fermé) d'un ensemble fini d'arête, quel qu'il soit. Autrement dit, quelles que soient les arêtes $e_1, \ldots, e_n$, l'événement $\{\exists v \in \mathrm{V},\ |\mathrm{C}(v)| = \infty\}$ est indépendant de l'état de ces arêtes $e_1, \ldots, e_n$ considérées.

Or la loi du $0 - 1$ de Kolmogorov assure qu'un tel événement est alors indépendant de lui-même (en effet il appartient à la tribu engendrée par les variables aléatoire qui décrivent l'état des arêtes, celle-ci décrivant l'ensemble de notre système. Étant indépendant de toutes ces variables, il est indépendant de tout événement de la tribu engendrée, donc de lui-même).

Et un événement A indépendant de lui-même ne peut être que de probabilité 0 ou 1, puisqu'il vérifie $\mathrm{P}_p(\mathrm{A} \cap \mathrm{A}) = \mathrm{P}_p(\mathrm{A}) \cdot \mathrm{P}_p(\mathrm{A})$, c'est-à-dire $\mathrm{P}_p(\mathrm{A}) =$

$\mathrm{P}_p(\mathrm{A})^2$. (Pour une démonstration plus rigoureuse de la loi du $0-1$ de Kolmogorov, se reporter à [2]).

$\square$

1.2 La percolation par sites

Dans le processus de percolation par sites, on déclare "ouverts" où "fermés" les sommets d'un graphe $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ plutôt que ses arêtes, comme c'était le cas dans le processus de percolation par liens.

Un chemin est dit *ouvert* si tous les sommets qu'il emprunte sont ouverts, on note encore, pour $x \in \mathrm{V}$, $\mathrm{C}(x)$ le sous ensemble de V constitué des éléments de V pouvant être reliés à x par des chemins ouverts. Soit, pour tout $x \in \mathrm{V}$, μ_x une mesure de probabilité sur $\{0,1\}$. On définit une mesure de probabilité P_p^{site} sur $\{0,1\}$ comme le produit :

$$\mathrm{P}_p^{site} := \prod_{x \in \mathrm{V}} \mu_x.$$

On pose de façon analogue : $\quad p_c^{site} = \sup\{p,\ \theta^{site}(p) = 0\}$

N.B. Tout processus de percolation par lien peut être ramené à un processus de percolation par site.

Soit en effet $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ un graphe, $\{\mu_e\}_{e \in \mathrm{E}}$ des mesures de probabilité sur $\{0,1\}$. On construit alors le graphe $\mathrm{G}' = (\mathrm{V}', \mathrm{E}')$, où :

- $\mathrm{V}' = \mathrm{E}$
- $\mathrm{E}' = \{(xy),\ (x;y) \in \mathrm{E}^2,\ x \neq y,\ x$ et y ont une extrémité commune$\}$

A un chemin ouvert d'arêtes dans G correspond un chemin ouvert de sommets dans G', et un processus de percolation par lien sur G induit canoniquement un processus de percolation par sites sur G'.

La réciproque est fausse : par exemple, on peut voir qu'un processus de percolation par site sur $\mathbb{L}^2$ ne peut pas être étudié comme un processus de percolation par lien sur un autre graphe.

Notons également que les probabilités critiques des processus de percolation par lien et par site, sur un graphe donné, sont reliée par la relation :

Théorème 1.2 *Soit* $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ *un graphe connexe infini d'origine* 0*, de degré maximal* $\Delta < \infty$ *(i.e. chaque sommet est relié à au plus* Δ *autres sommets). Alors*

$$\frac{1}{\Delta - 1} \leqslant p_c^{lien} \leqslant p_c^{site} \leqslant 1 - (1 - p_c^{lien})^{\Delta}.$$

1.3 Exemples d'application

Supposons qu'on ait un mélange homogène de deux matériaux sous forme de poudre, l'un étant conducteur et pas l'autre. La probabilité que le courant puisse passer d'un grain à son voisin sera manifestement une fonction croissante de la proportion du matériau conducteur. Le processus de percolation est dans ce cas un modèle qui nous permettra de dire si le mélange est ou non conducteur.

De nombreuses autres situations physiques peuvent être modélisées par des processus de percolation. Citons par exemple le ferromagnétisme, des écoulements de liquides dans des matériaux poreux, la propagation du feu dans une forêt...

2 Les arbres

2.1 Préliminaires sur les arbres

Définition On appelle *arbre* tout graphe connexe sans cycle. On ne considèrera ici que des arbres localement finis, c'est-à-dire que pour tout sommet v du graphe, le nombre d'arêtes issues de v est fini. On appelle ce nombre le *degré* de v, on le note $deg(v)$. Cependant, $deg(v)$ ne sera pas nécessairement une fonction bornée de v.

Dans toute la suite, $\mathrm{T} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ désignera un tel arbre, dont l'origine sera notée 0. On cherche à mesurer la "taille" d'un arbre. L'un des critères les plus naturels à considérer est le taux de croissance :
Notation On utilisera l'abréviation "SAW" pour désigner un chemin qui ne se coupe pas (qui ne passe pas deux fois sur le même sommet).

Dans un arbre, tout chemin passant une seule fois par chacune de ses arêtes est un SAW : sinon il définirait un cycle, ce qui contredit la définition d'un arbre.
Définition Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{S}_n = \{v \in \mathrm{V},\ |v| = n\}$ (où $|v|$ désigne le nombre d'arêtes parcourues par l'unique SAW reliant l'origine à v). S_n est l'ensemble des descendants de la $n^{\text{ième}}$ génération (on dit que l'origine est de la génération 0).
N.B. S_n est fini pour tout n, puisque l'on s'est restreint à des arbres localement finis. En particuliers, notre arbre possède un nombre au plus dénombrable de sommets.
Définition Soit $\underline{gr}(\mathrm{T}) := \liminf |\mathrm{S}_n|^{\frac{1}{n}}$ le *taux de croissance inférieur* de T, et $\overline{gr}(\mathrm{T}) := \limsup |\mathrm{S}_n|^{\frac{1}{n}}$ le *taux de croissance supérieur* de T.

Si $\underline{gr}(\mathrm{T}) = \overline{gr}(\mathrm{T})$, on parle simplement du *taux de croissance* de T, et on le note $gr(\mathrm{T})$.
Exemple Pour l'arbre k-aire (chaque sommet a k fils, $k \geqslant 1$), on a $|\mathrm{S}_n| = k^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc

$$\underline{gr}(\mathrm{T}) = \overline{gr}(\mathrm{T}) = gr(\mathrm{T}) = k.$$

2.2 Le nombre de branchement

Des intuitions physiques...

Ecoulement d'eau : Voyons les arêtes de l'arbre T comme des tuyaux véhiculant de l'eau. Soit $\lambda \geqslant 1$. On suppose qu'à une distance n de la racine, le débit maximal accepté par un tuyau est λ^{-n}.

Supposons par exemple que T soit l'arbre k-aire T_k.

Si $\lambda \leqslant k$, on introduit un débit d'eau $\frac{k}{\lambda}$ à l'origine, cette eau se sépare dans chacun des k tuyaux, dans lesquels circule un débit $\frac{1}{\lambda}$. La première génération étant passée, chaque débit $\frac{1}{\lambda}$ se divise en k : $\frac{1}{k\lambda} \leqslant \frac{1}{\lambda^2}$, et ainsi de suite. Il peut y avoir un écoulement d'eau de 0 à l'infini.

Par contre, si $\lambda > k$, le débit total d'eau pouvant passer dans l'ensemble des tuyaux de S_n est $k^n \times \frac{1}{\lambda^n} = \left(\frac{k}{\lambda}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Il ne peut donc pas y avoir écoulement d'eau.

Courant électrique : Supposons maintenant que les arêtes à distance n de l'origine soient des fils électriques de conductance λ^{-n}. Si λ est trop grand, la conductance entre l'origine et l'infini est nulle ; elle ne l'est pas si λ est suffisamment petit.

Pour l'arbre T_k par exemple, la résistance entre l'origine et l'infini est :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{k}\right)^n,$$

qui est finie si $\lambda < k$, et infinie si $\lambda \geqslant k$.

Définition Soit $\mathrm{T} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ un arbre. On appelle *cutset* de T tout sous ensemble Π de E tel que tout SAW reliant l'origine à l'infini passe par une unique arête de Π.

Définition On appelle *nombre de branchement* de T, et on note $br(\mathrm{T})$, la quantité :

$$br(\mathrm{T}) \ := \ \sup\{\lambda, \ \inf_{\substack{\Pi \subset \mathrm{E} \\ \Pi \ cutset}} \textstyle\sum_{v \in \Pi} \lambda^{-|v|} > 0\} \tag{1}$$

Dans les modèles physiques présentés précédemment, le nombre de branchement est donc la borne sup des nombres λ tels que, respectivement, il peut y avoir écoulement d'eau à travers des tuyaux de capacités $\lambda^{-|v|}$, ou que la conductance entre 0 et ∞ du réseau électrique avec des fils de conductance $\lambda^{-|v|}$ est nulle.

Définition On appelle *débit* toute fonction $\varphi \ : \ \mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant la loi des nœuds :

$$\forall u \in \mathrm{V}, \ \forall v \text{ fils de } u, \quad \varphi(uv) = \sum_{\substack{w \in \mathrm{V} \\ w \text{ fils de } v}} \varphi(vw)$$

On étend le domaine de définition de φ aux sommets de T :

$$\forall \ v \in \mathrm{V}\backslash\{0\}, \ \varphi(v) := \varphi(uv), \text{ où } u \text{ est le père de } v$$
$$\text{et} \quad ||\varphi|| := \varphi(0) := \sum_{\substack{v \in \mathrm{V} \\ v \text{ fils de } 0}} \varphi(v).$$

$||\varphi||$ est appelé débit total. Quand $||\varphi|| = 1$, on parle de débit unitaire.

Les définitions du nombre de branchement en termes d'écoulement d'eau ou de conductance entre l'origine et l'infini ne sont alors que des reformulations du fait :

$$br(\mathrm{T}) = \sup\{\lambda, \text{ il existe un débit } \varphi \neq 0, \ \forall \ v \in \mathrm{V}, \ \varphi(v) \leqslant \lambda^{-|v|}\}$$

qui est lui même une conséquence immédiate de l'égalité :

$$\sup\{||\varphi||, \ \varphi(v) \leqslant \lambda^{-|v|}, \ \forall \ v\} = \inf_{\Pi \text{ cutset}} \sum_{v \in \Pi} \lambda^{-|v|}$$

Exemple On a vu que pour l'arbre k-aire T_k, $br(\mathrm{T}_k) = k$. On a donc ici l'égalité $br(\mathrm{T}_k) = gr(\mathrm{T}_k)$. Cette égalité est fausse dans le cas général. Pour voir ceci, considérons par exemple l'arbre 3-1 ainsi défini :

– l'origine a deux fils.
– pour $n \geqslant 1,\ \mathrm{S}_n = \{v_1^n, ..., v_{2^n}^n\}$ (les sommets sont numérotés de gauche à droite).
– pour $n \geqslant 1,\ 1 \leqslant k \leqslant 2^{n-1}$, v_k^n a un seul fils.
– pour $n \geqslant 1,\ 2^{n-1} < k \leqslant 2^n$, v_k^n a trois fils.

On a alors clairement :
– $gr(\mathrm{T}) = 2$
– $br(\mathrm{T}) = 1$ (considérer par exemple un écoulement d'eau à travers T)

2.3 Probabilité critique

Dans un processus de percolation de Bernouilli sur un arbre T, on peut relier la probabilité critique à la géométrie de l'arbre. Elle est en effet donnée par la relation :

Théorème 2.1 $$p_c(\mathrm{T}) = \frac{1}{br(\mathrm{T})}$$

preuve de $\boldsymbol{p_c(\mathrm{T}) \geqslant \frac{1}{br(\mathrm{T})}}$: Ceci repose sur la méthode dite du premier moment, qui affirme que pour tout cutset Π, on a

$$\{0 \leftrightarrow \infty\} \subset \{\exists v \in \Pi,\ 0 \leftrightarrow v\} = \bigcup_{v\in\Pi} \{0 \leftrightarrow v\}$$

et donc
$$\begin{aligned} \mathrm{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) &\leqslant \mathrm{P}_p\left(\bigcup_{v\in\Pi} \{0 \leftrightarrow v\}\right) \\ &\leqslant \sum_{v\in\Pi} \mathrm{P}_p\,(0 \leftrightarrow v) \end{aligned}$$

Ici, on a donc $$\mathrm{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) \leqslant \textstyle\sum_{v\in\Pi} p^{|v|}$$

Soit donc $p < \frac{1}{br(\mathrm{T})}$. Alors

$$p < \frac{1}{\sup\left\{\lambda \geqslant 1,\ \inf\limits_{\substack{\Pi\subset \mathrm{E} \\ \Pi \text{ cutset}}} \sum\limits_{v\in\Pi} \lambda^{-|v|} > 0\right\}} = \inf\left\{\frac{1}{\lambda},\ \lambda \geqslant 1,\ \inf_{\substack{\Pi\subset \mathrm{E} \\ \Pi \text{ cutset}}} \sum_{v\in\Pi} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{|v|} > 0\right\}$$

donc $\inf\limits_{\substack{\Pi\subset \mathrm{E} \\ \Pi \text{ cutset}}} \sum\limits_{v\in\Pi} p^{|v|} = 0$, et, par le premier moment, $\mathrm{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) = 0$, ce qui implique d'après le lemme 1.1 que $p \leqslant p_c(\mathrm{T})$. Et donc on a bien

$$p_c(\mathrm{T}) \geqslant \frac{1}{br(\mathrm{T})}$$

Définition On appelle *bord* de T, et on note $\partial\mathrm{T}$, l'ensemble défini par :

$$\partial\mathrm{T} = \left\{ \begin{array}{ll} \{v \in \mathrm{V},\ v \text{ n'a pas de fils}\} & \text{si T est fini} \\ \{\text{SAWs infinis issus de } 0\} & \text{si T est infini} \end{array} \right.$$

Pour $u, v \in \mathrm{T} \cup \partial\mathrm{T}$, on note $u \wedge v$ le sommet de T où les chemins reliant l'origine respectivement à u et v, se séparent ($u \wedge v \in \mathrm{T}$, sauf dans le cas T infini et $u = v \in \partial\mathrm{T}$, auquel cas $u \wedge u = u \in \partial\mathrm{T}$).
Si T est infini, si $x \in \mathrm{V}$ et $\xi \in \partial\mathrm{T}$, on note "$x \in \xi$" l'évènement "$\xi$ passe par x".
N.B. Un débit unitaire φ sur un arbre T supposé infini induit une mesure de probabilité μ sur l'espace $(\partial\mathrm{T}, \mathcal{F})$, où $\mathcal{F}$ est la tribu engendrée par les cylindres $\{\xi \in \partial\mathrm{T},\ v \in \xi\}_{v \in \mathrm{V}}$, où μ est donnée par :

$$\mu(\{\xi \in \partial\mathrm{T},\ v \in \xi\}) := \varphi(v).$$

Lemme 2.2 *Soit* $\mathrm{T} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ *un arbre (fini ou non) sur lequel on effectue un processus de percolation de Bernouilli de paramètre p. Soit* K *la fonction définie par :*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{K}: & \partial\mathrm{T} \times \partial\mathrm{T} & \to & [1, +\infty] \\ & (x, y) & \to & \frac{1}{\mathrm{P}_p(0 \leftrightarrow x \wedge y)} \end{array}$$

alors

$$\mathrm{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\mathrm{T}) \geqslant \mathrm{C}ap_{\mathrm{K}}(\partial\mathrm{T})$$

où $\mathrm{C}ap_{\mathrm{K}}(\partial\mathrm{T}) := \sup\limits_{\mu,\ \mu(\partial\mathrm{T})=1} \frac{1}{\mathcal{E}_{\mathrm{K}}(\mu)}$ est la *capacité* de $\partial\mathrm{T}$ à travers le *noyau* K,
et $\mathcal{E}_{\mathrm{K}}(\mu) = \iint\limits_{x,y \in \partial\mathrm{T}} \mathrm{K}(x, y)\, d\mu(x)\, d\mu(y)$ est *l'énergie* de la mesure μ à travers le noyau K.

preuve du lemme Supposons d'abord T fini. Soit μ une mesure de probabilité sur $\partial\mathrm{T}$, et

$$\mathrm{Y} = \sum_{x \in \partial\mathrm{T}} \mu(x) \frac{\mathbf{1}_{0 \leftrightarrow x}}{\mathrm{P}_p(0 \leftrightarrow x)}$$

On a d'une part $\mathrm{E}[\mathrm{Y}] = \sum_{x \in \partial\mathrm{T}} \mu(x) = 1$ (E désigne l'espérance)

$$\begin{aligned} \text{et} \quad \mathrm{E}\left[\mathrm{Y}^2\right] &= \mathrm{E}\left[\sum_{x \in \partial\mathrm{T}} \sum_{y \in \partial\mathrm{T}} \mu(x)\mu(y) \frac{\mathbf{1}_{\{0 \leftrightarrow x\} \cap \{0 \leftrightarrow y\}}}{\mathrm{P}_p(0 \leftrightarrow x)\mathrm{P}_p(0 \leftrightarrow y)} \right] \\ &= \sum_{x \in \partial\mathrm{T}} \sum_{y \in \partial\mathrm{T}} \mu(x)\mu(y) \frac{\mathrm{P}_p(\{0 \leftrightarrow x\} \cap \{0 \leftrightarrow y\})}{\mathrm{P}_p(0 \leftrightarrow x)\mathrm{P}_p(0 \leftrightarrow y)} \\ &= \sum_{x \in \partial\mathrm{T}} \sum_{y \in \partial\mathrm{T}} \mu(x)\mu(y) \frac{1}{\mathrm{P}_p(0 \leftrightarrow x \wedge y)} \\ &= \mathcal{E}_{\mathrm{K}}(\mu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et d'autre part} \quad \mathrm{E}[\mathrm{Y}]^2 &= \mathrm{E}\left[\mathrm{Y} \times \mathbf{1}_{\mathrm{Y}>0}\right]^2 \\ &\leqslant \mathrm{E}\left[\mathrm{Y}^2\right] \mathrm{P}_p(\mathrm{Y} > 0) \text{ (Cauchy-Schwarz)} \end{aligned}$$

et donc $$\mathrm{P}_p(\mathrm{Y}>0) \geqslant \frac{1}{\mathcal{E}_{\mathrm{K}}(\mu)}$$

Mais $\{\mathrm{Y}>0\} \subset \{\exists x \in \partial\mathrm{T},\ 0 \leftrightarrow x\} = \{0 \leftrightarrow \partial\mathrm{T}\}$, et donc pour toute mesure μ, on a $\mathrm{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\mathrm{T}) \geqslant \frac{1}{\mathcal{E}_{\mathrm{K}}(\mu)}$; d'où

$$\mathrm{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\mathrm{T}) \geqslant \mathrm{C}ap_{\mathrm{K}}(\partial\mathrm{T})$$

Supposons maintenant T infini, et soit μ une mesure de probabilité sur $(\partial\mathrm{T}, \mathcal{F})$. μ induit une mesure de probabilité sur $\mathrm{T}_n := \{x \in \mathrm{V},\ |x| = n\}$ (pour $n \in \mathbb{N}$), définie par :

$$\mu(x) := \mu(\{\xi \in \partial\mathrm{T},\ x \in \xi\})$$

Grâce au cas fini, on a $$\mathrm{P}_p(0 \leftrightarrow \mathrm{T}_n) \geqslant \frac{1}{\sum\limits_{x,y\in\mathrm{T}_n} \mu(x)\mu(y)\mathrm{K}(x,y)} \tag{2}$$

Mais si $\xi, \eta \in \partial\mathrm{T}$, si $x \in \xi,\ y \in \eta,\ x \wedge y$ est un ancêtre (au sens large) de $\xi \wedge \eta$, donc $\mathrm{P}_p(0 \leftrightarrow x \wedge y) \geqslant \mathrm{P}_p(0 \leftrightarrow \xi \wedge \eta)$, c'est à dire $\mathrm{K}(x,y) \leqslant \mathrm{K}(\xi,\eta)$. Donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\mathrm{K}}(\mu) &= \int_{\partial\mathrm{T}} \int_{\partial\mathrm{T}} \mathrm{K}(\xi,\eta)\, d\mu(\xi)\, d\mu(\eta) \\
&= \sum_{x,y\in\mathrm{T}_n} \int_{\substack{\xi \\ x\in\xi}} \int_{\substack{\eta \\ y\in\eta}} \mathrm{K}(\xi,\eta)\, d\mu(\xi)\, d\mu(\eta) \\
&\geqslant \sum_{x,y\in\mathrm{T}_n} \int_{\substack{\xi \\ x\in\xi}} \int_{\substack{\eta \\ y\in\eta}} \mathrm{K}(x,y)\, d\mu(\xi)\, d\mu(\eta) \\
&\geqslant \sum_{x,y\in\mathrm{T}_n} \mu(x)\mu(y)\mathrm{K}(x,y) \\
&\geqslant \frac{1}{\mathrm{P}_p(0 \leftrightarrow \mathrm{T}_n)} \qquad \text{d'après (2)}
\end{aligned}$$

On optimise en μ : $\quad \forall n \geqslant 0,\ \mathrm{P}_p(0 \leftrightarrow \mathrm{T}_n) \geqslant \mathrm{C}ap_{\mathrm{K}}(\partial\mathrm{T})$,

En passant à la limite quand $n \to \infty$, $\mathrm{P}_p(0 \leftrightarrow \mathrm{T}_n)$ décroît vers $\mathrm{P}_p\,(0 \leftrightarrow \partial\mathrm{T})$ et

$$\mathrm{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\mathrm{T}) \geqslant \mathrm{C}ap_{\mathrm{K}}(\partial\mathrm{T})$$ □

preuve de $\boldsymbol{p_c(\mathrm{T}) \leqslant \frac{1}{br(\mathrm{T})}}$: Soit $p > \frac{1}{br(\mathrm{T})}$, et soit λ tel que $\frac{1}{p} < \lambda < \frac{1}{br(\mathrm{T})}$. Il existe donc un débit non nul φ sur T tel que $\forall v \in \mathrm{V},\ \varphi(v) \leqslant \lambda^{-|v|}$

Soit $\mu := \frac{\varphi}{||\varphi||}$. Alors μ est un débit unitaire, que l'on identifie à une mesure de probabilité sur $(\partial\mathrm{T}, \mathcal{F})$.

De plus, on a : $$\forall v \in \mathrm{V},\quad \mu(v) \leqslant \frac{1}{||\varphi||}\lambda^{-|v|} \tag{3}$$

$$\text{Soit K :}\quad \begin{array}{ccc} (\partial\mathrm{T})^2 & \to & [1,+\infty] \\ (\xi,\eta) & \to & \frac{1}{\mathrm{P}_p(0\leftrightarrow\xi\wedge\eta)} = p^{-|\xi\wedge\eta|} \end{array}$$

L'énergie de μ à travers K est alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\mu) &= \int_{\partial \mathrm{T}} \int_{\partial \mathrm{T}} p^{-|\xi \wedge \eta|}\, d\mu(\xi)\, d\mu(\eta) \\
&= \sum_{v \in \mathrm{V}} p^{-|v|} \iint_{v=\xi\wedge\eta} d\mu(\xi)\, d\mu(\eta) \\
&\leqslant \sum_{v \in \mathrm{V}} p^{-|v|} \int_{\{v \in \xi\}} d\mu(\xi) \int_{\{v \in \eta\}} d\mu(\eta) \\
&\leqslant \sum_{v \in \mathrm{V}} p^{-|v|} \mu(v)^2 \\
&\leqslant \frac{1}{||\varphi||} \sum_{v \in \mathrm{V}} (p\lambda)^{-|v|} \mu(v) \qquad \text{d'après (3)} \\
&\leqslant \frac{1}{||\varphi||} \sum_{n=0}^{\infty} (p\lambda)^{-n} \sum_{\substack{v \in \mathrm{V} \\ |v|=n}} \mu(v) \\
&\leqslant \frac{1}{||\varphi||} \sum_{n=0}^{\infty} (p\lambda)^{-n} = \frac{1}{||\varphi||} \frac{1}{1-\frac{1}{p\lambda}} \qquad (\text{ car } p\lambda > 1)
\end{aligned}$$

et donc, d'après le lemme 2.2, $\quad \mathrm{P}_p(0 \leftrightarrow \partial \mathrm{T}) \geqslant \frac{1}{\mathcal{E}_{\mathrm{K}}(\mu)} \geqslant ||\varphi||(1-\frac{1}{p\lambda}) > 0$
On a alors $\mathrm{P}_p(|\mathrm{C}(0)| = \infty) > 0$, et donc $p > p_c(\mathrm{T})$. On a montré

$$p_c(\mathrm{T}) \leqslant \frac{1}{br(\mathrm{T})}$$

3 Percolation de Bernouilli sur des réseaux

En dimension d donnée, on note $\mathbb{L}^d$ le réseaux dont les sommets sont les points de $\mathbb{Z}^d$, c'est-à-dire les points à coordonnées entières, et les arêtes relient chaque sommet à ses plus proches voisins. On note enfin $\mathbb{B}^d$ l'ensemble des arêtes de $\mathbb{L}^d$, et l'origine 0 désigne le point de coordonnées $(0, \ldots, 0)$.

3.1 Existence d'une probabilité critique

Si $d = 1$, on a clairement $\mathrm{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) = 0$ dès que $p < 1$. (Il suffit pour déconnecter 0 et l'infini d'avoir deux arêtes fermées, une de chaque côté de l'origine. Ceci arrive avec une probabilité 1).

Et donc $\qquad \mathbf{pc}(\mathbb{L}^1) = 1$

En dimension supérieure, on a :

Théorème 3.1 *Si $d \geqslant 2$, alors* $\qquad 0 < \mathbf{pc}(\mathbb{L}^d) < 1$

preuve de $\mathbf{0 < pc(\mathbb{L}^d)}$: On va montrer qu'il existe $p > 0$ tel que l'on ait $\mathrm{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) = 0$. Pour celà, on fixe $n > 0$, et on considère le nombre $\sigma(n)$ de SAWs de longueur n partant de l'origine. Soit, parmi les $\sigma(n)$ SAWs de longueur n dont une extrémité est l'origine, $\mathrm{N}(n)$ le nombre (aléatoire) de ceux qui sont ouverts. On a alors, pour tout n :

$$\mathrm{P}_p\left(0 \leftrightarrow \infty\right) \leqslant \mathrm{P}_p(\mathrm{N}(n) \geqslant 1) \leqslant \mathrm{E}_p[\mathrm{N}(n)] = p^n \sigma(n)$$

Or $\sigma\left(n\right) \leq 2d\left(2d-1\right)^{n-1}$: on a $2d$ choix pour la première arête, puis $2d-1$ choix au plus à chaque étape, correspondant aux $2d-1$ voisins du sommet où l'on est et dont on ne provient pas.

d'où $$\mathrm{P}_p\left(0 \leftrightarrow \infty\right) \leqslant \tfrac{2d}{2d-1}(p(2d-1))^n$$

On choisit $0 < p < \frac{1}{2d-1}$, et on fait tendre n vers l'infini : on a bien $\mathrm{P}_p\left(0 \leftrightarrow \infty\right) = 0$, et donc

$$0 < p \leqslant \mathbf{pc}(\mathbb{L}^d)$$

preuve de $\mathbf{pc}(\mathbb{L}^{\boldsymbol{d}}) < \mathbf{1}$: $\mathbb{L}^d$ s'injectant dans $\mathbb{L}^{d+1}$, on a $\mathbf{pc}(\mathbb{L}^{d+1}) \leqslant \mathbf{pc}(\mathbb{L}^d)$. Il suffit donc de montrer $\mathbf{pc}(\mathbb{L}^2) < 1$. Or on a, en dimension 2, la notion de graphe dual :

$$\mathbb{L}^2_d = \left(\mathbb{Z}^2 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),\ \mathbb{B}^2 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right).$$

Chaque arête de $\mathbb{L}^2_d$ coupe une unique arête de $\mathbb{L}^2$.

A un sous graphe ouvert aléatoire $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ de $\mathbb{L}^2$ obtenu par un processus de percolation de Bernouilli de paramètre p, on associe son sous graphe dual dans $\mathbb{L}^2_d$:

$$\mathrm{G}' := \left(\mathbb{Z}^2 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \mathrm{E}'\right)$$

où les arêtes ouvertes de G' (les éléments de E') sont celles de $\mathbb{L}^2_d$ coupant des arêtes fermées de G, et les arêtes fermées de G' sont celles coupant des arêtes ouvertes de G.

La loi de G' est alors la même que celle d'un sous graphe ouvert obtenu par processus de percolation de Bernouilli de paramètre $1-p$ sur $\mathbb{L}^2_d$.

On remarque aussi que la composante connexe ouverte contenant 0 de G est finie si et seulement si il existe un circuit ouvert de G', entourant 0.

Notons, pour un circuit γ de $\mathbb{L}^2_d$, A_γ l'évènement "γ est ouvert". On a alors :

$$\begin{aligned}
1 - \mathrm{P}_p\left(0 \leftrightarrow \infty\right) &= \mathrm{P}_p(0 \not\leftrightarrow \infty) \\
&= \mathrm{P}_p\left(\bigcup_{\substack{\gamma \text{circuit de } \mathbb{L}^2_d \\ \text{entourant } 0}} \mathrm{A}_\gamma\right) \\
&\leqslant \sum_{\substack{\gamma \text{circuit de } \mathbb{L}^2_d \\ \text{entourant } 0}} \mathrm{P}_p\left(\mathrm{A}_\gamma\right)
\end{aligned}$$

Soit $\rho(n)$ le nombre de circuits de longueur n entourant 0. $\rho(n) \leqslant n \times 3^n$ car un tel chemin doit passer par l'un des n sommets $(0,1), ..., (0,n)$, puis on a 3 choix possibles à chaque étape pour continuer le circuit. De plus, pour un circuit γ de longueur n,

$$\mathrm{P}_p(\mathrm{A}_\gamma) = (1-p)^n$$

et donc

$$1 - \mathrm{P}_p\left(0 \leftrightarrow \infty\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n3^n(1-p)^n$$

On choisit $p < 1$ suffisamment grand tel que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n3^n(1-p)^n < 1$$

et on a alors $1 - \mathrm{P}_p\left(0 \leftrightarrow \infty\right) < 1$, soit $\mathrm{P}_p\left(0 \leftrightarrow \infty\right) > 0$, et donc $\mathbf{pc}(\mathbb{L}^2) < 1$.

□

On a ainsi prouvé l'existence de trois phases : $p < p_c,\ p = p_c,\ p > p_c$, en dimension $d \geqslant 2$.

On a de plus, pour $d = 2$, le résultat remarquable suivant : la probabilité critique est égale à $1/2$!

Théorème 3.2 $$\mathbf{pc}(\mathbb{L}^2) = \frac{1}{2}$$

La démonstration de ce résulta est assez complexe, elle met en oeuvre des outils techniques assez lourds, nous ne la ferons donc pas ici.

3.2 Unicité de la composante connexe infinie ouverte pour $p > \mathbf{pc}(\mathbb{L}^d)$

Au delà de la probabilité critique, non seulement il y a une probabilité 1 d'avoir percolation, mais on est presque sûr de n'avoir qu'une seule composante connexe infinie, ce qui est plus fort encore.

Théorème 3.3 *Soit $p > p_c$. Alors*

$$\mathrm{P}_p(\textit{le nombre de composantes connexes infinies ouvertes est } 1) = 1$$

Démonstration Soit N la variable aléatoire qui compte le nombre de composantes connexes infinies ouvertes. Si B est un sous ensemble fini de $\mathbb{Z}^d$, on notera $\mathbb{B}_\mathrm{B}$ l'ensemble des arêtes de $\mathbb{L}^d$ joignant deux sommets de B. On notera $\mathrm{N_B}(0)$ (resp. $\mathrm{N_B}(1)$) le nombre de composantes connexes infinies ouvertes quand toutes les arêtes de $\mathbb{B}_\mathrm{B}$ sont fermées (resp. ouvertes). Soit enfin $\mathrm{M_B}$ le nombre de composantes connexes infinies ouvertes intersectant B.

N est une variable aléatoire entière, invariante par translation. Comme P_p est une mesure produit sur $\{0,1\}^{\mathbb{B}^d}$, la loi du $0 - 1$ nous assure qu'il existe $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tel que $\mathrm{P}_p(\mathrm{N} = k) = 1$.

Supposons par l'absurde que l'on ait $1 < k < \infty$. Si l'on note $\mathrm{S}\,(n)$ l'ensemble des sommets à distance au plus n de l'origine, alors on a nécessairement $\mathrm{P}_p(\mathrm{N}_{\mathrm{S}(n)}(0) = \mathrm{N}_{\mathrm{S}(n)}(1) = k) = 1$ (si on avait par exemple $\mathrm{P}_p(\mathrm{N}_{\mathrm{S}(n)}(0) = k) < 1$, on aurait $\mathrm{P}_p(\mathrm{N} \neq k) \geqslant (\min(p, 1-p))^{|\mathbb{B}_{\mathrm{S}(n)}|}\,\mathrm{P}_p(\mathrm{N}_{\mathrm{S}(n)}(0) \neq k) > 0$, ce qui est absurde).

On en déduit : $\mathrm{P}_p(\mathrm{M}_{\mathrm{S}(n)} \geqslant 2) = 0$. Supposons en effet le contraire. Si $\mathrm{M}_{\mathrm{S}(n)} \geqslant 2$, alors $\mathrm{N}_{\mathrm{S}(n)}(1) < \mathrm{N}_{\mathrm{S}(n)}(0) < \infty$, et donc

$$\mathrm{P}_p(\mathrm{N}_{\mathrm{S}(n)}(1) < \mathrm{N}_{\mathrm{S}(n)}(0) < \infty) > 0\ ,$$

ce qui contredit le fait que $N_{S(n)}(0) = N_{S(n)}(1)$ avec un probabilité 1. Mais bien sûr $P_p(M_{S(n)} \geqslant 2) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} P_p(N \geqslant 2)$, et donc $P_p(\infty > N \geqslant 2) = 0$. Donc $k \in \{0, 1, \infty\}$. On a supposé $p > p_c$, donc $k \neq 0$.

Supposons donc enfin $k = \infty$. On dit que $x \in \mathbb{Z}^d$ est une *trifurcation*, et on note cet événement T_x, si :

- x est dans une composante connexe infinie ouverte.
- il y a exactement trois arêtes ouvertes incidentes à x.
- en fermant les trois arêtes ouvertes incidentes à x, on coupe la composante connexe infinie ouverte de x en trois nouvelles composantes connexes infinies ouvertes.

Si l'on note $M_{S(n)}(0)$ le nombre de composantes connexes infinies rencontrées par la partie S_n lorsque ses arêtes sont toutes fermées, alors $M_{S(n)}(0) \geq M_{S_n}$, et l'on a :

$$P_p(M_{S(n)}(0) \geqslant 3) \geqslant P_p(M_{S(n)} \geqslant 3) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} P_p(N \geqslant 3) = 1$$

Soit donc n tel que $P_p(M_{S(n)}(0) \geqslant 3) \geqslant \frac{1}{2}$. Soit $\omega \in \{M_{S(n)}(0) \geqslant 3\}$, et x, y, z trois sommets de $\partial S(n)$ appartenant à trois composantes connexes infinies ouvertes distinctes de $\mathbb{L}^d \backslash S(n)$.

Soient trois chemins joignant 0 respectivement à x, y et z, ne se coupant qu'en 0, ne rencontrant $\partial S(n)$ que respectivement en x, y et z. Alors

$$\begin{aligned} P_p(\{0 \text{ est une trifurcation}\}) &\geqslant P_p(J_{x,y,z} \mid M_{S(n)}(0) \geqslant 3) P_p(M_{S(n)}(0) \geqslant 3) \\ &\geqslant (\min(p, 1-p))^R \times \frac{1}{2} > 0 \end{aligned}$$

où R est le nombre d'arêtes dans $S(n)$, et $J_{x,y,z}$ l'événement : “toutes les arêtes de $\mathbb{B}_{S(n)}$ sont fermées, excepté celles des trois chemins ouverts joignant 0 à respectivement x, y et z”. Or

$$E\left[\sum_{x \in S(n)} \mathbf{1}_{T_x}\right] = |S(n)| P_p(T_0) \tag{4}$$

On va obtenir une contradiction grâce au :

Lemme 3.4 *Soit* Y *un ensemble fini,* $|Y| \geqslant 3$*. Si* $\mathcal{P}$ *est une famille compatible de 3-partitions de* Y *(une 3-partition est une partition en exactement trois sous ensembles non vides). Alors*

$$|\mathcal{P}| \leqslant |Y| - 2$$

où deux 3-partitions $\Pi = \{P_1, P_2, P_3\}$ et $\Pi' = \{P'_1, P'_2, P'_3\}$ sont dites *compatibles* si, quitte à renuméroter les (P_i) et les (P'_i), on a $P'_2 \cup P'_3 \subset P_1$

preuve du lemme Raisonnons par récurrence sur $|Y|$. Si $|Y| = 3$, $|\mathcal{P}| \leqslant 1$. Soit $n \geqslant 3$, et supposons avoir montré le résultat pour $|Y| \leqslant n$. Soit Y tel que $|Y| = n + 1$, soit $y \in Y$, et $\mathcal{P}$ une famille de 3-partitions de Y. Si $\Pi \in \mathcal{P}$, on écrit $\Pi = \{\Pi_1 \cup \{y\}, \Pi_2, \Pi_3\}$, où $\Pi_1 \sqcup \Pi_2 \sqcup \Pi_3 = Y \backslash \{y\}$, avec $\Pi_2, \Pi_3 \neq \emptyset$.

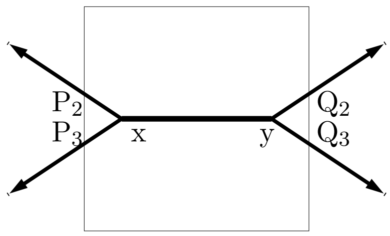
Soit $\mathcal{P}' = \{\Pi \in \mathcal{P}, \Pi_1 \neq \emptyset\}$. $\{\{\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3\}, \Pi \in \mathcal{P}'\}$ est alors clairement une famille de 3-partitions de $Y \backslash \{y\}$, et donc, par hypothèse de récurrence,

$$|\mathcal{P}'| \leqslant |Y| - 1 - 2 = |Y| - 3 \ .$$

Supposons enfin $|\mathcal{P}\backslash\mathcal{P}'| \geqslant 2$. Soient alors $\{\{y\}, \Pi_2, \Pi_3\} \neq \{\{y\}, \Pi'_2, \Pi'_3\} \in \mathcal{P}\backslash\mathcal{P}'$. Comme $\mathcal{P}$ est compatible, on devrait avoir : $\{y\} \cup \Pi_2 \subset \{y\}$, Π'_2 ou Π'_3, ce qui n'est pas possible. Donc $|\mathcal{P}\backslash\mathcal{P}'| \leqslant 1$, et donc

$$|\mathcal{P}| \leqslant |\mathrm{Y}| - 2 \qquad \square$$

Si K est une composante connexe ouverte de $\mathrm{S}(n)$, toute trifurcation intérieure $x \in \mathrm{K} \cap \mathrm{S}(n-1)$ induit canoniquement une 3-partition $\Pi(x)$ de $\partial\mathrm{S}(n) \cap \mathrm{K}$. Si x, y sont deux telles trifurcations, on note $\Pi(x) = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$, et $\Pi(y) = (\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \mathrm{Q}_3)$.



Supposons par exemple (quitte à renuméroter) que y (resp. x) soit dans la composante connexe ouverte de K privé des trois arêtes ouvertes adjacentes à x (resp. y) qui contient P_1 (resp. Q_1). On a alors $\mathrm{Q}_2 \sqcup \mathrm{Q}_3 \subset \mathrm{P}_1$ (sur le dessin, les Q_i et les P_i sont des singletons pour $i \in \{2, 3\}$, et $\mathrm{P}_1 = \mathrm{Q}_2 \cup \mathrm{Q}_3;\ \mathrm{Q}_1 = \mathrm{P}_2 \cup \mathrm{P}_3$). Ces 3-partitions sont donc compatibles. Le lemme entraine donc que, si $\mathcal{T}$ est le nombre de trifurcations dans $\mathrm{S}(n-1) \cap \mathrm{K}$,

$$\mathcal{T} \leqslant |\mathrm{K} \cap \partial\mathrm{S}(n)| - 2$$

On somme sur les composantes connexes ouvertes dans $\mathrm{S}(n-1)$, et le nombre τ de trifurcations dans $\mathrm{S}(n-1)$ vérifie :

$$\sum_{x \in \mathrm{S}(n-1)} \mathbf{1}_{\mathrm{T}_x} = \tau \leqslant |\partial\mathrm{S}(n)| \ .$$

et donc, d'après (4),

$$|\mathrm{S}(n-1)| \mathrm{P}_p(\mathrm{T}_0) \leqslant |\partial\mathrm{S}(n)|$$

Mais $|\mathrm{S}(n-1)| \sim \mathrm{C}_1 n^d$ et $|\partial\mathrm{S}(n)| \sim \mathrm{C}_2 n^{d-1}$, où C_1 et C_2 sont des constantes strictement positives. On obtient une contradiction en faisant tendre n vers l'infini, car $\mathrm{P}_p(\mathrm{T}_0) > 0$.

$\square$

Références

[1] G. Grimmett, *Percolation*, Springer, 1989.

[2] Billingsley *Probability and Measure*, John Wiley & Sons, 1995.