

# La toupie Tippe-Top

par L.G. Vidiani\* (éd.), Luc Gauthier et Jean Delsarte

## Introduction

En 1952, dans le commerce des jouets, une petite toupie en plastique faisait fureur chez les enfants et les adultes d'esprit jeune. Il s'agissait d'une toupie appelée Tippe-Top, de révolution constituée de deux parties : l'une est une calotte sphérique d'axe  $z'z$ , et l'autre un cylindre d'axe  $z'z$  emmanché perpendiculairement au plan de la calotte sphérique, l'ensemble formant un seul solide<sup>1</sup>.

L'originalité de la toupie ainsi formée est qu'une fois lancée, elle se retourne sur son manche, en continuant de tourner. Son mouvement fascina même les deux prix Nobel de physique Pauli et Bohr [2].

Une revue scientifique grand public eut le malheur et l'inconscience de prétendre que cette propriété ne pouvait se justifier scientifiquement : l'année suivante cette toupie faisait l'objet de la partie V du problème d'Agrégation de Mécanique rationnelle 1953, dont l'auteur était Luc Gauthier. Toutes les figures (énoncé et corrigé) étaient reconstituées en Maple<sup>®</sup> par Alain Esculier, que je remercie encore une fois.

## Énoncé du problème d'Agrégation de Mécanique rationnelle 1953

Préliminaires : une toupie pesante, non homogène, est de révolution, tant au point de vue dynamique qu'au point de vue géométrique, autour d'un axe  $z'z$ . Sa masse est désignée par  $m$ , son poids par  $mg$ , son centre de gravité (situé sur  $z'z$ ) par  $G$ .

Cette toupie évolue au-dessus d'un plan (matériel, indéfini) horizontal  $P$  fixe, avec lequel elle est initialement en contact. À un instant quelconque où elle est encore en contact avec  $P$ , on désigne par  $H$  la projection orthogonale de  $G$  sur  $P$ , par  $\theta$  l'angle non orienté

des demi-droites  $Gz'$ ,  $GH$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) et par  $h(\theta)$  la distance  $GH$  (voir la figure 1).

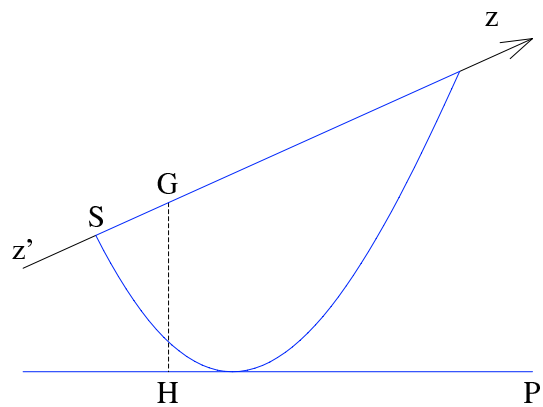


Figure 1.

La fonction  $h(\theta)$  est une donnée géométrique ; elle sera supposée dotée d'un nombre suffisant de dérivées continues, au moins dans les intervalles où évolue  $\theta$ .

Quelles propriétés doit avoir  $h(\theta)$  au voisinage de  $\theta = 0$  pour que la méridienne aboutisse, sur  $Gz'$ , en un sommet  $S$  dont la normale soit  $z'z$  et dont le centre de courbure soit rejeté à l'infini ? On dira alors que  $S$  est un méplat.

L'ellipsoïde central d'inertie de la toupie est de révolution autour de  $z'z$  : on désigne par  $A, A, C$  les moments principaux d'inertie.

Dans l'étude du mouvement de la toupie, on négligera les frottements de roulement et de pivotement, ainsi que l'effet ralentisseur dû à la résistance de l'air et celui de la rotation terrestre. On tiendra compte du frottement de glissement au contact de la toupie et du plan horizontal  $P$  : on désignera le coefficient de frottement par  $f$ .

On sera amené dans la suite à examiner trois cas particuliers :

1° Toupie sphérique.

La toupie est une sphère de centre  $O$ , dont le centre de gravité  $G$  est distinct de  $O$ . L'axe  $z'z$  est orienté

\* lg\_vidiani@club-internet.fr

<sup>1</sup> Un bon dessin valant mieux qu'un long discours, on regardera avec profit les animations disponibles sur les sites planetmirror ou science.univ-tn cités en fin d'article.

dans le sens  $GO$ . On désigne le rayon de la sphère par  $R$  et l'on pose  $GO = a$ ,  $0 < a < R$ .

2° Toupie à pied circulaire (figure 2).

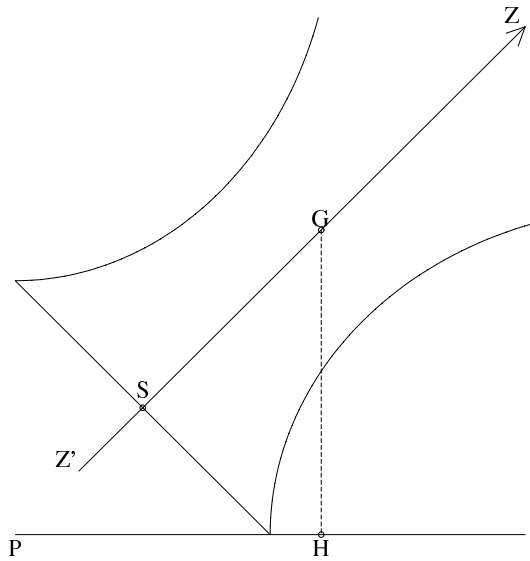


Figure 2.

La toupie, dont la forme géométrique (de révolution) n'est pas précisée, est en contact avec le plan horizontal  $P$  par une arête vive qui est un cercle d'axe  $z'z$ , de centre  $S$ . L'axe  $z'z$  est orienté dans le sens  $SG$ . On désigne le rayon du cercle par  $r$  et l'on pose  $SG = b$ .

3° Tippe-Top (figure 3).

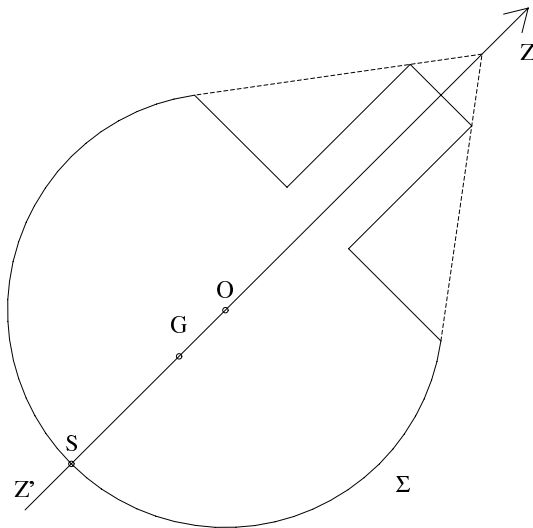


Figure 3.

Un Tippe-Top est une toupie de révolution constituée de deux parties : l'une est une calotte sphérique  $\Sigma$  de sommet  $S$  et d'axe  $z'z$ . L'autre est un cylindre d'axe  $z'z$  emmanché perpendiculairement au plan de la calotte sphérique, l'ensemble formant un seul solide.

Le cône circonscrit à la calotte  $\Sigma$  le long de son parallèle limite passe par le cercle extrême  $\gamma$  du cylindre (figure 3). La sphère limitant la calotte  $\Sigma$  a pour rayon  $R$  et pour centre  $O$ . L'axe  $z'z$  est orienté dans le sens  $SO$ . On suppose que le centre de gravité  $G$  du Tippe-Top est situé sur le segment  $OS$ , entre  $O$  et  $S$ , et l'on pose  $GO = a$ ,  $0 < a < R$ .

Le rayon du cylindre (rayon de  $\gamma$ ) est  $r$  et sa longueur  $\ell$ ; on prendra comme exemple  $r = \frac{R}{5}$ ,  $\ell = \frac{4R}{5}$  de sorte que l'angle  $\theta$  qui correspond aux plans tangents limites soit défini par l'égalité  $\cos \theta = -0,6$ .

Étudier la fonction  $h(\theta)$  dans le cas du Tippe-Top, ainsi que ses deux premières dérivées.

Pour qu'une toupie qui présente les propriétés géométriques précédentes soit un Tippe-Top, il est en outre nécessaire que soient vérifiées certaines inégalités de structure entre  $a, R, A, C$ , qui seront mises en évidence dans la quatrième partie.

I. On suppose  $f = 0$ .

Étudier le comportement de la toupie de révolution (cas général) en l'absence de frottement.

L'évolution de  $\theta$  étant obtenue au moyen d'une quadrature, examiner ensuite le cas de la toupie sphérique, puis celui de la toupie à pied circulaire.

II. On suppose  $f \neq 0$ .

a) Mise en équation du mouvement de la toupie de révolution (cas général) lorsqu'il y a frottement.

b) Étudier le mouvement sans rotation propre ni précession; on montrera que l'évolution de  $\theta$  peut être obtenue au moyen de trois quadratures.

c) On étudiera ensuite le cas de la toupie sphérique. La rotation propre ne sera plus supposée constamment nulle. On montrera qu'il existe une intégrale première du mouvement  $J$ , dont on s'efforcera de donner la signification mécanique précise.

L'existence de cette intégrale première  $J$  est caractéristique du cas de la toupie sphérique.

III. Étudier le mouvement de la toupie de révolution (cas général) en supposant qu'il y a roulement sans glissement.

Étudier le mouvement sans rotation propre ni précession. Sous quelles conditions  $\theta$ , initialement petit, peut-il rester petit? Examiner le cas où  $S$  est un point méplat.

Montrer que dans le cas de la toupie sphérique, le mouvement général peut être exprimé explicitement au moyen d'une suite de quadratures. Étudier en particulier la vitesse (scalaire) du

centre de gravité en fonction de son altitude  $h(\theta)$ . Examiner les mouvements à  $\theta$  constant.

IV. On reprend l'étude du mouvement de la toupie sphérique dans le cas où le coefficient de frottement  $f$  n'est ni nul ni infini.

a) Montrer que compte tenu de l'existence de l'intégrale première  $J$ , l'énergie totale de la toupie reste, pour chaque valeur de  $\theta$ , supérieure à un certain minimum  $E$ .

b) Si  $K$  désigne le point de contact de la sphère avec le plan horizontal  $P$ , la condition nécessaire et suffisante pour que ce minimum soit atteint est que la droite  $GK$  ait une certaine propriété cinématique, que l'on explicitera.

Exprimer  $E$  au moyen de la constante d'intégration, du moment d'inertie autour de  $GK$  et de  $\theta$ .

c) Établir les conditions que doivent vérifier  $\frac{a}{R}$  et  $\frac{c}{A}$  pour que, l'état cinétique initial étant convenablement choisi,  $E$  soit une fonction constamment non croissante de  $\theta$ .

Ces conditions étant supposées réalisées, tirer de cette étude, en utilisant le caractère dissipatif du frottement, les conclusions qui s'imposent en ce qui concerne l'évolution de  $\theta$  au cours du temps.

V. Un Tippe-Top (on rappelle que  $\frac{a}{R}$  et  $\frac{c}{A}$  sont liés par les conditions obtenues dans la quatrième partie, paragraphe c) étant lancé dans un état cinétique qui comporte uniquement une rotation propre, le contact initial ayant lieu en  $S$  ou dans son voisinage, étudier le mouvement ultérieur et notamment le choc qui se produit lorsque  $\gamma$  arrive au contact de  $P$ , le frottement au nouveau point de contact étant supposé important.

(Durée 7 h.)

### Un corrigé historique

Gérard Eguether, dont le site<sup>2</sup> vaut le détour et que je remercie vivement, m'a communiqué une photocopie du corrigé manuscrit de ce problème, dont l'auteur n'est autre que Jean Frédéric Auguste Delsarte<sup>3</sup>.

Ce normalien (Ulm, 1922) fut notamment quatrième à l'Agrégation 1925 (le major étant André Weil), membre du groupe Bourbaki (une photo d'une partie de cette équipe, comprenant Jean Delsarte est p. 17 de [1]), doyen de la faculté des sciences de

Nancy. Dès 1947, il conçut une douzaine de problèmes de concours très originaux pour l'époque<sup>4</sup>, dont en particulier celui « phare » des Mines de Nancy 1947, qui passionnait avec une loi de groupe sur une surface.

Le manuscrit se présente sous la forme de 17 pages format A4, 33 faces sur papier pelure, d'un seul jet et avec très peu de ratures.

Je le reproduit, avec l'aimable autorisation de la fille de Jean Delsarte, sans suppressions ni autres ajouts qu'un nombre réduit de commentaires en italique pour faciliter la compréhension de points évidents pour l'auteur, mais moins pour le lecteur lambda, dont moi.

L'auteur, qui remarque immédiatement que l'énoncé commence par des cas particuliers qui s'intégreront dans la méthode générale en spécialisant certains paramètres, adopte d'emblée un plan qui lui permettra d'éviter les redites !

### Le corrigé de Jean Delsarte

#### Notations

#### II-I-III Cas général Toupie de révolution

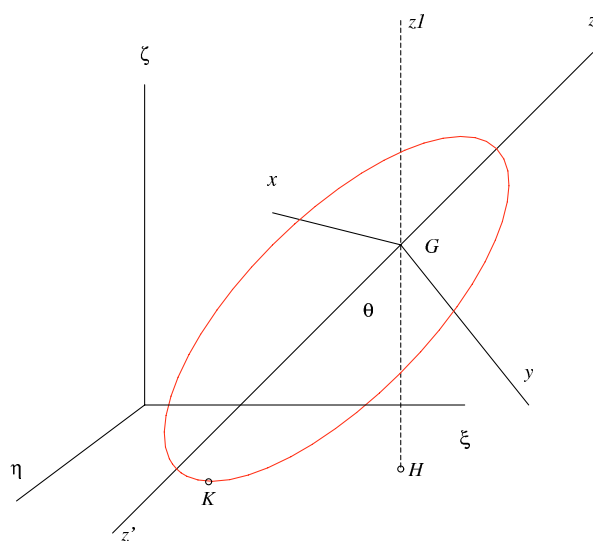


Figure 4.

**Plan P :**  $\zeta = 0$ .  $(Gz', \widehat{GH}) = \theta$  angle non orienté ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ).

On remarque que  $h(\theta)$ , distance  $GH$  est la côte  $\zeta$  de  $G$  :  $\zeta = h(\theta)$ , détermine la méridienne (*enveloppe de la droite  $y \sin \theta + z \cos \theta = -h(\theta)$  dans le plan méridien  $Gyz$* ).

<sup>2</sup> <http://www.iecn.u-nancy.fr/~eguether/>

<sup>3</sup> <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Delsarte.html>.

<sup>4</sup> Et encore pour la nôtre, lorsqu'on constate le conformisme de beaucoup de sujets actuels qui sont souvent un décalage de cours niveau  $n + 3$  !

**Axes :** On prend comme axes  $G, x_1, y_1, z_1$  de directions fixes,  $Gz_1$  étant verticale ascendante.  $Gx, y, z$  axes mobiles :

$$\begin{cases} Gz : \text{axe du corps} \\ Gx : \text{perpendiculaire au plan } zGz_1 \\ Gy : \text{direct : dans le plan } zGz_1 \end{cases} .$$

Le point  $K$  se trouve dans le plan  $zGz_1$ .

**Angles :**  $\theta = \widehat{z_1Gz}$  orienté par rapport à  $Gx$  :  $\theta = (\widehat{Gz'}, \widehat{GH})$ .

$\psi = (\widehat{x_1Gx})$  angle de précession.

**P, Q, R :** rotations instantanées de  $Gxyz$ , suivant  $Gxyz$  :  $P = \theta'$ ,  $Q = \psi' \sin \theta$ ,  $R = \psi' \cos \theta$ .

**Corps :** On achève de déterminer sa position en se donnant  $\varphi$  angle d'une direction du corps, dans le plan  $xGy$  avec  $Gx$  ; d'où le vecteur de rotation instantané du corps sur  $Gxyz$  :  $p = P = \theta'$ ,  $q = Q = \psi' \sin \theta$ ,  $r = R + \varphi' = \psi' + \psi' \sin \theta$ .

Soit encore  $u, v, w$  les composantes de la vitesse absolue de  $G$  sur  $Gxyz$  ; l'accélération absolue de  $G$  a pour composantes

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Qw - Rv \\ \frac{\partial v}{\partial t} + Ru - Pw \\ \frac{\partial w}{\partial t} + Pv - Qu \end{cases} .$$

**Forces :**  $m$  masse de la toupie.

**Poids :**  $mg$  appliqué en  $G$ , de composantes sur

$$Gx, Gy, Gz, \begin{cases} 0 \\ -mg \sin \theta \\ -mg \cos \theta \end{cases} .$$

**Réaction :**  $mX, mY, mZ$  appliquée en  $P$  (composantes sur  $Gxyz$ )<sup>5</sup>.

**Théorème du centre de gravité :**

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Qw - Rv = X \\ \frac{\partial v}{\partial t} + Ru - Pw = Y - g \sin \theta \\ \frac{\partial w}{\partial t} + Pv - Qu = Z - g \cos \theta \end{cases} . \quad (1)$$

**Mouvement autour de  $G$  :**  $A, A, C$  : moments d'inertie principaux en  $G$ .

Dans le mouvement relatif de  $G$ , le moment cinétique par rapport à  $G$  a pour composantes sur  $Gxyz$  :  $\sigma_x = Ap$ ,  $\sigma_y = Aq$ ,  $\sigma_z = Cr$ .

<sup>5</sup> Dans les premières pages de son corrigé et sur la figure Delsarte a surchargé  $P$  par la lettre  $K$ , il faut donc quand il subsiste  $P$  dans son corrigé comprendre Point  $P = K$ .

On a donc

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} + Q\sigma_z - R\sigma_y = S_x \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial t} + R\sigma_x - P\sigma_z = S_y \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} + P\sigma_y - Q\sigma_x = S_z \end{cases} ,$$

où  $S_x, S_y, S_z$  sont les composantes du moment des forces par rapport à  $G$  sur  $Gxyz$ .

D'où

$$\begin{cases} A \frac{\partial p}{\partial t} + (Cr - Aq \cot \theta)q = S_x \\ A \frac{\partial q}{\partial t} - (Cr - Aq \cot \theta)p = S_y \\ C \frac{\partial r}{\partial t} = S_z \end{cases} ,$$

car  $P = p$ ,  $Q = q$ ,  $R = q \cot \theta$ .

Or le moment du poids est nul par rapport à  $G$  :  $S_x, S_y, S_z$  sont donc les moments de la réaction en  $K$ .

**Coordonnées de  $P$  (en réalité coordonnées de  $K$ ) :** Sur  $Gxyz$  :  $GK = GH + HK$ .

$GH$  :  $(0, -h \sin \theta, -h \cos \theta)$ .

Calcul auxiliaire : En  $Gxyz$  la méridienne de  $S$  est l'enveloppe de  $y \sin \theta + z \cos \theta = -h(\theta)$ , et la normale a pour équation  $y \cos \theta - z \sin \theta = -h'(\theta)$ .

D'où  $P = (0, -h \sin \theta - h' \cos \theta, -h \cos \theta + h' \sin \theta)$ .

Puis, moment de la réaction :

$$\begin{cases} S_x = m(h \cos \theta - h' \sin \theta)Y - m(h \sin \theta + h' \cos \theta)Z \\ S_y = -m(h \cos \theta - h' \sin \theta)X \\ S_z = m(h \sin \theta + h' \cos \theta)X \end{cases} .$$

D'où

$$\begin{cases} A \frac{\partial p}{\partial t} + (Cr - Aq \cot \theta)q = m(h \cos \theta - h' \sin \theta)Y \\ \hspace{15em} - m(h \sin \theta + h' \cos \theta)Z \\ A \frac{\partial q}{\partial t} - (Cr - Aq \cot \theta)p = -m(h \cos \theta - h' \sin \theta)X \\ C \frac{\partial r}{\partial t} = m(h \sin \theta + h' \cos \theta)X \end{cases} . \quad (2)$$

**Autres conditions :** Vitesse du point  $K$  (du solide)  $(0, -h \sin \theta - h' \cos \theta, -h \cos \theta + h' \sin \theta)$ .

Vitesse en  $Gxyz$  (on utilise la vitesse en un point

$$d'un solide V_K = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{GK} + V_G :$$

$$\begin{cases} -q(h \cos \theta - h' \sin \theta) + r(h \sin \theta + h' \cos \theta) + u \\ p(h \cos \theta - h' \sin \theta) + v \\ -p(h \sin \theta + h' \cos \theta) + w \end{cases} .$$

Comme elle est horizontale,

$$v \sin \theta + w \cos \theta - ph' = 0. \quad (3)$$

(Changement de repère  $z_1 = y \sin \theta + z \cos \theta$ .)

Dans H : la réaction tangentielle est opposée à la vitesse (première loi de frottement  $R_T/vitesse < 0$ ).

Composante normale de la réaction (divisée par  $m$ ) :  $N = Y \sin \theta + Z \cos \theta$ ;  $(0, N \sin \theta, N \cos \theta)$ .

Composante tangentielle :  $(X, Y \cos^2 \theta - Z \sin \theta \cos \theta, Z \sin^2 \theta - Y \sin \theta \cos \theta)$ .

D'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{X}[u + r(h \sin \theta + h' \cos \theta) - q(h \cos \theta - h' \sin \theta)] = \\ \frac{v + p(h \cos \theta - h' \sin \theta)}{(Y \cos \theta - Z \sin \theta) \cos \theta} \\ = \frac{w - p(h \sin \theta + h' \cos \theta)}{-(Y \cos \theta - Z \sin \theta) \sin \theta}; \end{aligned}$$

ce qui donne, d'abord (3) (avec les deux derniers rapports), puis

$$\frac{1}{X}[u + r(h \sin \theta + h' \cos \theta) - q(h \cos \theta - h' \sin \theta)] = \frac{v \cos \theta - w \sin \theta + ph}{Y \cos \theta - Z \sin \theta} < 0. \quad (4)$$

Enfin la seconde loi de frottement ( $|R_T| = f|R_N|$ ) donne

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = (1 + f^2)N^2$$

soit

$$X^2 + (Y \sin \theta + Z \cos \theta)^2 + (Y \cos \theta - Z \sin \theta)^2 = (1 + f^2)(Y \sin \theta + Z \cos \theta)^2$$

ou

$$X^2 + (Y \cos \theta - Z \sin \theta)^2 = f^2(Y \sin \theta + Z \cos \theta)^2; \quad (5)$$

ce qui constitue les résultats de (II,a).

## II b) Mouvement sans rotation propre ni précession

Précession nulle donne :  $\psi' = 0 \implies Q = R = 0 \implies q = 0$ .

Rotation propre nulle donne :  $r = 0 \implies \varphi' = 0$

puis  $p = P = \frac{\partial \theta}{\partial t}$ .

Donc (1) donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = X \\ \frac{\partial v}{\partial t} - w \frac{\partial \theta}{\partial t} = Y - g \sin \theta \\ \frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial \theta}{\partial t} = Z - g \cos \theta \end{cases} .$$

(2) donne :  $A \frac{\partial p}{\partial t} = m(h \cos \theta - h' \sin \theta)Y - m(h \sin \theta + h' \cos \theta)Z$  et  $X = 0$ .

(3) donne :  $v \sin \theta + w \cos \theta - ph' = 0$ .

(4) donne :  $u = 0$  et  $\frac{v \cos \theta - w \sin \theta + ph}{Y \cos \theta - Z \sin \theta} < 0$ .

(5) donne alors :  $(Y \cos \theta - Z \sin \theta)^2 = f^2(Y \sin \theta + Z \cos \theta)^2$ .

On a donc  $u = X = 0$ , puis par (1),

$$Y \cos \theta - Z \sin \theta = \cos \theta \frac{\partial v}{\partial t} - \sin \theta \frac{\partial w}{\partial t} - (w \cos \theta + v \sin \theta) \frac{\partial \theta}{\partial t},$$

ou

$$Y \cos \theta - Z \sin \theta = \cos \theta \frac{\partial v}{\partial t} - \sin \theta \frac{\partial w}{\partial t} - h'(\theta) \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 .$$

Puis

$$Y \sin \theta + Z \cos \theta = \sin \theta \frac{\partial v}{\partial t} + \cos \theta \frac{\partial w}{\partial t} - (w \sin \theta - v \cos \theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} + g.$$

Mais (2) donne :

$$A \frac{d^2 \theta}{dt^2} = mh(Y \cos \theta - Z \sin \theta) - mh'(Y \sin \theta + Z \cos \theta)$$

ou

$$\begin{aligned} A \frac{d^2 \theta}{dt^2} = mh \left( \cos \theta \frac{\partial v}{\partial t} - \sin \theta \frac{\partial w}{\partial t} \right) \\ - mh' \left( \sin \theta \frac{\partial v}{\partial t} + \cos \theta \frac{\partial w}{\partial t} \right) \\ - mhh' \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + m(w \sin \theta - v \cos \theta)h' \frac{\partial \theta}{\partial t} - mgh', \end{aligned}$$

et par (3)  $v \sin \theta + w \cos \theta - h' \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$ .

Posons  $\alpha = v \cos \theta - w \sin \theta$ , qu'on combine avec

$$(3) h' \frac{\partial \theta}{\partial t} = v \sin \theta + w \cos \theta. \text{ Il vient :}$$

$$\begin{cases} \cos \theta \frac{\partial v}{\partial t} - \sin \theta \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + h' \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \\ \sin \theta \frac{\partial v}{\partial t} + \cos \theta \frac{\partial w}{\partial t} = h'' \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + h' \frac{d^2 \theta}{dt^2} - \alpha \frac{\partial \theta}{\partial t} \end{cases}.$$

Par suite :

$$\begin{aligned} A \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= mh \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial t} + h' \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \right] \\ &\quad - mh' \left[ h'' \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + h' \frac{d^2 \theta}{dt^2} - \alpha \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] \\ &\quad - mhh' \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 - m\alpha h' \frac{\partial \theta}{\partial t} - mgh, \end{aligned}$$

ou

$$(A + mh'^2) \frac{d^2 \theta}{dt^2} = mh \frac{\partial \alpha}{\partial t} - mh'h'' \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 - mgh'.$$

Enfin on a

$$Y \cos \theta - Z \sin \theta = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + h' \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 - h' \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2$$

et

$$Y \sin \theta + Z \cos \theta = h'' \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + h' \frac{d^2 \theta}{dt^2} - \alpha \frac{\partial \theta}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \theta}{\partial t} + g$$

et l'équation (5) donne

$$\left( \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)^2 = f^2 \left[ h'' \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + h' \frac{d^2 \theta}{dt^2} + g \right]^2.$$

Cette dernière équation donne, en extrayant la racine :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \varepsilon f \left[ h'' \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + h' \frac{d^2 \theta}{dt^2} + g \right],$$

avec  $\varepsilon = \pm 1$ .

D'où, en reportant,

$$\begin{aligned} [A + mh'(h' - \varepsilon fh)] \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= \\ mh''(\varepsilon fh - h') \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 &+ mg(\varepsilon fh - h'). \end{aligned}$$

Cette dernière équation s'intègre classiquement en posant  $\frac{\partial \theta}{\partial t} = p$  (fonction de  $\theta$ ) :

$$[A + mh'(h' - \varepsilon fh)] p \frac{\partial p}{\partial \theta} = m(\varepsilon fh - h') [h'' p^2 + g].$$

On pose  $p^2 = u$  et on a l'équation

$$[A + mh'(h' - \varepsilon fh)] \frac{\partial u}{\partial \theta} = 2m(\varepsilon fh - h') [h'' u + g],$$

équation linéaire qui s'intègre par deux quadratures. On a ensuite le temps par une troisième quadrature  $dt = \frac{d\theta}{\sqrt{u}}$ . On discute le signe de  $\varepsilon$  pour la condition (4), qui devient

$$\frac{\alpha + ph}{\frac{\partial \alpha}{\partial t}} < 0,$$

ou

$$\varepsilon \left( \alpha + h \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \left[ h'' \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + h' \frac{d^2 \theta}{dt^2} + g \right] < 0.$$

## II c) Toupie sphérique

Notation de l'énoncé :  $GO = a$ ;  $0 < a < R$ ;  $z'z$  orienté dans le sens  $GO$ .

**Rayon R** :  $h = R - a \cos \theta$ ;  $h' = a \sin \theta$ .

**Équations :**

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + q(w - v \cot \theta) = X \\ \frac{\partial v}{\partial t} + qu \cot \theta - pw = Y - g \sin \theta & p = \frac{\partial \theta}{\partial t}; (1) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + pv - qu = Z - g \cos \theta \\ \left. \begin{aligned} A \frac{\partial p}{\partial t} + (Cr - Aq \cot \theta)q &= m(R \cos \theta - a)Y \\ &\quad - mR \sin \theta Z \\ A \frac{\partial q}{\partial t} - (Cr - Aq \cot \theta)p &= -m(R \cos \theta - a)X \\ C \frac{\partial r}{\partial t} &= mR \sin \theta X \end{aligned} \right\}; (2) \end{cases}$$

$$v \sin \theta + w \cos \theta - a \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0; (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} [u + Rr \sin \theta - q(R \cos \theta - a)] &= \\ \frac{v \cos \theta - w \sin \theta + (R - a \cos \theta)p}{Y \cos \theta - Z \sin \theta} &< 0; (4) \end{aligned}$$

$$X^2 + (Y \cos \theta - Z \sin \theta)^2 = f^2 (Y \sin \theta + Z \cos \theta)^2. (5)$$

On élimine le temps entre (2)<sub>2</sub> et (2)<sub>3</sub> :

$$\begin{cases} A \frac{\partial q}{\partial \theta} - (Cr - Aq \cot \theta) = -m(R \cos \theta - a) \frac{X}{p} \\ C \frac{\partial r}{\partial \theta} = mR \sin \theta \frac{X}{p} \end{cases}.$$



Puis éliminant  $\frac{X}{p}$  :

$$AR \sin \theta \frac{\partial q}{\partial \theta} - R(Cr \sin \theta - Aq \cos \theta) + C(R \cos \theta - a) \frac{\partial r}{\partial \theta} = 0,$$

ou

$$AR \left[ \sin \theta \frac{\partial q}{\partial \theta} + q \cos \theta \right] + C \left[ -R \cos \theta - a \right] \frac{\partial r}{\partial \theta} - Rr \sin \theta = 0,$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial \theta} [ARq \sin \theta + C(R \cos \theta - a)r] = 0,$$

d'où l'intégrale première

$$Aq \sin \theta + C \left( \cos \theta - \frac{a}{R} \right) r = k \quad (J)$$

**Son existence caractérise la toupie sphérique :**

En effet (2)<sub>2</sub> et (2)<sub>3</sub> donnent de même, en général :

$$A \frac{\partial q}{\partial \theta} - (Cr - Aq \cot \theta) = -m(h \cos \theta - h' \sin \theta) \frac{X}{p}$$

$$C \frac{\partial r}{\partial \theta} = m(h \sin \theta + h' \cos \theta) \frac{X}{p}$$

L'élimination de  $\frac{X}{p}$  donne alors :

$$A(h \sin \theta + h' \cos \theta) \frac{\partial q}{\partial \theta} - (h \sin \theta + h' \cos \theta)(Cr - Aq \cot \theta) + C(h \cos \theta - h' \sin \theta) \frac{\partial r}{\partial \theta} = 0,$$

ou

$$A(h + h' \cot \theta) \left( \sin \theta \frac{\partial q}{\partial \theta} + q \cos \theta \right) + C \left[ (h \cos \theta - h' \sin \theta) \frac{\partial r}{\partial \theta} - (h \sin \theta + h' \cos \theta)r \right] = 0,$$

ou

$$0 = (h + h' \cot \theta) \left[ A \frac{\partial}{\partial \theta} (q \sin \theta) - Cr \sin \theta \right] + C(h - h' \tan \theta) \cos \theta \frac{\partial r}{\partial \theta},$$

ou

$$0 = (h + h' \cot \theta) \left[ A \frac{\partial}{\partial \theta} (q \sin \theta) - C \frac{\partial}{\partial \theta} (r \cos \theta) \right] - \frac{h'}{\sin \theta} \frac{\partial r}{\partial \theta} = 0$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial \theta} [Aq \sin \theta + Cr \cos \theta] - \frac{h'}{h \sin \theta + h' \cos \theta} \frac{\partial r}{\partial \theta}.$$

Ce qui conduit à une intégrale première si seulement

$$\frac{h'}{h \sin \theta + h' \cos \theta} = \alpha (\text{constante}),$$

$$h'(1 - \alpha \cos \theta) - \alpha h \sin \theta = 0,$$

$$\frac{h'}{h} = \frac{\alpha \sin \theta}{1 - \alpha \cos \theta},$$

$$h = A(1 - \alpha \cos \theta),$$

d'où la toupie est sphérique.

**Interprétation de l'intégrale première J**

En  $Gxyz$ , les coordonnées de  $K$  sont :  $\xi = 0$ ,  $\eta = -R \sin \theta$ ,  $\zeta = a - R \cos \theta$ .

L'intégrale (J) s'écrit :

$$Ap\xi + Aq\eta + Cr\zeta = -kR = \xi\sigma_x + \eta\sigma_y + \zeta\sigma_z.$$

Elle exprime que le produit  $\overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{G\sigma}$  est constant ( $\overrightarrow{G\sigma}$  moment cinétique du solide, en  $G$ ). On notera que le moment des forces (poids et réaction), par rapport à  $GK$  est nul.

**IV a) L'énergie totale de la toupie sphérique**

Elle a pour double

$$2\mathcal{E} = 2T + 2U = m(u^2 + v^2 + w^2) + Ap^2 + Aq^2 + Cr^2 - 2mga \cos \theta.$$

Dans la forme quadratique  $Aq^2 + Cr^2$ , introduisons la forme linéaire :

$$Aq \sin \theta + Cr \left( \cos \theta - \frac{a}{R} \right).$$

On trouve :

$$(Aq^2 + Cr^2) \left[ A \sin^2 \theta + C \left( \cos \theta - \frac{a}{R} \right)^2 \right] = \left[ Aq \sin \theta + Cr \left( \cos \theta - \frac{a}{R} \right) \right]^2 + AC \left[ q \left( \cos \theta - \frac{a}{R} \right) - r \sin \theta \right]^2.$$

Donc

$$2\mathcal{E} = m(u^2 + v^2 + w^2) + Ap^2 - 2mga \cos \theta + \frac{1}{A \sin^2 \theta + C \left( \cos \theta - \frac{a}{R} \right)^2} \times \left\{ \left[ Aq \sin \theta + Cr \left( \cos \theta - \frac{a}{R} \right) \right]^2 + AC \left[ q \left( \cos \theta - \frac{a}{R} \right) - r \sin \theta \right]^2 \right\}$$

ou, compte tenu de l'intégrale  $J$ ,

$$2\mathcal{E} = m(u^2 + v^2 + w^2) + Ap^2 - 2mga \cos \theta + \frac{k^2}{A \sin^2 \theta + C(\cos \theta - \frac{a}{R})^2} + \frac{AC}{A \sin^2 \theta + C(\cos \theta - \frac{a}{R})^2} \times \left[ q \left( \cos \theta - \frac{a}{R} \right) - r \sin \theta \right]^2.$$

Pour chaque valeur de  $\theta$ , on a donc :

$$\mathcal{E} \geq E = -mga \cos \theta + \frac{k^2}{2[A \sin^2 \theta + C(\cos \theta - \frac{a}{R})^2]}.$$

Revenant aux coordonnées  $\xi, \eta, \zeta$  de  $K$  en  $Gxyz$ , on a :

$$E = -mga \cos \theta + \frac{k^2 R^2}{2[A\xi^2 + A\eta^2 + C\zeta^2]}.$$

Introduisons le moment d'inertie de la toupie, par rapport à  $GK$  :

$$I_{GK} = \frac{A\xi^2 + A\eta^2 + C\zeta^2}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = \frac{A\xi^2 + A\eta^2 + C\zeta^2}{a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta}.$$

Il vient :

$$E = -mga \cos \theta + \frac{k^2 R^2}{2[a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta] I_{GK}},$$

ou encore

$$E = -\frac{mg}{2R}(a^2 + R^2) + \frac{mg}{2R} GK^2 + \frac{k^2 R^2}{2GK^2 \cdot I_{GK}}.$$

#### IV b) L'énergie $\mathcal{E}$ atteint son minimum $E$

si

$$m(u^2 + v^2 + w^2) + Ap^2 + \frac{AC}{A \sin^2 \theta + C(\cos \theta - \frac{a}{R})^2} \times \left[ q \left( \cos \theta - \frac{a}{R} \right) - r \sin \theta \right]^2 = 0.$$

Ce qui exige  $u = v = w = p = q(\cos \theta - \frac{a}{R}) - r \sin \theta = 0$ .

La dernière équation donne :  $r\eta - q\zeta = 0$ , qui combinée avec  $p = 0$ , montre que la rotation instantanée doit être parallèle à  $GK$ ; comme  $u, v, w$  doivent être nuls, on en déduit que  $GK$  doit être l'axe instantané de rotation de la toupie lorsque  $\mathcal{E}$  atteint son minimum.

#### IV c) Conditions pour que $E$ soit non croissante

On a trouvé :

$$E = -\frac{mg}{2R}(a^2 + R^2) + \frac{mg}{2R} GK^2 + \frac{k^2 R^2}{2GK^2 \cdot I_{GK}}$$

et en revenant à  $\xi, \eta, \zeta$  (coordonnées de  $K$ ) :  $\xi = 0$ ,  $GK^2 = \eta^2 + \zeta^2$ ,  $GK^2 \cdot I_{GK} = A\eta^2 + C\zeta^2$ .

$E$  varie donc comme

$$mg(\eta^2 + \zeta^2) + \frac{k^2 R^3}{A\eta^2 + C\zeta^2}$$

et le long de la méridienne de la toupie on a

$$\eta^2 + \zeta^2 - 2a\zeta = R^2.$$

Il est facile d'obtenir des conditions nécessaires pour que  $E$  décroisse quand  $\theta$  croît de  $0$  à  $\pi$ . En effet  $\eta^2 + \zeta^2$  croît alors de  $(a-R)^2$  à  $(a+R)^2$ . Il faut donc que  $\frac{k^2 R^3}{A\eta^2 + C\zeta^2}$  décroisse, donc que  $A\eta^2 + C\zeta^2 = (C-A)\zeta^2 + A(R^2 + 2a\zeta)$  croisse quand  $\zeta$  croît de  $a-R$  à  $a+R$ . Ce trinôme en  $\zeta$  a sa dérivée nulle pour  $\zeta_0 = \frac{Aa}{A-C}$  qui doit être extérieur à l'intervalle  $[a-R, a+R]$ , d'où la condition  $(\frac{Aa}{A-C} + R)(\frac{Aa}{A-C} - R) \geq 0 \implies a^2 C^2 - R^2(A-C)^2 \geq 0$  soit  $\frac{a}{R} \geq |1 - \frac{A}{C}|$ .

Soit donc cette condition remplie.

- Si  $A < C$ , on a  $\zeta_0 < 0$ , donc  $\zeta_0 < a-R < a+R$  et le trinôme est croissant pour  $\zeta > \zeta_0$ .

- Si  $A > C$ , on a  $\zeta_0 > 0$ , donc  $a-R < a+R < \zeta_0$ , et le trinôme est croissant pour  $\zeta < \zeta_0$ .

Donc la condition  $a^2 C^2 - (A-C)^2 R^2 \geq 0$  entraîne que  $A\eta^2 + C\zeta^2$  croît quand  $\theta$  croît de  $0$  à  $\pi$ .

Si  $k$  est très grand en valeur absolue,  $E$  varie comme  $\frac{k^2 R^3}{A\eta^2 + C\zeta^2}$ .

Par suite si l'état cinématique initial est choisi de sorte que la constante d'intégration initiale  $k$  soit suffisamment grande en valeur absolue, et si  $a^2 C^2 - R^2(A-C)^2 \geq 0$ , [ou  $\frac{a}{R} \geq |1 - \frac{A}{C}|$ ] on peut affirmer que  $E$  est une fonction décroissante de  $\theta$  dans l'intervalle  $[0, \pi]$ .

**Convergence dynamique :** l'énergie s'écrit donc

$$2\mathcal{E}(r) = m(u^2 + v^2 + w^2) + Ap^2 + \frac{AC}{A \sin^2 \theta + C(\cos \theta - \frac{a}{R})} \times \left[ q \left( \cos \theta - \frac{a}{R} \right) - r \sin \theta \right]^2 + 2E(\theta).$$

Au cours du mouvement, par suite du caractère dissipatif du frottement,  $\mathcal{E}(t)$  est une fonction décroissante du temps.

Or quand  $\theta$  croît de  $0$  à  $\pi$ ,  $E(\theta)$  décroît de  $E_1$  à  $E_0$ .

$\mathcal{E}(t)$  décroissant constamment, et tendant vers son minimum absolu  $E_0$ ,  $\mathcal{E}(t)$  finit par atteindre la valeur  $E_1$ , pour  $t = t_1$  puis par demeurer inférieur à cette valeur  $E_1$  pour  $t > t_1$ .

Or, si  $\mathcal{E}(t) < E_1$ , on peut résoudre *univoquement* l'équation  $\mathcal{E}(t) = E(\theta_t)$ , puisque  $E(\theta)$  est une fonction décroissante de  $\theta$  entre  $0$  et  $\pi$ ; et cette fonction



$\theta_t$  définie pour  $t > t_1$  croît de 0 à  $\pi$  quand  $t$  croît de  $t_1$  à  $+\infty$ . Mais si  $\theta$  est la valeur de la nutation de la toupie à l'instant  $t$ , on a, d'après ce qui a été vu :  $\mathcal{E}(t) = E(\theta_t) \geq E(\theta)$ .

Donc  $\theta \geq \theta_t$  puisque  $E(\theta)$  est une fonction décroissante.

On voit donc, en conclusion, qu'au cours du mouvement pour  $t$  assez grand ( $t > t_1$ ),  $\theta$  reste constamment supérieur à une fonction  $\theta_t$  qui est une fonction croissante du temps. Ceci ne vaut, redisons-le, que pour  $\frac{a}{R} \geq |1 - \frac{A}{C}|$ , et si la constante d'intégration  $k$  est, en valeur absolue, supérieure à une quantité fixe (qu'on pourrait assigner).

### III a) Mouvement dans le cas de roulement sans glissement

Les équations générales dans le cas du roulement, sont toujours du même type :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + q(w - v \cot \theta) = X \\ \frac{\partial v}{\partial t} + qu \cot \theta - pw = Y - g \sin \theta \\ \frac{\partial w}{\partial t} + pv - qu = Z - g \cos \theta \end{cases} \quad p = \frac{\partial \theta}{\partial t}; \quad (1)$$

$$\begin{cases} A \frac{\partial p}{\partial t} + (Cr - Aq \cot \theta)q = m(h \cos \theta - h' \sin \theta)Y \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad - m(h \sin \theta + h' \cos \theta)Z \\ A \frac{\partial q}{\partial t} - (Cr - Aq \cot \theta)p = -m(h \cos \theta - h' \sin \theta)X \\ C \frac{\partial r}{\partial t} = m(h \sin \theta + h' \cos \theta)X \end{cases}; \quad (2)$$

à quoi il faut cette fois rajouter les équations exprimant la nullité de la vitesse du point  $K$  :

$$\begin{cases} p(h \cos \theta - h' \sin \theta) + v = 0 \\ -p(h \sin \theta + h' \cos \theta) + w = 0 \\ -q(h \cos \theta - h' \sin \theta) + r(h \sin \theta + h' \cos \theta) + u = 0. \end{cases} \quad (3)$$

La méthode d'intégration est classique. On élimine  $X$  entre (1)<sub>1</sub>, (2)<sub>2</sub>, (2)<sub>3</sub> :

$$\begin{aligned} A \frac{\partial q}{\partial t} - (Cr - Aq \cot \theta)p &= -m(h \cos \theta - h' \sin \theta) \\ &\quad \times \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + q(w - v \cot \theta) \right] \\ C \frac{\partial r}{\partial t} &= m(h \sin \theta + h' \cos \theta) \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + q(w - v \cot \theta) \right]. \end{aligned}$$

On a ensuite, par (3),  $w - v \cot \theta = \frac{ph}{\sin \theta}$  donc

$$\begin{aligned} A \frac{\partial q}{\partial t} - (Cr - Aq \cot \theta)p &= -m(h \cos \theta - h' \sin \theta) \\ &\quad \times \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{pqh}{\sin \theta} \right] \\ C \frac{\partial r}{\partial t} &= m(h \sin \theta + h' \cos \theta) \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{pqh}{\sin \theta} \right], \end{aligned}$$

ou encore, en divisant par  $p = \frac{\partial \theta}{\partial t}$  :

$$\begin{cases} A \frac{\partial q}{\partial \theta} - (Cr - Aq \cot \theta) = -m(h \cos \theta - h' \sin \theta) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \times \left[ \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{qh}{\sin \theta} \right] \\ C \frac{\partial r}{\partial \theta} = m(h \sin \theta + h' \cos \theta) \left[ \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{qh}{\sin \theta} \right] \end{cases}. \quad (4)$$

D'ailleurs  $u$  est connu en fonction de  $\theta$  par (3)<sub>3</sub> :

$$u = q(h \cos \theta - h' \sin \theta) - r(h \sin \theta + h' \cos \theta). \quad (5)$$

Donc (4) donne un système de deux équations linéaires du premier ordre en  $q$  et  $r$ , regardées comme fonctions de  $\theta$ .

On a de plus l'intégrale première des forces vives, (1) donne

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial t} &= \\ Xu + Yv + Zw - g(v \sin \theta + w \cos \theta) &= \\ = Xu + Yv - gh' \frac{\partial \theta}{\partial t} &\text{ par (3)}_1 \text{ ou (3)}_2. \end{aligned}$$

(2) donne :

$$\begin{aligned} Ap \frac{\partial p}{\partial t} + Aq \frac{\partial q}{\partial t} + Cr \frac{\partial r}{\partial t} &= mp(h \cos \theta - h' \sin \theta)Y \\ &\quad - m(h \sin \theta + h' \cos \theta)Z \\ &\quad - mX[(h \cos \theta - h' \sin \theta)q \\ &\quad - (h \sin \theta + h' \cos \theta)r] \\ &= -mYv - mZw - mXu \end{aligned} \quad \text{par (3)}_1, (3)_2, (3)_3.$$

D'où l'intégrale première des forces vives  $\frac{1}{2}m(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{1}{2}(Ap^2 + Aq^2 + Cr^2) + mgh = H$  qui, connaissant  $u, v, w, q, r$  en fonction de  $\theta$ , ramène, par  $p = \frac{\partial \theta}{\partial t}$ , la détermination du temps à une quadrature.

### III c) Cas de la toupie sphérique avec roulement

Alors :  $h = R - a \cos \theta$ ,  $h' = a \sin \theta$ ;  $h \cos \theta - h' \sin \theta = R \cos \theta - a$ ;  $h \sin \theta + h' \cos \theta = R \sin \theta$ .

Le système (4) devient :

$$\begin{cases} A \frac{\partial q}{\partial \theta} - (Cr - Aq \cot \theta) = -m(R \cos \theta - a) \\ C \frac{\partial r}{\partial \theta} = mR \sin \theta \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{q(R - a \cos \theta)}{\sin \theta} \right) \end{cases} \times \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{q(R - a \cos \theta)}{\sin \theta} \right) \quad (4)$$

Éliminant le crochet des seconds membres et intégrant, on retrouve l'intégrale première caractéristique de la toupie sphérique :

$$ARq \sin \theta + C(R \cos \theta - a)r = kR, \quad (J)$$

rencontrée plus haut.

On a ensuite, par (5),

$$u = q(R \cos \theta - a) - Rr \sin \theta. \quad (5)$$

Prenons  $r$  comme inconnue ; soit

$$\Delta = AR^2 \sin^2 \theta + C(R \cos \theta - a)^2.$$

On a :

$$q = \frac{kR - C(R \cos \theta - a)r}{AR \sin \theta};$$

$$u = \frac{k(R \cos \theta - a)}{A \sin \theta} - \frac{\Delta r}{AR \sin \theta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{-\Delta}{AR \sin \theta} \frac{\partial r}{\partial \theta} + \frac{k}{A \sin^2 \theta} [a \cos \theta - R] - \frac{r}{AR \sin^2 \theta} \times [-\Delta \cos \theta + 2R \sin^2 \theta (A - C)R \cos \theta + Ca].$$

La seconde équation (4) donne alors

$$\begin{aligned} & \left( C + \frac{m\Delta}{A} \right) \frac{\partial r}{\partial \theta} - \frac{mkR}{A \sin \theta} [a \cos \theta - R] \\ & - \frac{mkR}{A \sin \theta} [R - a \cos \theta] + \frac{mC(R - a \cos \theta)(R \cos \theta - a)r}{A \sin \theta} \\ & + \frac{mr}{A \sin \theta} \left[ -\Delta \cos \theta + \sin \theta \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} \right], \end{aligned}$$

qui se réduit et donne :

$$(AC + m\Delta) \frac{\partial r}{\partial \theta} + mr \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} + \frac{mr}{\sin \theta} [C(R - a \cos \theta)(R \cos \theta - a) - \Delta \cos \theta] = 0$$

ou

$$(AC + m\Delta) \frac{\partial r}{\partial \theta} + mr \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} + mRr [R(C - A) \cos \theta - AC] \sin \theta = 0.$$

Or

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \theta} = 2R[R(A - C) \cos \theta + aC] \sin \theta.$$

Il reste donc

$$(AC + m\Delta) \frac{\partial r}{\partial \theta} + \frac{mr}{2} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} = 0;$$

ce qui entraîne

$$r = \frac{k_1}{\sqrt{AC + m\Delta}},$$

$k_1$  désignant une nouvelle constante d'intégration. Il vient ensuite :

$$q = \frac{k}{A \sin \theta} + \frac{k_1 C(a - R \cos \theta)}{AR \sin \theta \sqrt{AC + m\Delta}};$$

$$u = \frac{k(R \cos \theta - a)}{A \sin \theta} - \frac{k_1 \Delta}{AR \sin \theta \sqrt{AC + m\Delta}}.$$

### Calcul de v, w, p

Les équations (3) donnent aussi :

$$\begin{cases} v + p(R \cos \theta - a) = 0 \\ w - pR \sin \theta = 0 \end{cases} \implies v^2 + w^2 = p^2(R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta) = p^2(a^2 - R^2 + 2Rh).$$

Par ailleurs l'intégrale des forces vives s'écrit :

$$mu^2 + m(v^2 + w^2) + Ap^2 + Aq^2 + Cr^2 + 2mgh - 2H = 0.$$

On a du reste vu plus haut que  $\Delta(Aq^2 + Cr^2) = k^2R^2 + ACu^2$  ; donc  $p^2[A + m(a^2 - R^2 + 2Rh)] + \frac{1}{\Delta}[k^2R^2 + (AC + m\Delta)u^2] + 2mgh - 2H = 0$  qui résolue en  $p = \frac{\partial \theta}{\partial t}$  ramène la détermination du temps en fonction de  $\theta$ , à une quadrature. Enfin  $W^2$ , carré de la vitesse scalaire du centre de gravité, est donnée par  $W^2 = u^2 + v^2 + w^2 = u^2 + p^2(a^2 - R^2 + 2Rh)$ . On élimine facilement  $p$  : cela donne

$$\begin{aligned} [A + m(a^2 - R^2 + 2Rh)]W^2 &= \\ & [A + m(a^2 - R^2 + 2Rh)]u^2 \\ & - \frac{1}{\Delta}[k^2R^2 + (AC + m\Delta)u^2](a^2 - R^2 + 2Rh) \\ & - 2(mgh - H)(a^2 - R^2 + 2Rh) \\ & = \frac{u^2}{\Delta}[A\Delta - AC(a^2 - R^2 + 2Rh)] \\ & - \left( \frac{k^2R^2}{\Delta} + 2mgh - 2H \right) (a^2 - R^2 + 2Rh). \end{aligned}$$

Le coefficient de  $u^2$  se réduit et donne :

$$A^2 R^2 \sin^2 \theta + AC(R \cos \theta - a)^2 - AC(a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta) = A(A - C)R^2 \sin^2 \theta$$

de sorte que

$$[A + m(a^2 - R^2 + 2Rh)]W^2 = \frac{A - C}{A\Delta} \left[ kR(R \cos \theta - a) - \frac{k_1 \Delta}{\sqrt{AC + m\Delta}} \right]^2 - (a^2 - R^2 + 2Rh) \left( \frac{k^2 R^2}{\Delta} + 2mgh - 2H \right).$$

Le coefficient de  $\frac{k^2 R^2}{\Delta}$  s'écrit :

$$\frac{A - C}{A} (R \cos \theta - a)^2 - (a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta) = \frac{1}{A} [(A - C)R^2 \cos^2 \theta - 2(A - C)ar \cos \theta + (A - C)a^2 - Aa^2 - AR^2 + 2Aar \cos \theta] = -\frac{\Delta}{A};$$

il reste donc :

$$[A + m(a^2 - R^2 + 2Rh)]W^2 = \frac{A - C}{A} \left[ \frac{k_1^2 \Delta}{AC + m\Delta} - \frac{2kk_1 R(R \cos \theta - a)}{\sqrt{AC + m\Delta}} \right] - \frac{k^2 R^2}{A} - 2(a^2 - R^2 + 2Rh)(mgh - H). \quad (7)$$

On a d'ailleurs :

$$\Delta = AR^2 \sin^2 \theta + C(R \cos \theta - a)^2; \quad h = R - a \cos \theta.$$

D'où  $\Delta = \frac{1}{a^2} [(C - A)R^2 h^2 + [(A - C)R^2 + Ca^2](2Rh + a^2 - R^2)]$  et  $R \cos \theta - a = \frac{1}{a} [R^2 - a^2 - Rh]$ .

La formule (7) donne donc explicitement  $W^2$  en fonction de  $h$ .

### III d) Cas où $\theta$ est constant

Si  $\theta$  est constant, dans le cas de la toupie sphérique, on a  $p = 0$ , donc  $v = w = 0$ .

On a toujours l'intégrale caractéristique de la toupie sphérique :  $ARq \sin \theta_0 + C(R \cos \theta_0 - a)r = Rk$ .

De plus (2)<sub>2</sub> et (2)<sub>3</sub> donnent encore, compte tenu de (1)<sub>1</sub> :

$$A \frac{\partial q}{\partial t} + m(R \cos \theta_0 - a) \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ C \frac{\partial r}{\partial t} - mR \sin \theta_0 \frac{\partial u}{\partial t} = 0;$$

d'où  $Aq + m(R \cos \theta_0 - a)u = \alpha$ ;  $Cr - mR \sin \theta_0 u = \beta$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes (ces deux équations entraînent d'ailleurs l'intégrale caractéristique de la toupie sphérique). Enfin l'équation (3) donne  $u = q(R \cos \theta_0 - a) - Rr \sin \theta_0$ .

Donc  $q, r, u$  sont constants.

### III b) Retour au cas général; mouvement sans précession ni rotation propre

On a donc  $\psi' = 0 \implies q = 0$ ; et  $r = 0$ ;  $p = \frac{\partial \theta}{\partial t}$ ;

On a par (1)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = X \\ \frac{\partial v}{\partial t} - w \frac{\partial \theta}{\partial t} = Y - g \sin \theta \\ \frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial \theta}{\partial t} = Z - g \sin \theta \end{cases}.$$

On a aussi par (2)  $A \frac{\partial p}{\partial t} = m(h \cos \theta - h' \sin \theta)Y - m(h \sin \theta + h' \cos \theta)Z$  et  $X = 0$ .

Par (3)  $u = 0$ ;  $v + (h \cos \theta - h' \sin \theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} = w - (h \sin \theta + h' \cos \theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$ .

On a ensuite

$$\begin{aligned} Y \cos \theta - Z \sin \theta &= \cos \theta \frac{\partial v}{\partial t} - \sin \theta \frac{\partial w}{\partial t} \\ &\quad - (w \cos \theta + v \sin \theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} \\ &= \cos \theta \frac{\partial v}{\partial t} - \sin \theta \frac{\partial w}{\partial t} - h' \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2; \\ Y \sin \theta + Z \cos \theta &= \sin \theta \frac{\partial v}{\partial t} + \cos \theta \frac{\partial w}{\partial t} \\ &\quad - (w \sin \theta - v \cos \theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} + g \\ &= \sin \theta \frac{\partial v}{\partial t} + \cos \theta \frac{\partial w}{\partial t} - h \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + g. \end{aligned}$$

Mais (2) donne

$$\begin{aligned} A \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= mh(Y \cos \theta - Z \sin \theta) \\ &\quad - mh'(Y \sin \theta + Z \cos \theta) \\ &= mh \left( \cos \theta \frac{\partial v}{\partial t} - \sin \theta \frac{\partial w}{\partial t} \right) \\ &\quad - mh' \left( \sin \theta \frac{\partial v}{\partial t} + \cos \theta \frac{\partial w}{\partial t} \right) \\ &\quad - mhh' \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + mhh' \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 - mgh'. \end{aligned}$$

Mais  $w \cos \theta + v \sin \theta = h' \frac{\partial \theta}{\partial t}$  et  $w \sin \theta - v \cos \theta = h \frac{\partial \theta}{\partial t}$  donnent :

$$\begin{aligned} \cos \theta \frac{\partial w}{\partial t} + \sin \theta \frac{\partial v}{\partial t} - h' \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 &= h' \frac{d^2 \theta}{dt^2} + h'' \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \\ \sin \theta \frac{\partial w}{\partial t} - \cos \theta \frac{\partial v}{\partial t} + h' \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 &= h \frac{d^2 \theta}{dt^2} + h' \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2. \end{aligned}$$

Finalement il reste :

$$A \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mh' \left[ (h + h'') \left( \frac{\partial\theta}{\partial t} \right)^2 + h' \frac{d^2\theta}{dt^2} \right] - mh^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} - mgh'$$

ou  $[A + m(h^2 + h'^2)] \frac{d^2\theta}{dt^2} + mh'(h + h'') \left( \frac{\partial\theta}{\partial t} \right)^2 + mgh'$  qui définit  $\theta$  en fonction du temps et s'intègre classiquement en regardant  $p = \frac{\partial\theta}{\partial t}$  comme fonction de  $\theta$ ; ce qui donne une équation linéaire en  $p^2$ . On obtient donc les mouvements sans précession ni rotation propre par trois quadratures.

**Stabilité** : soit pour  $\theta = 0$ , un sommet  $S$  du contour  $\implies h' = 0$ .

**Méplat** : courbure nulle  $\implies h + h'' = \infty$ .

• 1) **Sommet non méplat** : au voisinage de  $\theta = 0$ ,  $h(\theta) = h_0 + \frac{1}{2}h''_0\theta^2 + \dots$ . Si  $\theta$  reste petit :  $(A + mh_0^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgh'_0 = 0$ . Il y aura stabilité si  $h'_0 > 0$ .

• 2) **Sommet avec méplat** :  $\theta \geq 0$ ;

$$h = h_0 + K\theta^\alpha + \dots$$

$$h' = K\alpha\theta^{\alpha-1} + \dots \text{ sommet implique } \alpha > 1.$$

$$h'' = K\alpha(\alpha - 1)\theta^{\alpha-2} + \dots \text{ méplat implique } 2 > \alpha.$$

Alors  $h' \rightarrow 0$  et  $h + h'' \rightarrow \infty$  quand  $\theta \rightarrow 0$ .

$$h'(h + h'') \text{ aura une limite si } 2\alpha - 3 \geq 0 \implies \alpha \geq \frac{3}{2}.$$

• Soit d'abord  $\alpha > \frac{3}{2}$ ; (sommet; méplat si  $\alpha < 2$ )  
 $h' \rightarrow 0$ ;  $h + h'' \rightarrow \infty$ ;  $h'(h + h'') \rightarrow 0$ .

Pour  $\theta$  petit, on a  $(A + mh_0^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgK\alpha\theta^{\alpha-1} = 0$

ou  $(A + mh_0^2) \left( \frac{\partial\theta}{\partial t} \right)^2 + 2mgK\theta^\alpha = C$ .

$\frac{\sqrt{A+mh_0^2}d\theta}{[C-2mgK\theta^\alpha]^{\frac{1}{2}}} = dt$ ; si  $K > 0$ , il y a stabilité (le radicande du dénominateur peut devenir négatif si  $\theta$  devient trop grand).

• Soit maintenant  $\alpha = \frac{3}{2}$ , alors  $h'(h + h'') \rightarrow \frac{9K}{8}$ , et pour  $\theta$  petit on a

$$(A + mh_0^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{9mK^2}{8} \left( \frac{\partial\theta}{\partial t} \right)^2 + \frac{3mgK}{2} \sqrt{\theta} = 0;$$

$\frac{\partial\theta}{\partial t} = p$  considéré comme fonction de  $\theta$  donne :

$$(A + mh_0^2)p \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{9mK^2}{8} p^2 + \frac{3mgK}{2} \sqrt{\theta} = 0;$$

$p^2 = \omega$  donne :

$$(A + mh_0^2) \frac{\partial\omega}{\partial\theta} + \frac{9mK^2}{4} \omega + 3mgK \sqrt{\theta} = 0 \\ \implies \omega = \omega_1 \exp \left[ \frac{-9mK^2\theta}{A + mh_0^2} \right]$$

avec  $(A + mh_0^2) \frac{\partial\omega_1}{\partial\theta} + 3mgK \sqrt{\theta} \exp \left[ \frac{-9mK^2\theta}{A + mh_0^2} \right] = 0$ . D'où

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{3mgK}{A + mh_0^2} \int_0^\theta \exp \left[ \frac{-9mK^2\tau}{A + mh_0^2} \right] \sqrt{\tau} d\tau = \left( \frac{\partial\theta}{\partial t} \right)^2.$$

D'où comme plus haut stabilité si  $K > 0$ .

### I a) Cas de $f = 0$

On a  $X = 0$ .  $Y \cos \theta - Z \sin \theta = 0$ ; les équations donnent :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + q(w - v \cot \theta) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + qu \cot \theta - pw = Y - g \sin \theta \\ \frac{\partial w}{\partial t} + pv - qu = Z - g \cos \theta \end{cases}; \quad (1)$$

$$\begin{cases} A \frac{\partial p}{\partial t} + (Cr - Aq \cot \theta)q = -mh'(Y \sin \theta + Z \cos \theta) \\ A \frac{\partial q}{\partial t} - (Cr - Aq \cot \theta)p = 0 \\ A \frac{\partial r}{\partial t} = 0 \end{cases}; \quad (2)$$

puis  $v \sin \theta + w \cos \theta - ph' = 0$ .

On a donc :  $r = r_0$ ;  $A \frac{\partial q}{\partial \theta} - Cr_0 + Aq \cot \theta = 0$  d'où  $q = \frac{\omega}{\sin \theta} + \frac{C}{A} r_0 \cot \theta$  ( $\omega$  constante).

Puis  $\cos \theta \frac{\partial v}{\partial t} - \sin \theta \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{qu}{\sin \theta} - h'p^2 = 0$  (en combinant (1)<sub>2</sub> et (1)<sub>3</sub> et utilisant la relation  $Y \cos \theta - Z \sin \theta = 0$ ).

Soit donc  $\alpha = v \cos \theta - w \sin \theta$ ; ce qui donne  $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{q\alpha}{\sin \theta} = 0$ ;  $\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{q\alpha}{\sin \theta} = 0 \implies u^2 + \alpha^2 = H_1$ .

Enfin le théorème des forces vives donne  $p = \frac{\partial\theta}{\partial t}$  :

$$m(u^2 + v^2 + w^2) + Ap^2 + Aq^2 + Cr^2 + 2mgh = H_2$$

qui donne ici, moyennant les précédentes équations :

$$(A + mh'^2)p^2 + 2mgh + \frac{A}{\sin^2 \theta} \left[ w + \frac{Cr_0}{A} \cos \theta \right]^2 = H.$$

On obtient le temps par une quadrature (c'est-à-dire l'évolution de  $\theta$ ).

### I b) Cas sphérique

$$h = R - a \cos \theta; h' = a \sin \theta.$$

### I c) Pied circulaire

$h = b \cos \theta + r \sin \theta$ ;  $h' = r \cos \theta - b \sin \theta$ ; d'où des quadratures faciles à discuter.

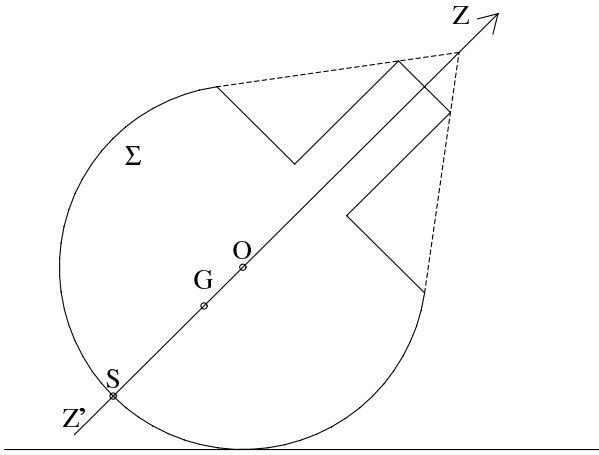


Figure 5.

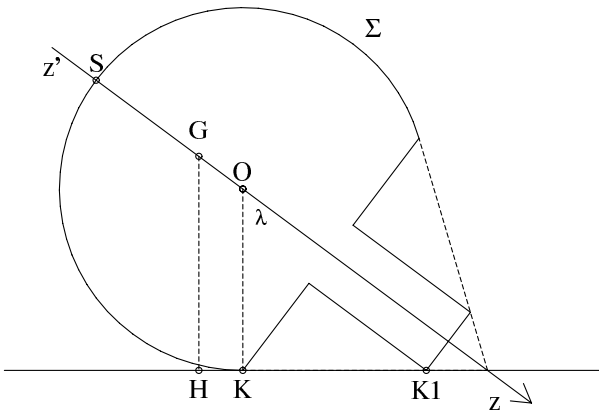


Figure 6.

**V Cas du Tippe-Top**

Quand le contact  $K$  a lieu sur la calotte  $\Sigma$ , on a  $0 < \theta < \lambda < \pi$  et on a  $R \sin \lambda = \rho - \ell \cot \lambda$  ( $\lambda$  est l'angle  $(z'z, OK)$  lorsque le manche est aussi en contact avec le plan  $P$ ; de plus pour éviter le risque de confusion entre le rayon noté  $r$  dans l'énoncé du petit cercle  $\gamma$  avec la notation usuelle  $r$  de la troisième composante du vecteur rotation instantané du solide par rapport à  $Gxyz$ , Delsarte remplace ce rayon  $r$  par la lettre  $\rho$ ).  
Ou

$$R^2 = (1 + \cot^2 \lambda)(\rho - \ell \cot \lambda)^2$$

$$\implies \ell^2 \cot^4 \lambda - 2\rho\ell \cot^3 \lambda + (\ell^2 + \rho^2) \cot^2 \lambda - 2\rho\ell \cot \lambda - R^2 = 0.$$

(Dans le cas :  $\rho = \frac{R}{5}$ ,  $\ell = \frac{4R}{5}$ , cela donne :  $16 \cot^4 \lambda - 8 \cot^3 \lambda + 17 \cot^2 \lambda - 8 \cot \lambda - 25 = 0$ ).

**Étude de  $h(\theta)$ ,  $h'(\theta)$ ,  $h''(\theta)$**

- Pour  $0 \leq \theta \leq \lambda$ ,  $h(\theta)$  correspond au contour sphérique :  $h(\theta) = -R - a \cos \theta$ ;  $h'(\theta) = a \sin \theta$ ;  $h''(\theta) = a \cos \theta$ .

- Pour  $\lambda \leq \theta \leq \pi$  :  $h(\theta)$  correspond au contour réduit au cercle  $\gamma$ ; c'est-à-dire au point  $K_1$  dans un plan méridien :

$$h(\theta) = -(\ell - R \cos \lambda) \cos \theta + \rho \sin \theta - a \cos \theta$$

ou

$$h(\theta) = r \sin \theta - (\ell + a - R \cos \lambda) \cos \theta.$$

Il y a continuité pour  $\theta = \lambda$  :  $\rho \sin \lambda - \ell \cos \lambda + R^2 \cos^2 \lambda = R$  (qui équivaut à l'équation en  $\lambda$ ). Mais  $h'(\theta)$  est discontinue :

$$h'(\theta) = \rho \cos \theta + (\ell + a - R \cos \lambda) \sin \theta,$$

$$h''(\theta) = -\rho \sin \theta + (\ell + a - R \cos \lambda) \cos \theta.$$

Au moment du choc,  $h + h''$  passe de la valeur  $R$ , à la valeur 0.

**Étude du choc**

On suppose qu'il y a choc avec frottement en  $K$  et  $K_1$ . Soit  $x, y, z$  la percussion en  $K$ ;  $x_1, y_1, z_1$  la percussion en  $K_1$  (on prend toujours le trièdre intermédiaire  $Gxyz$ ).

Soient

$$\begin{cases} u_0, v_0, w_0 ; p_0, q_0, r_0 \text{ l'état des vitesses avant} \\ \text{le choc (immédiatement avant),} \\ u_1, v_1, w_1 ; p_1, q_1, r_1 \text{ l'état des vitesses après} \\ \text{le choc (immédiatement après);} \end{cases}$$

puis  $[u], [v], [w]$ ;  $[p], [q], [r]$ , le saut des vitesses.

Les équations de la dynamique donnent

$$\begin{cases} [u] = x + x_1 ; A[p] = m(R \cos \lambda - a)y - mR \sin \lambda z \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad - m(\ell + a - R \cos \lambda)y_1 - m\rho z_1; \\ [v] = y + y_1 ; A[q] = -m(R \cos \lambda - a)x \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + m(\ell + a - R \cos \lambda)x_1; \\ [w] = z + z_1 ; A[r] = mR \sin \lambda x + m\rho x_1. \end{cases}$$

À quoi s'ajoute une condition cinématique, en  $K_1$  après le choc :

$$v_1 \sin \lambda + w_1 \cos \lambda - p_1[\rho \cos \lambda + (\ell + a - R \cos \lambda) \sin \lambda] = 0.$$

Tandis qu'en  $K$ , avant le choc on a :

$$v_0 \sin \lambda + w_0 \cos \lambda - p_0 a \sin \lambda = 0.$$

Ce qui donne en soustrayant :

$$[v] \sin \lambda + [w] \cos \lambda - [p]\{\rho \cos \lambda + (\ell + a - R \cos \lambda) \sin \lambda\} = p_0[\rho \cos \lambda + (\ell - R \cos \lambda) \sin \lambda].$$

On a donc 7 équations aux 12 inconnues :  $[u]$ ,  $[v]$ ,  $[w]$ ,  $[p]$ ,  $[q]$ ,  $[r]$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ .

L'élimination des sauts de vitesse est facile, et donne une condition pour les composantes des deux percussions.

$$\begin{aligned} A\{(y + y_1) \sin \lambda + (z + z_1) \cos \lambda\} + \dots \\ + [m(R \cos \lambda - a)y - mR \sin \lambda z \\ - m(\ell + a - R \cos \lambda)y_1 - mpz_1] \\ \times [\rho \cos \lambda + (\ell + a - R \cos \lambda) \sin \lambda] \\ = Ap_0[\rho \cos \lambda + (\ell - R \cos \lambda) \sin \lambda]. \end{aligned}$$

On peut introduire les composantes normales et tangentielles, (dans le plan méridien du choc) des percussions :

$$\begin{cases} \mathcal{N} = y \sin \lambda + z \cos \lambda ; & \mathcal{N}_1 = y_1 \sin \lambda + z_1 \cos \lambda \\ \mathcal{T} = y \cos \lambda - z \sin \lambda ; & \mathcal{T}_1 = y_1 \cos \lambda - z_1 \sin \lambda \end{cases}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} A[\mathcal{N} + \mathcal{N}_1] + m[-R - a \cos \lambda]\mathcal{T} \\ - a \sin \lambda \mathcal{N} + (R - a \cos \lambda)\mathcal{T}_1 \\ - [\rho \cos \lambda + (\ell + a - R \cos \lambda) \sin \lambda]\mathcal{N}_1 \\ \times [\rho \cos \lambda + (\ell + a - R \cos \lambda) \sin \lambda] \\ = Ap_0[\rho \cos \lambda + (\ell - R \cos \lambda) \sin \lambda]. \end{aligned}$$

Désignons par  $d$  la distance  $KK_1$ , prise positivement :  $d = \rho \cos \lambda + (\ell - R \cos \lambda) \sin \lambda = \frac{\ell}{\sin \lambda}$ .

Il reste :

$$\begin{aligned} \frac{A}{d}(\mathcal{N} + \mathcal{N}_1) + m[(R - a \cos \lambda)(\mathcal{T} + \mathcal{T}_1) \\ - a \sin \lambda(\mathcal{N} + \mathcal{N}_1) - d\mathcal{N}_1] \left(1 + \frac{a \sin \lambda}{d}\right) = Ap_0, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} A(\mathcal{N} + \mathcal{N}_1) + m \left[ (R - a \cos \lambda)(\mathcal{T} + \mathcal{T}_1) \right. \\ \left. - a \sin \lambda(\mathcal{N} + \mathcal{N}_1) - \frac{\ell \mathcal{N}_1}{\sin \lambda} \right] \left( \frac{\ell}{\sin \lambda} + a \sin \lambda \right) = \frac{A \ell p_0}{\sin \lambda}. \end{aligned}$$

Dans le cas numérique  $\ell = \frac{4R}{5}$ ,  $\cos \lambda = -\frac{3}{5}$ ,  $\sin \lambda = \frac{4}{5}$  et

$$\begin{aligned} A(\mathcal{N} + \mathcal{N}_1) + m \left[ \left( R + \frac{3a}{5} \right) (\mathcal{T} + \mathcal{T}_1) \right. \\ \left. - a \frac{4a}{5} (\mathcal{N} + \mathcal{N}_1) - R\mathcal{N}_1 \right] \left( R + \frac{4a}{5} \right) = ARp. \end{aligned}$$

Dans le cas présent le choc a lieu,  $\theta$  croissant, donc  $p_0 = \frac{\partial \theta}{\partial t}$  avant le choc est  $> 0$ ; de plus  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{N}_1$  sont  $> 0$  et  $|\mathcal{T}| < f\mathcal{N}$ ;  $|\mathcal{T}_1| < f\mathcal{N}_1$ .

On a donc :

$$\begin{aligned} m \left( R + \frac{3a}{5} \right) \left( R + \frac{4a}{5} \right) (\mathcal{T} + \mathcal{T}_1) \\ > \left[ \frac{4am}{5} \left( R + \frac{4a}{5} \right) - A \right] + mr \left( R + \frac{4a}{5} \right) \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N} + \mathcal{N}_1}. \end{aligned}$$

Si le crochet est  $> 0$ , cela donne une borne inférieure pour  $f$ .

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} A[p] = m \left[ (R - a \cos \lambda)(\mathcal{T} + \mathcal{T}_1) \right. \\ \left. - a \sin \lambda(\mathcal{N} + \mathcal{N}_1) - \frac{\ell \mathcal{N}_1}{\sin \lambda} \right] \\ = m \left[ \left( R + \frac{3a}{5} \right) (\mathcal{T} + \mathcal{T}_1) - \frac{4a}{5} (\mathcal{N} + \mathcal{N}_1) - R\mathcal{N}_1 \right]. \end{aligned}$$

Or, l'inégalité exprimant  $p_0 > 0$  donne :

$$\begin{aligned} m \left[ \left( R + \frac{3a}{5} \right) (\mathcal{T} + \mathcal{T}_1) > \right. \\ \left. \frac{4a}{5} (\mathcal{N} + \mathcal{N}_1) + mR\mathcal{N}_1 \right] - \frac{A(\mathcal{N} + \mathcal{N}_1)}{R + \frac{4a}{5}}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } [p] \geq \frac{(\mathcal{N} + \mathcal{N}_1)}{R + \frac{4a}{5}}.$$

Puis

$$\begin{aligned} AR[p_0 + [p]] \geq A(\mathcal{N} + \mathcal{N}_1) - \frac{A(\mathcal{N} + \mathcal{N}_1)}{R + \frac{4a}{5}} \\ + m \left( R + \frac{3a}{5} \right) \left( R + \frac{4a}{5} \right) (\mathcal{T} + \mathcal{T}_1) \\ - \frac{4am}{5} \left( R + \frac{4a}{5} \right) (\mathcal{N} + \mathcal{N}_1) \\ - mr \left( R + \frac{4a}{5} \right) \mathcal{N}_1 \\ \geq \frac{4a}{5R + 4a} \left[ A - m \left( R + \frac{4a}{5} \right)^2 \right] (\mathcal{N} + \mathcal{N}_1) \\ + m \left( R + \frac{3a}{5} \right) \left( R + \frac{4a}{5} \right) (\mathcal{T} + \mathcal{T}_1) \\ - mR \left( R + \frac{4a}{5} \right) \mathcal{N}_1; \end{aligned}$$

$$\begin{cases} R + f \left( R + \frac{3a}{5} \right) + \left( R + \frac{4a}{5} \right) \leq \frac{20aA}{m(5R + 4a)^2} \\ (2 + f) \frac{R}{a} + \frac{1}{5}(4 + 3f) \leq \frac{20A}{m(5R + 4a)^2} \cdot \frac{16a}{5(5R + 4a)} \end{cases}$$



## Tippe-Top avec Maple ?

Les lecteurs sont invités à concevoir un programme Maple qui anime le mouvement de la toupie Tippe-Top en utilisant les équations précédentes et à me le faire parvenir. Une version compatible avec Maple V.5 est souhaitée.

## Références

- [1] *André Weil (1906-1998)* (supplément au numéro 80 de la *Gazette des mathématiciens*), Paris, 1999.
- [2] R.J. Cohen, « The tippe-Top revisited », *American journal of physics*, **45** (1) (1977) 12–17. (Avec la photo de Wolfgang Pauli découvreur du spin de l'électron et de Niels Bohr, deux prix Nobel de Physique, fascinés au début des années 50, par le mouvement du Tippe-Top, photo que l'on retrouve en tapant sous google « Tippe-Top 53 » ou « Physics, Toys and Art »).
- [3] J. Walker, « Anagyres », *Pour la science* (décembre 1979) 109–114.
- [4] J. Walker, « Toupies », *Pour la science* (mai 1981) 128–133.
- [5] J. Walker, *Expérience d'Amateur*, Belin, 1982, 19–24.

## Sites intéressants

- <http://www1.physik.tu-muenchen.de/~cucke/ftp/lectures/udine2003.pdf>
- <http://www.physics.brown.edu/physics/demopages/Demo/solids/demos/1q6030.html>
- <http://www.havingasoftware.nl/software/ThreeDimSim/ex8/tippetop.htm>
- <http://public.planetmirror.com/pub/irtc/anim/2001-04-15/>
- <http://www.physik.uni-augsburg.de/~wobsta/tippetop/movie.shtml.en>
- <http://www.physik.uni-augsburg.de/~wobsta/tippetop/index.shtml.en>
- <http://www.science.unitn.it/~karwasz/Tippetop.mpg>
- <http://scienceworld.wolfram.com/physics/TippeTop.html>
- <http://www.gt-labs.com/tippetop.html> (aller au maximum à droite du site)
- [http://www.sandstrum.com/brian/T\\_TIPPE.HTML](http://www.sandstrum.com/brian/T_TIPPE.HTML)
- <http://www.yorku.ca/marko/ComPhys/TippyTop/TippyTop.html#MapleAutoBookmark1>
- <http://www.yorku.ca/marko/ComPhys/TippyTop/TippyTop.html>

\*\*\*\*\*