

Le compte des rebonds

Cette partie solution comporte :

- une partie de préliminaires
- deux parties de découpages en sous questions
 - l'une géométrique
 - l'autre dans l'esprit de l'algèbre linéaire
- une solution “purement géométrique” (répondant aux questions de la partie géométrique)
- une solution par l'algèbre linéaire (répondant aux questions de la partie linéaire)
- une vérification (Maple) par puissances de matrices
- une hypothétique preuve d'impossibilité informatique
- une hypothétique preuve d'impossibilité physique

Préliminaires

Origine du problème

L'idée d'origine m'a été transmise depuis l'Ecosse par P.Charollois qui y faisait un stage, il s'agissait alors de la version "algèbre linéaire"

Comme l'irruption de π dans un tel énoncé était très intrigante, j'ai utilisé les grands moyens : 1K de papier brouillon + 1M d'heures de réflexion jusqu'à comprendre l'apparition de l'ellipse, du cercle, des angles

Présuppositions pour le compte de rebonds

- Tous les rebonds (entres les objets) sont supposés parfaitement élastiques : il y a conservation de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement
- Les rebonds entre le mur et le petit objet se font avec conservation de l'énergie cinétique (pas d'énergie absorbée par le mur)
- Les centres des objets sont situés sur une perpendiculaire au mur (sans déviations)
- Le module de la vitesse initiale inconnue $\|\vec{V}\|$ est supposé être suffisamment petit pour que l'on ait pas à tenir compte de corrections relativistes

le compte de rebonds : version géométrie

On a comme hypothèses : n est un entier et $M=(10^n)^2m$, on notera $N=(10^n)$ et $K=N^2$
On veut calculer le nombre (exact!) de rebonds

A Un lemme géométrique

Les deux questions qui suivent prouvent le même résultat qui servira dans l'étude des rebonds

1 version géométrie pure

Sur un cercle de centre O et de rayon non nul, on considère trois points A, B, M , M différent de A et de B . Prouver que l'angle entre OA et OB est double de l'angle entre MA et MB . La formulation volontairement imprécise précédente est là pour vous amener à bien préciser de quels types d'angles vous parlez ici

2 version géométrie calculée

a, b, m sont trois complexes de module 1, m distinct de a et b . On suppose que $b=ua$ et que $\frac{m-b}{|m-b|} = v \frac{m-a}{|m-a|}$. Comparez u et v

B La mise en équations

Toutes les vitesses étant sur le même axe on va se dispenser des \vec{v} et autres et ne noter que leurs mesures algébriques sur l'axe Ox que vous devinez (du mur vers la droite)

A l'instant 0 (avant le premier choc) les vitesses sont $v_0 = 0$ et $V_0 = -V$, après le premier choc les vitesses vont être $v_1 = ?$ et $V_1 = ?$, puis après le premier rebond petite-masse-mur, les vitesses sont $v_2 = -v_1$ et $V_2 = V_1$

Après le choc numéro $2n-1$ les vitesses seront $v_{2n-1} = ?$ et $V_{2n-1} = ?$, puis après le rebond petite-masse-mur, les vitesses sont $v_{2n} = -v_{2n-1}$ et $V_{2n} = V_{2n-1}$

1 Traduction des lois physiques

Exprimer les deux quantités qui se conservent, avant et après le choc $2n+1$

2 Traduction géométrique

On note M_k le point de coordonnées (V_k, v_k)

a Montrer que la conservation de l'énergie cinétique avant-après le choc $2n+1$ s'exprime au moyen de l'appartenance de M_k à une cône fixe. Représenter géométriquement cette cône (surtout pas en axes orthonormés!) et placer le point de départ M_0

b Indiquer comment M_{2n+2} se déduit de M_{2n+1}

c Montrer que la conservation de la quantité de mouvement avant-après le choc $2n+1$ s'exprime au moyen de l'appartenance des points M_{2k} et M_{2k+1} à une droite dont on précisera la pente

3 Re-traduction géométrique

Pour pouvoir exploiter les propriétés des angles et des cercles, on fait un changement de repère : au lieu de placer V_k en abscisse on mettra $X_k = \sqrt{M}V_k$ et de même on remplace les v_k des ordonnées par des $Y_k = \sqrt{m}v_k$. Le point M_k est donc remplacé par N_k de composantes (X_k, Y_k)

a que devient la cône Γ ?

b que deviennent les résultats de la question précédente ?

c dessiner soigneusement sur un cercle de rayon 10cm une douzaine des points N_k en utilisant les remarques faites à la question précédente (on remplacera la pente ridicule des sécantes par une pente dessinable)

4 Exploitation de la géométrie

a utilisez le préliminaire pour décrire par des angles les positions des points N_{2k} et N_{2k+1}

Après le choc $n^{\circ}2k$ il y a 3 suites possibles pour les événements : dans les phrases qui viennent m est un raccourci pour "l'objet de masse m ", etc

- m repart en arrière plus vite que M en valeur absolue, et il y aura encore au moins un choc $m-M$

- m repart en arrière moins vite que M en valeur absolue, et il n'y aura plus choc m - M
- m continue vers l'avant (moins vite que M en valeur absolue) et il n'y aura plus choc m - M

Pour préciser ces évènements, on place sur le "grand cercle de la question précédente" des points A et B de part et d'autre du point Ω du cercle (c'est à dire $\Omega = (X = 10\text{cm}, Y = 0)$) distants de ce point d'un angle égal à $2\arctan(\sqrt{\frac{m}{M}})$. On nomme A celui d'ordonnée positive, on nomme aussi C le point du cercle qui est milieu de l'arc ΩA enfin O le centre de ce cercle

- b** prouver que OC est orthogonal aux segments $N_{2k}N_{2k+1}$
- c** selon la position de N_{2k} par rapport à A et à C , décrire la suite des évènements
- d** quel cas (très particulier) a été omis?

5 Trois cas particuliers

On garde les notations du préambule et de la question 4

Donner les exemples de n et k , n' et k' , n'' et k'' donnant lieu aux trois situations précédentes

Si vous n'arrivez pas à expliciter ces entiers, vous pouvez vous contenter de décrire quels calculs il aurait fallu faire pour les trouver

6 Le cas de $n=10$

Qu'avez-vous à faire pour savoir combien il y a de chocs?

Selon les possibilités de votre calculette, faites le

Indication : votre calculette ne peut pas

le compte de rebonds : version linéaire

On a une donnée : $M=(10^n)^2m$, on notera $N=(10^n)$ et $K=N^2$
On veut calculer le nombre (exact!) de rebonds

C la mise en équations

Toutes les vitesses étant sur le même axe on va se dispenser des \vec{v} et autres et ne noter que leurs mesures algébriques sur l'axe Ox que vous devinez (du mur vers la droite)

A l'instant 0 (avant le premier choc) les vitesses sont $v_0 = 0$ et $V_0 = -V$, après le premier choc les vitesses vont être $v_1 = ?$ et $V_1 = ?$, puis après le premier rebond petite-masse-mur, les vitesses sont $v_2 = -v_1$ et $V_2 = V_1$

Après le choc numéro $2n-1$ les vitesses seront $v_{2n-1} = ?$ et $V_{2n-1} = ?$, puis après le rebond petite-masse-mur, les vitesses sont $v_{2n} = -v_{2n-1}$ et $V_{2n} = V_{2n-1}$

1 traduction des lois physiques

exprimer les deux quantités qui se conservent, avant et après le choc $2n+1$

2 traduction matricielle

On note X_k la colonne $\begin{pmatrix} v_k \\ V_k \end{pmatrix}$

a Vérifier alors que la conservation avant-après le choc $2n+1$ s'exprime au moyen d'une formule

$$GX_{2n+1} = DX_{2n}$$

où G et D sont deux matrices fixes ne faisant intervenir que K

b Calculer X_{2n+1} puis X_{2n+2} en fonction de X_{2n} : on trouvera $X_{2n+2} = CX_{2n}$ avec une matrice C indépendante de n

3 transformation trigonométrique

On note $\theta = \arctan(N)$, re-calculer les termes de la matrice C en fonction de θ

Résumé des étapes précédentes : les évolutions des vitesses des objets sont régies par les puissances de la matrice $\begin{pmatrix} -\cos(2\theta) & -2\sin^2(\theta) \\ 2\cos^2(\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$

D Calcul des puissances de la matrice

θ est la variable naturelle, mais on suivra mieux les calculs avec $\alpha = \arctan(\frac{1}{N})$, et on commence donc par

1 recopiage

ré-écrire la matrice C en fonction de α

2 recherche des éléments propres

a calculer $Z(\lambda) = \det(C - \lambda I)$ où I est la matrice unité

b déterminer les racines de Z

c pour chacune des racines r, r' de Z, déterminer un vecteur U, U' non nul tel que $C U = r U$ et $C U' = r' U'$

On note P la matrice de colonnes U, U'

d calculer $C P$ puis $D = P^{-1} C P$ (on vérifiera que D est une matrice diagonale)

3 calcul de C^n

a calculer C en fonction de D

b calculer C^n en fonction de D^n

c calculer C^n

d calculer X_n

E Calcul du nombre de chocs

- 1 après combien de chocs le mouvement de M se retourne-t-il ?
- 2 à quelle condition concernant v_n et V_n n'a-t-on plus de choc?
- 3a en intégrant une inégalité simple, prouver que pour tout x positif :

$$x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan(x) \leq x$$

b calculer le nombre total de chocs

F Simulation

1 initialisations

a numériques

donner une valeur à n , en tirer N et K

b matricielles

écrire C en fonction de K , et la colonne des vitesses de départ

c fonctionnelles

écrire une fonction de calcul (dichotomique!!!) de C^p

2 expérimentations

essayer des valeurs de p jusqu'à avoir la composante V qui dépasse la composante v ; en fonction du signe de v au choc précédent conclure au nombre exact de chocs pour ce n

3 limitations

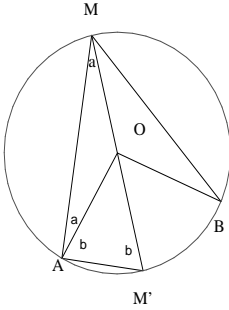
énoncer les contraintes physiques à satisfaire pour pouvoir réaliser l'expérience (que ce soit en vrai ou en simulation sur un écran)

pour $n=10$ il y a 31415926535 chocs

le compte de rebonds : version géométrie

G Un lemme géométrique

1 version géométrie pure



L'angle $\widehat{MAM'}$ est droit : $a+b = 2$, l'angle $\widehat{AOM'}$ vaut $\pi - 2b$, c'est à dire $2a$

De même l'angle $\widehat{M'OB}$ est double de $\widehat{M'MB}$ et c'est la relation de Chasles qui donne $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$. Les angles comme \widehat{AMB} sont des angles de droites donc modulo π , tandis que \widehat{AOB} est modulo 2π : on voit (un peu) cela quand A et B sont du côté Nord de la figure, \widehat{AOB} est strictement supérieur à π ... c'est bien modulo 2π

2 version géométrie calculée

je choisis des réels α, β, μ tels que $a = e^{i\alpha}$, $b = e^{i\beta}$, $m = e^{i\mu}$ si bien que $u = e^{i(\beta-\alpha)}$ et on veut comparer les directions de $m-b$ et $m-a$: à chaque fois on utilise "l'astuce de la bissectrice" $m-b = e^{i\mu} - e^{i\beta} = e^{i\mu} + e^{i(\beta+\pi)} = e^{i\frac{\mu+\beta+\pi}{2}}$ (un reel) et de la même façon $m-a = e^{i\mu} - e^{i\alpha} = e^{i\frac{\mu+\alpha+\pi}{2}}$ (un reel)

Donc le complexe v de module 1 qui fait passer de la direction de $m-a$ à celle de $m-b$ est $\pm e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}$, le \pm dépendant des signes des réels mis en facteur, dans les deux cas $v^2 = e^{i(\beta-\alpha)} = u$

On peut voir dans ces calculs tous les ingrédients du dessin précédent : l'angle droit c'est le $e^{i\frac{\pi}{2}}$ qui est apparu, le carré de v qui donne u contient toute la différence entre angle de droites et angles de demi-droites

H La mise en équations

1 Traduction des lois physiques

Les chocs impairs sont entre m et M , on a les deux conservations :

- énergie cinétique $\times 2$: $mv_{2k}^2 + MV_{2k}^2 = mv_{2k+1}^2 + MV_{2k+1}^2$
- quantité de mouvement : $mv_{2k} + MV_{2k} = mv_{2k+1} + MV_{2k+1}$

2 Traduction géométrique

a le point $M_k = (V_k, v_k)$ est toujours sur l'ellipse $Mx^2 + my^2 = C = MV^2$ (condition initiale), le point M_0 est $(-V, 0)$ c'est le sommet gauche de l'ellipse, sur Ox

On utilise alors $M=N^2m$ (notations du début de l'énoncé) pour réécrire l'équation de l'ellipse : $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{M} = \frac{MV^2}{mM}$ sous la forme $x^2 + \frac{y^2}{N^2} = V^2$

b le rebond sur le mur fait passer du point (V_k, v_k) à $(V_k, -v_k)$, c'est la symétrie autour de l'axe des V

c M_{2k} et M_{2k+1} sont sur une droite $mv + MV = C_k$: avoir deux points alignés n'est pas un exploit mémorable, mais si! ici si : si celle-ci varie sa direction est fixe, ce qui provoquera les dents de si du dessin

3 Re-traduction géométrique

a Quand on reporte $X = \sqrt{M}x$ et $Y = \sqrt{m}y$ dans $Mx^2 + my^2 = C = MV^2$ on obtient $X^2 + Y^2 = D$: c'est un cercle

b le point de départ était le sommet gauche de l'ellipse, il est maintenant le sommet gauche du cercle, les rebonds avec le mur qui changeaient v en $-v$ changent Y en $-Y$, les droites de direction fixe restent des droites et le changement de repère ayant été unique leur parallélisme perdure

c Le point le plus à gauche décrit l'état avant le premier choc : M va à la vitesse $-V$ et m à la vitesse 0

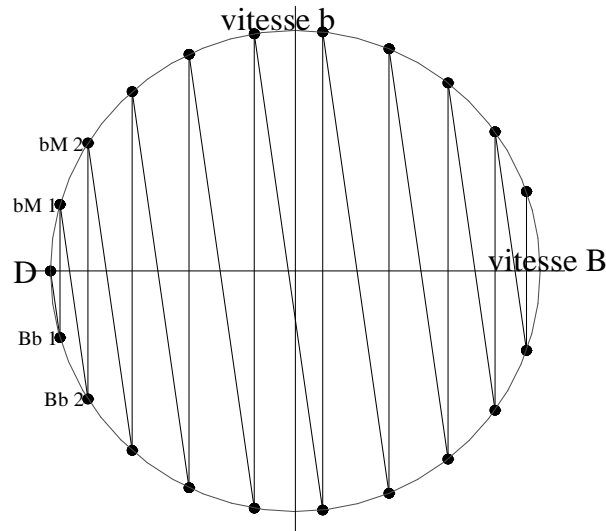
le premier point de la partie Sud de l'image indique la paire de vitesses constantes avant le premier choc m-mur : la vitesse de M est restée grande, négative, celle de m est négative

le premier point de la partie Nord de l'image indique la paire de vitesses constantes entre le premier choc m-mur et le second choc m-M : la vitesse de M est restée grande, négative, celle de m est positive (opposée de la précédente)

les droites joignant les M_{2k} aux M_{2k+1} ont toutes la même pente (voir les six si)

les droites joignant les M_{2k+1} aux M_{2k+2} sont toutes verticales

4 Exploitation de la géométrie



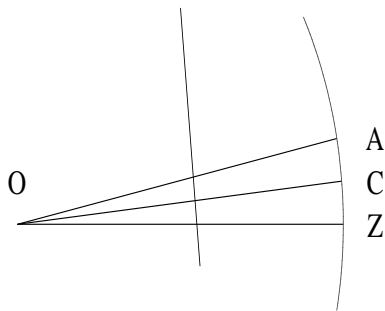
a Les angles $M_{2k+1}OM_{2k+3}$ sont des angles au centre associés aux angles inscrits égaux $\theta = M_{2k+1}M_{2k+2}M_{2k+3}$ ils sont donc égaux et ils valent tous $2\theta = M_0M_1M_2$: pour atteindre le point M_{2k+1} on a tourné de $2k + 2\theta$ à partir de M_0

tout cela aura lieu tant que les hypothèses de choc précédentes ont lieu

Si on prend $n=0$ (on a donc $m=M$) il y a 3 chocs et on finit avec m revenue (immobile) au point initial et M qui s'en retourne (comme si c'est elle qui avait heurté le mur)

Le 3 que l'on a dans ce cas c'est la partie entière de π !

b



L'angle \widehat{ZOC} est θ , OC a donc la direction orthogonale aux $N_{2k}N_{2k+1}$: c'est la droite en biais du dessin voisin, c'est la pente des biais de l'image "zig-zag"

c Tout comme les N_{2k+1} tournent de 2θ au Sud, nos N_{2k} tournent de 2θ au Nord (rappel : $\theta = \arctan(\sqrt{\frac{m}{M}})$)

Si donc N_{2k} est sur l'arc

- N_0A la droite dans la direction des $N_{2k}N_{2k+1}$ va rencontrer le Sud du cercle : la petite masse repart vers la gauche
- AC notre même droite recontre le cercle entre C et Z : après avoir heurté M, m continue comme dans le cas d'un "coulé" au billard (mais elle continue moins vite)
- CZ la parallèle ne rencontre pas le cercle (ou alors en remontant le temps) : il n'y aura plus de choc

d Si $N_{2k}=C$ notre sécante devient la tangente au cercle, les deux masses se suivent à la même vitesse

5 Trois cas particuliers

On a $\sqrt{\frac{m}{M}} = 10^{-n}$, $\theta = \arctan(10^{-n})$. Les points N_0, N_2, \dots, N_{2k} se suivent sur le demi cercle Nord en tournant de 2θ à chaque fois. Le point A du dessin c'est $\pi-2\theta$, et C c'est $\pi-\theta$.

Le premier cas c'est $2k\theta < \pi - 2\theta$: les rebonds vont continuer

Le second cas c'est $\pi - 2\theta < 2k\theta < \pi - \theta$: il y aura encore 1 rebond (sur le mur)

Le troisième cas c'est $\pi - \theta < 2k\theta < \pi$: fini

Le premier cas c'est $2k + 2 < \frac{\pi}{\theta}$, le second $2k + 1 < \frac{\pi}{\theta} < 2k + 2$, le dernier $2k < \frac{\pi}{\theta} < 2k + 1$: quand la partie entière de $\frac{\pi}{\theta}$ est un entier impair on est dans la situation 2 et on aura encore un choc, quand elle est paire c'est fini

Quelle est la valeur de la partie entière de $\frac{\pi}{\theta}$: $\theta = \arctan(10^{-n})$ c'est donc plus petit (de très peu) que 10^{-n} et $\frac{\pi}{\theta}$ est donc supérieur à $\pi \times 10^n$ (et c'en est très proche)

Les exemples demandés sont

($n=1, k=7$) : ça va continuer de rebondir

($n=1, k=30$) : encore un

($n=2, k=314$) : il n'y aura plus de rebonds

Si on y tiens : majorons la différence entre $\arctan(\theta)$ et θ : on part de $1 - t^4 < 1$ on en tire $1 - t^2 < \frac{1}{1+t^2} < 1$ on intègre de 0 à x pour avoir : $x - \frac{x^3}{3} < \arctan(x) < x$ d'où (pour 10^{-10} : $|\arctan(x) - x| < \frac{10^{-30}}{3}$: d'éventuelles erreurs d'arrondis pourront gêner plus que cette différence

6 Le cas de $n=10$

Pour les petites valeurs de n, aucune des décimales de π n'est nulle, au lieu de diviser par $\arctan(x)$ on divise par x, la partie entière sera la même (pour $n=10$ on a fait une erreur inférieure à $1E-30$ et la décimale suivante de π était non nulle) : notre réponse est donc constituée de l'entier qui s'écrit avec les $n+1$ premiers chiffres de π

le compte de rebonds

A la mise en équations

1 traduction des lois physiques

la conservation de l'énergie cinétique : (CEC) $\frac{1}{2}mv_{2n}^2 + \frac{1}{2}MV_{2n}^2 = \frac{1}{2}mv_{2n+1}^2 + \frac{1}{2}MV_{2n+1}^2$

la conservation de la quantité de mouvement : (CQM) $mv_{2n} + MV_{2n} = mv_{2n+1} + MV_{2n+1}$

2 traduction matricielle

a (CEC) dit $m(v_{2n}^2 - v_{2n+1}^2) = M(V_{2n+1}^2 - V_{2n}^2)$ et (CQM) se réécrit : $m(v_{2n} - v_{2n+1}) = M(V_{2n+1} - V_{2n})$. Les deux fois on remplace M par Km pour avoir

$$v_{2n}^2 - v_{2n+1}^2 = K(V_{2n+1}^2 - V_{2n}^2)$$

et

$$v_{2n} - v_{2n+1} = K(V_{2n+1} - V_{2n})$$

Comme on suppose les masses non nulles, les vitesses changent à chaque fois (tant qu'il y a des chocs) et on peut diviser ces deux relations pour avoir : $v_{2n} + v_{2n+1} = V_{2n+1} + V_{2n}$

On fait alors passer dans un même membre tout les v_{2n+1} : $KV_{2n+1} + v_{2n+1} = KV_{2n} + v_{2n}$ et $-V_{2n} + v_{2n} = V_{2n+1} - v_{2n+1}$ ou encore

$$\begin{pmatrix} 1 & K \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2n+1} \\ V_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & K \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2n} \\ V_{2n} \end{pmatrix}$$

b On en tire $X_{2n+1} = G^{-1}DX_{2n}$ soit

$$X_{2n+1} = \frac{-1}{1+K} \begin{pmatrix} -1 & -K \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & K \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2n} \\ V_{2n} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} v_{2n+1} \\ V_{2n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{1+K} \begin{pmatrix} 1-K & 2K \\ 2 & K-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2n} \\ V_{2n} \end{pmatrix}$$

Maintenant X_{2n+2} se déduit de X_{2n+1} en remplaçant v_{2n+1} par son opposé : il n'y a donc qu'à remplacer la première ligne de la matrice par son opposé :

$$\begin{pmatrix} v_{2n+2} \\ V_{2n+2} \end{pmatrix} = \frac{1}{1+K} \begin{pmatrix} K-1 & -2K \\ 2 & K-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2n} \\ V_{2n} \end{pmatrix}$$

3 transformation trigonométrique

Comme $K=N^2$, on a $K=\tan^2(\theta)$ et on reporte dans la matrice

$$C = \frac{1}{1+\tan^2(\theta)} \begin{pmatrix} -1+\tan^2(\theta) & -2\tan^2(\theta) \\ 2 & \tan^2(\theta)-1 \end{pmatrix}$$

on remplace " $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ " par $\cos(2\theta)$, " $\frac{1}{1+t^2}$ " par $\cos^2(\theta)$, " $\frac{2t^2}{1+t^2}$ " par $2\sin^2(\theta)$ et on obtient $C =$

$$\begin{pmatrix} -\cos(2\theta) & -2\sin^2(\theta) \\ 2\cos^2(\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

B Calcul des puissances de la matrice

1 recopiage

on a $\arctan(N) + \arctan(\frac{1}{N}) = \pi/2$, d'où $\theta = \pi/2 - \alpha$, que l'on reporte pour avoir $C =$

$$\begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & -2\cos^2(\alpha) \\ 2\sin^2(\alpha) & \cos(2\alpha) \end{pmatrix}$$

2 recherche des éléments propres

a $Z(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) - \lambda & -2\cos^2(\alpha) \\ 2\sin^2(\alpha) & \cos(2\alpha) - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda\cos(2\alpha) + 1$

b les racines de Z sont $r=e^{2i\alpha}$ et $r'=e^{-2i\alpha}$

c pour r on veut un vecteur U non nul tel que $(C-r) U = 0$, soit

$$\begin{pmatrix} \cos(2\alpha) - e^{2i\alpha} & -2\cos^2(\alpha) \\ 2\sin^2(\alpha) & \cos(2\alpha) - e^{2i\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0$$

ou encore $\begin{pmatrix} -i \sin(2\alpha) & -2\cos^2(\alpha) \\ 2\sin^2(\alpha) & -i \sin(2\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0$ on élimine les $2\sin(\alpha)$ ou $\cos(\alpha)$ qui sont en facteur dans nos équations et il reste $\begin{pmatrix} -i \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -i \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0$: $p=\cos(\alpha)$ et $q=-i\sin(\alpha)$ convient

Pour avoir U' il suffit de conjuguer : $P = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \cos(\alpha) \\ -i \sin(\alpha) & i \sin(\alpha) \end{pmatrix}$

d $C P$ c'est $C[U U']$ soit donc $[CU CU']$ ou encore $[rU r'U']$; $D = P^{-1} C P = P^{-1} [rU r'U'] = [r P^{-1}U r' P^{-1}U']$ et comme $[P^{-1}U P^{-1}U']$ c'est la matrice unité, on a D qui est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r' \end{pmatrix}$ (ici : $r = e^{2i\alpha}$ et $r' = e^{-2i\alpha}$)

3 calcul de C^n

a $C = P D P^{-1}$

b $C^n = P D^n P^{-1}$

c $X_{2n} = C^n X_0 = P D^n P^{-1} X_0$. Si on développe on obtient

$$\begin{pmatrix} v_{2n} \\ V_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \cos(\alpha) \\ -i \sin(\alpha) & i \sin(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2ni\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-2ni\alpha} \end{pmatrix} \frac{\begin{pmatrix} i \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \\ i \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}}{2i \sin(\alpha)\cos(\alpha)} \begin{pmatrix} 0 \\ -V \end{pmatrix}$$

(il faut développer le dernier produit matrice \times colonne)

On note maintenant $c=\cos(\alpha)$ et $s=\sin(\alpha)$, on effectue par la droite, avec $-V c/\text{dénom}$ qui se factorise :

$$\begin{pmatrix} v_{2n} \\ V_{2n} \end{pmatrix} = \frac{-Vc}{2i sc} \begin{pmatrix} c & c \\ -i s & i s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{2ni\alpha} \\ e^{-2ni\alpha} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} v_{2n} \\ V_{2n} \end{pmatrix} = \frac{-V}{2i s} \begin{pmatrix} c(-e^{2ni\alpha} + e^{-2ni\alpha}) \\ i s(e^{2ni\alpha} + e^{-2ni\alpha}) \end{pmatrix}$$

on incorpore le $2i$ du dénominateur à la différences d'exponentielles :

$$\begin{pmatrix} v_{2n} \\ V_{2n} \end{pmatrix} = \frac{-V}{s} \begin{pmatrix} c(\sin(-2n\alpha)) \\ s(\cos(2n\alpha)) \end{pmatrix}$$

on a finalement obtenu

$$v_{2n} = V \frac{\sin(2n\alpha)}{\tan(\alpha)} \qquad V_{2n} = -V \cos(2n\alpha)$$

C Calcul de la date de fin des chocs

1 le mouvement de M est vers la gauche quand V_k est négatif, il va vers la droite quand V_k devient positif, pour V_{2n} cela se traduit par $\cos(2n\alpha)$ devient négatif, c'est à dire quand $2n\alpha > \pi/2$ soit $n > \frac{\pi}{4\alpha}$, on a alors V_{mil} où $\text{mil}=2n$ et $\text{mil} > \frac{\pi}{2\alpha}$

2 on n'a plus de choc quand $V_k > v_k$

3 a comme $1 - t^4 \leq 1$ on a $1 - t^2 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$ si on intègre cela entre 0 et x on obtient $x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan(x) \leq x$

b il faut trouver le plus petit n tel que $-V\cos(2n\alpha) > V \frac{\sin(2n\alpha)}{\tan(\alpha)}$, on sait $V > 0$, $2n\alpha > \pi/2$, mais $2n\alpha < \pi$ (car le gros objet ne va pas faire un second demi-tour), il s'agit donc de résoudre :

$-\cos(2n\alpha) > \frac{\sin(2n\alpha)}{\tan(\alpha)}$, soit $0 > \cos(2n\alpha)\sin(\alpha) + \sin(2n\alpha)\cos(\alpha)$ soit $\sin((2n+1)\alpha) < 0$ qui aura lieu quand $(2n+1)\alpha$ va dépasser π , $2n+1 > \frac{\pi}{\alpha}$ d'où $2n+1 = E(\frac{\pi}{\alpha})$ (pourvu que cette partie entière soit impaire). Or $\alpha = \arctan(\frac{1}{N})$, $\frac{1}{N} - \frac{1}{3N^3} \leq \alpha \leq \frac{1}{N}$, $N \leq \frac{1}{\alpha} \leq \frac{N}{1-\frac{1}{3N^2}}$, $\pi N \leq \frac{\pi}{\alpha} \leq \frac{\pi N}{1-\frac{1}{3N^2}}$ d'où $E(\pi N) \leq E(\frac{\pi}{\alpha}) \leq E(\frac{\pi N}{1-\frac{1}{3N^2}})$

Le nombre de chocs est donc formé de la partie entière de $N\pi$, comme N est une puissance de 10 on a ainsi les $n(+1)$ premiers chiffres de l'écriture de π

3 31 315 3141 31415 314159 3141593 31415927

Il y a un détail qui vient abîmer (?) ou enjoliver cette jolie théorie : après le dernier choc entre m et M on constate que parfois, m repart vers la gauche (et il y aura donc un dernier choc contre le mur) et parfois m continue vers la droite

D Simulation

On donne une valeur à n , $N = 10^n$, $K = N^2$, on écrit C en fonction de K , on écrit la colonne des vitesses de départ, on écrit une fonction de calcul (dichotomique!!!) de C^p et on essaye des valeurs de p jusqu'à avoir la composante V qui dépasse la composante v . Si au choc précédent on avait le petit objet qui allait vers la gauche il faut ajouter 1 (un dernier choc sur le mur), sinon c'était fini au choc précédent

le compte de rebonds : impossibilité informatique

Pour $n=1$, on peut bien sûr faire une simulation, c'est pour $n=10$ que l'on ne peut plus!

Pour que les 31415926535 rebonds puissent constituer une simulation observable, j'ai d'abord pensé à la taille des pixels de l'écran, mais il faudrait un observateur : s'il voit 10 chocs/seconde ... cela fait 100ans d'observations continues ... Zut ce n'est pas vraiment l'impossibilité

J'imagine le mur à gauche de l'écran, la petite masse à droite (à D pixels du côté gauche), M arrive ... il faudra au moins 1 pixel pour faire voir le plus petit déplacement

On arrive à calculer les distances au côté gauche des chocs successifs, le tout est exprimé en fonction de $\theta = \arctan(10^{-n})$ on trouve le rapport $\frac{d_{2n+2}}{d_{2n}}$ des distances au mur de deux chocs consécutifs (c'est $\frac{\tan((2n+2)\theta) - 3\tan(\theta)}{\tan((2n+2)\theta) - \tan(\theta)}$) de là un joyeux produit-infini (presque) à évaluer on peut alors le transformer en une somme de Riemann d'une intégrale (presque) connue

Malheureusement, arrivé là je faisais 3 erreurs d'indices pour deux que je corrigeais, comme finalement ce problème n'est vraiment pas d'une urgence vitale, j'ai abandonné

le compte de rebonds : impossibilité matérielle

Pour $n=0$, le test avec deux boules de billard est évident : on calcule ainsi la partie entière de π

Pour $n=1$ j'imagine déjà très mal l'expérience : comment se débarrasser de la gravitation? de la non-perfection des chocs?

Pour $n=10$ on doit avoir 31415926535 rebonds. Il reste à avoir des constantes physiques ... et là je ne sais pas bien

- le diamètre de la petite boule peut-il être minoré par 10^{-3}m ? (avec tous les chocs quelle va avoir il faut qu'elle résiste et puis si elle est vraiment trop petite quand elle aura emmagasiné toute l'énergie cinétique de la grosse elle perforera n'importe quel mur)
- le diamètre de la grosse boule peut-il être majoré par 10^3m ?
- peut-on vraiment ne pas tenir compte des corrections relativistes? si on multiplie toutes les vitesses par un très petit facteur, la durée totale de l'expérience va dépasser celle de notre univers

Je pense que le point faible de tout cela est le côté perforant : imaginez un coffre-fort qui tombe sur une coccinelle en vol : on imagine super-coccinelle qui fait face aux chocs, mais quand toute l'énergie cinétique du coffre-fort sera dans la coccinelle bondissante, je pense que même un super trottoir ne peut résister