Les axiomes de théorie des ensembles (Zermelo-Fraenkel)

La théorie des ensembles est entre autres choses une tentative de formalisation, dans un système d'axiomes assez simples et si possible intuitifs, de l'ensemble des connaissances mathématiques. En particulier, l'essentiel de l'analyse ou de l'arithmétique se déduirait de façon élémentaire, quoique assez longue, de cette axiomatique.

Un modèle de notre axiomatique sera appelé univers. Le langage de la théorie des ensembles n'introduit qu'un seul symbole de relation, binaire : l'appartenance. L'univers peut donc être symbolisé par un nuage de points qui représentent chacun un ensemble, ces points étant reliés par des flèches lorsque l'un appartient à l'autre.

On trouvera tout ceci, et beaucoup plus en théorie des ensembles, dans le livre de Jean-louis Krivine [1] ou celui de Thomas Jech [2].

1 Les premiers axiomes

Axiome d'extensionnalité : Deux ensembles ayant les mêmes éléments sont égaux.

$$\forall a \forall b, \quad (\forall x, x \in a \Longleftrightarrow x \in b) \Longrightarrow a = b$$

Axiome de la paire : Etant donné deux ensembles, il existe un troisième ensemble qui a pour uniques éléments les deux ensembles précédents.

$$\forall a \forall b \exists c \quad (\forall x, x \in c \Longleftrightarrow (x = a \vee x = b))$$

Notation : L'ensemble c est noté $\{a, b\}$.

Axiome de la somme : À tout ensemble, on peut associer un ensemble de l'univers qui est l'union des éléments du premier, i.e. dont les éléments sont exactement les éléments des éléments du premier.

$$\forall a \exists b \quad (\forall x, x \in b \Longleftrightarrow \exists t, x \in t \wedge t \in a)$$

Notation : L'ensemble b est noté $\bigcup a$ ou bien $\bigcup\limits_{x \in a} x$.

Axiome de l'ensemble des parties : À tout ensemble, on peut associer un ensemble de l'univers qui contient exactement les parties (i.e. les sous-ensembles) du premier.

$$\forall a \exists b \quad (\forall x, x \in b \Longleftrightarrow x \subset a)$$

Remarque : $x \subset a$ est une abréviation pour $\forall y, y \in x \Longrightarrow y \in a$
Notation : Cet ensemble b est noté $\mathfrak{P}(a)$.

2 Les schémas d'axiomes

Schéma d'axiome de substitution : On définit une relation fonctionnelle, à n paramètres $a_1, ..., a_n$, comme une formule du calcul des prédicats à $n+2$ variables $x, y, a_1, ..., a_n$ qui à un élément x associe au plus une image y.
N.B. Cette définition correspond à la notion intuitive de fonction, mais on n'emploiera le terme de fonction que lorsque le domaine de la relation (i.e. la classe des x tels que $\exists y, \mathrm{F}[x, y, a_1, ..., a_n]$) est un ensemble de l'univers.

Le schéma d'axiomes nous dit alors que l'image d'un ensemble quelconque de l'univers par une relation fonctionnelle quelconque est encore un ensemble de l'univers. C'est bien un schéma d'axiome et non un axiome unique car pour le formaliser, il faut écrire un axiome par relation fonctionnelle, étant donné que l'on ne peut quantifier que les objets de l'univers, à savoir les ensembles, et que lesdites relations ne correspondent pas en général à des ensembles.
Pour une relation fonctionnelle $\mathrm{F}[x, y, a_1, ..., a_n]$ à $n+2$ variables, l'axiome s'écrit :

$$\forall a_1 ... a_n [\forall x \forall y \forall y', (\mathrm{F}[x, y, a_1, ..., a_n] \wedge \mathrm{F}[x, y', a_1, ..., a_n] \Longrightarrow y = y')]$$

$$\Longrightarrow [\forall a \exists b \forall y (y \in b \Longleftrightarrow \exists x, x \in a \wedge \mathrm{F}[x, y, a_1, ..., a_n])]$$

(La première partie de la formule exprime le fait que la relation est fonctionnelle en x, y, la deuxième que l'image par F d'un ensemble est un ensemble.)

Notation : On note alors

$$b = \{f(x, a_1, ..., a_n), x \in a\}$$

où la fonction f est définie par : $y = f(x, a_1, ..., a_n) \Longleftrightarrow \mathrm{F}[x, y, a_1, ..., a_n]$

Remarque : En prenant pour F la relation $x = y \wedge \mathrm{A}[x, a_1, ..., a_n]$, on obtient comme cas particulier le schéma d'axiomes de compréhension, qui dit que les éléments d'un ensemble qui vérifient une relation quelconque (ici A) forme également un ensemble.

Muni de ces axiomes, on peut désormais en déduire quelques conséquences importantes. Tout d'abord, on peut désormais construire l'ensemble vide, noté $\emptyset$. Il est obtenu à partir d'un ensemble quelconque et de la relation $x \neq x$. Son unicité est assurée par l'axiome d'extensionnalité.

On peut également démontrer dans cette axiomatique le fameux principe "*l'ensemble de tous les ensembles n'est pas un ensemble*".

Théorème 2.1 *Il n'y a pas d'ensemble ayant pour éléments tous les ensembles.*

Démonstration : En effet, si tel était le cas, c'est-à-dire s'il existait un ensemble de tous les ensembles, on pourrait alors appliquer le schéma de compréhension à cet ensemble et à la relation $x \notin x$; on définirait ainsi un ensemble a des ensembles qui ne s'appartiennent pas :

$$a = \{x, x \notin x\}$$

Mais alors, de deux choses l'une : soit l'ensemble a est dans a, soit il n'est pas dans a. Examinons ces deux possibilités de plus près :
- Si $a \in a$, alors par définition de a, a est un élément qui ne s'appartient pas, c'est-à-dire que l'on a $a \notin a$, ce qui est absurde.
- Si $a \notin a$, alors a est un ensemble qui ne s'appartient pas, donc $a \in a$, toujours par définition de a, ce qui est également absurde.

En conclusion, on aboutit à une contradiction si l'on suppose qu'il y a un ensemble de tous les ensembles, donc il ne peut y avoir de tel ensemble.

□

N.B. On parle de classe, ou collection de tous les ensembles. Une telle collection, qui n'est pas un ensemble, est appelée une classe propre.

N.B. On s'aperçoit qu'il était essentiel, dans la définition du schéma d'axiomes de substitution, de se restreindre à l'image d'un ensemble par une fonctionnelle.

Tel n'était pas le cas dans les premières axiomatiques, notamment celle de Frege, qui comprenait des axiomes de la forme : “les ensembles vérifiant une formule donnée forment un ensemble”. Nous venons de voir qu'un tel axiome est mis en défaut, par l'argument qui précède, et donc qu'une axiomatique qui comprend de telles choses ne peut être cohérente.

Cet argument fût découvert par Russel, qui démonta ainsi l'axiomatique de Frege, et est connu sous le nom de “paradoxe de Russel”.

Ces axiomes ainsi que l'axiome de l'infini (qui affirme l'existence d'un ordinal infini), axiome que nous n'énoncerons pas ici faute d'avoir défini proprement la notion d'ordinal, forment l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel. On n'a malheureusement pas exhibé de modèle de cette théorie, on ne sais donc pas si cette théorie est cohérente (des résultats plus difficiles dûs notamment à Gödel nous disent que la cohérence de cette théorie est indémontrable), toutefois elle semble assez bien fonctionner puisqu'elle n'a pas encore été démentie, depuis plus d'un siècle qu'elle existe.

3 L'axiome de fondation

Nous avons vu précédemment que rien n'empêche d'avoir des ensembles x qui s'auto-appartiennent, voire des situations du type : $x_1 \in x_2 \in \ldots \in x_n \in x_1$. Ces situations ne correspondent pas à l'idée intuitive de la relation d'appartenance : un ensemble et ses éléments n'ont pas le même statut. Dans le plan ou l'espace, par exemple, il y a les points et les ensembles de points, au nombre desquels les droites, les plans... À un niveau en-dessus, rien ne nous empêche de parler d'ensembles de droites, et ainsi de suite, mais jamais nous ne dirions qu'un point s'appartient ou bien qu'une droite appartient à elle-même !

C'est pourquoi, pour coller de plus près à cette intuition de la relation d'appartenance, on se place le plus souvent dans le cadre de la théorie ZF+AF, c'est-à-dire la théorie formée par les axiomes de Zermelo-Fraenkel plus l'axiome de fondation. Celui-ci se formule de la façon suivante :

Axiome de fondation : Tout ensemble non vide contient un élément avec lequel il n'a aucun élément en commun.

$$\forall x, \quad (x \neq \emptyset \Longrightarrow \exists y \in x, \quad x \cap y = \emptyset)$$

En conséquence immédiate de cet axiome, on a le fait suivant :

Propriété 3.1 *Aucun ensemble ne s'auto-appartient.*

$$\forall x, \quad x \notin x$$

Démonstration : En effet, soit x un ensemble tel que $x \in x$. Considérons le singleton $\{x\}$, ensemble dont le seul élément est x. D'après l'axiome de fondation, on doit avoir un élément de ce singleton qui n'a aucun élément en commun avec lui. Mais le seul élément possible est x lui-même, c'est-à-dire que l'on doit avoir :

$$x \cap \{x\} = \emptyset$$

Or par hypothèse, $x \in x$, et par construction $x \in \{x\}$. Donc $x \in x \cap \{x\}$, ce qui contredit l'assertion précédente. Donc $x \notin x$.

$\square$

Également, l'axiome de fondation empêche d'avoir des "cycles", c'est-à-dire n ensembles $x_1, \ldots, x_n$ tels que $x_1 \in x_2 \in \ldots \in x_n \in x_1$; ou encore des suites infinies décroissantes, c'est-à-dire des suites de la forme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \in u_n$.

En effet, dans le premier cas l'ensemble $\{x_1, \ldots, x_n\}$ contredirait l'axiome de fondation (chacun de ses élément x_i aurait avec lui en commun au moins l'élément x_{i-1}). Dans le second cas, l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$, obtenu par le schéma de subsitution à partir de l'ensemble des entiers, contredirait lui aussi l'axiome de fondation.

Références

[1] J.-L. Krivine, *Théorie des ensembles*, Cassini, 1998.

[2] T. Jech, *Set theory*, Academic Press, 1978.