# Nombres rationnels

## 1 Définition de $\mathbb{Q}$

On définit, sur l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, la relation binaire $\mathfrak{R}$ de la façon suivante :

$$(a, b)\mathfrak{R}(a', b') \iff ab' = ba'$$

**Propriété 1.1** *$\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence.*

**Démonstration :**

- Réflexivité : Elle découle de la commutativité de la multiplication sur $\mathbb{Z}$.
- Symétrie : Idem.
- Transitivité :
  Soient $(a, b)$, $(a', b')$ et $(a'', b'')$ tels que $(a, b)\mathfrak{R}(a', b')$ et $(a', b')\mathfrak{R}(a'', b'')$.
  Alors :
  $$\left.\begin{array}{r} ab' = ba' \\ a'b'' = b'a'' \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad aa'b'b'' = ba'b'a'' \quad \Longrightarrow \quad aa'b'' = ba'a''$$
  Si $a' \neq 0$, on obtient $ab'' = ba''$ donc $(a, b)\mathfrak{R}(a'', b'')$.
  Sinon, $a' = 0$ donc $a = 0$ et $a'' = 0$ ; on a encore $ab'' = ba''$ donc $(a, b)\mathfrak{R}(a'', b'')$.

$\square$

**Définition** Un *nombre rationnel* est la classe d'équivalence d'un élément $(a, b)$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ ; on le note $\dfrac{a}{b}$. Et l'on note $\mathbb{Q}$ l'ensemble quotient $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\mathfrak{R}$ des nombres rationnels.

**N.B.** Attention : $\dfrac{a}{b}$ n'est rien d'autre qu'une notation pour désigner le rationnel dont un représentant est le couple $(a, b)$. Ceci justifie également toutes les égalités de type $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, qui signifie que les deux rationnels sont égaux, mais absolument pas les deux représentants $(a, b)$ et $(c, d)$.

**Définition** $a$ est appelé *numérateur* du représentant $(a, b)$ de $\dfrac{a}{b}$ ; $b$ est appelé son *dénominateur*.

**Remarque** Pour tout couple $(a, b)$, on a :

$$\frac{0}{1} = \frac{a}{b} \iff a = 0$$

On note $\mathbb{Q}^*$ l'ensemble $\mathbb{Q} \setminus \left\{\dfrac{0}{1}\right\}$ des rationnels non nuls.

## 2 Représentants privilégiés d'un rationnel

**Théorème 2.1** *Soit $\frac{a}{b}$ un rationnel non nul. Alors il existe un unique couple $(p, q)$ dans $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}_+^*$, appelé représentant irréductible de $\frac{a}{b}$, qui vérifie :*

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b} \quad et \quad p \wedge q = 1$$

*(où $p \wedge q$ désigne le PGCD des entiers $p$ et $q$.)*

**Démonstration :**

- Unicité :
  Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$. Soit un tel couple $(p, q)$, vérifiant donc $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$, avec $p$ et $q$ premiers entre eux.
  Soit $\delta = a \wedge b \in \mathbb{N}^*$, et $a'$ et $b'$ deux entiers vérifiant $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$ (et donc $a' \wedge b' = 1$, cf le texte sur les entiers relatifs).
  On a alors $p\delta b' = q\delta a'$ donc $pb' = qa'$. Comme $a' \wedge b' = 1$, on en déduit (lemme de Gauss) que $p|a'$ (et $q|b'$). C'est-à-dire qu'il existe un entier $k$ tel que $a' = pk$. Mais alors, en remplaçant $a'$ par $pk$ dans l´égalité $pb' = qa'$, il vient après simplification par $p$ : $b' = qk$. L'entier $k$ est donc un diviseur commun de $a'$ et $b'$.
  Comme on a $a' \wedge b' = 1$, on obtient $k = \pm 1$, et donc $(p, q) = (a', b')$ ou bien $(p, q) = (-a', -b')$. L'unicité découle alors de la condition $q > 0$.
- Existence :
  Au signe près, le couple $(a', b')$ construit vérifie la propriété voulue. Si $b' < 0$, il suffit de prendre le couple $(-a', -b')$.

□

**Propriété 2.2** *Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux rationnels. Soit $\mu$ le PPCM de $b$ et $d$. Alors il existe deux entiers $a_1$ et $c_1$ tels que :*

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{\mu} \quad et \quad \frac{c}{d} = \frac{c_1}{\mu}$$

**N.B.** Effectuer une telle opération (déterminer les entiers $a_1$ et $c_1$) s'appelle *réduire au même dénominateur* les deux rationnels $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$.

**Démonstration :** Soient en effet $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux rationnels, $\mu$ le PPCM de $b$ et $d$. soient $h$ et $k$ deux entiers tels que $\mu = bh = dk$.

On vérifie sans problème que $(a, b)\mathfrak{R}(ah, bh)$, et donc que

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{\mu}, \quad \text{où l'on a posé } a_1 = ah.$$

De même $$\frac{c}{d} = \frac{c_1}{\mu}, \quad \text{où l'on a posé } c_1 = ck.$$ □

# 3 Opérations sur $\mathbb{Q}$

## 3.1 Addition

Soit, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, l'addition définie par $(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd)$. Cette addition est compatible avec la relation $\mathfrak{R}$, c'est-à-dire :

$$\left.\begin{array}{l}(a,b)\mathfrak{R}(a',b')\\(c,d)\mathfrak{R}(c',d')\end{array}\right\} \Longrightarrow \quad ((a,b)+(c,d))\,\mathfrak{R}\,((a',b')+(c',d'))$$

En effet, la conclusion équivaut à $(ad + bc, bd)\mathfrak{R}(a'd' + b'c', b'd')$, c'est-à-dire à $(ad+bc)b'd' = (a'd' + b'c')bd$, soit encore $adb'd' + bcb'd' = a'd'bd + b'c'bd$, ce qui est vrai car par hypothèse $ab' = a'b$ et $cd' = c'd$.

Cette addition définit donc par passage au quotient une opération (toujours appelée addition) sur $\mathbb{Q}$, en posant donc $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$

**Théorème 3.1** $(\mathbb{Q}, +)$ *est un groupe commutatif.*

**Démonstration :**

- Commutativité :
  Immédiat par commutativité de la multiplication et de l'addition sur $\mathbb{Z}$.
- Associativité :
  Soient $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{c}{d}$ et $\dfrac{e}{f}$ dans $\mathbb{Q}$. En posant $\mu = b \vee d \vee f$ (PPCM de $b$, $d$ et $f$), on a trois entiers $a_1$, $c_1$ et $e_1$ tels que :
  $$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{\mu}, \quad \frac{c}{d} = \frac{c_1}{\mu} \quad \text{et} \quad \frac{e}{f} = \frac{e_1}{\mu}$$
  Après simplifications :
  $$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \left(\frac{a_1}{\mu} + \frac{c_1}{\mu}\right) + \frac{e_1}{\mu} = \frac{(a_1 + c_1) + e_1}{\mu}$$
  et de même $$\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a_1 + (c_1 + e_1)}{\mu}$$
  On conclut alors par associativité de l'addition des entiers.
- $\dfrac{0}{1}$ est élément neutre pour l'addition :
  $$\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, \quad \frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a.1 + 0.b}{b.1} = \frac{a}{b}$$
- Opposé de $\dfrac{a}{b}$ :
  On a $$\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{0}{b} = \frac{0}{1}$$
  donc $\dfrac{a}{b}$ admet pour opposé $\dfrac{-a}{b}$, qui est donc aussi noté $-\dfrac{a}{b}$. On note également $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d}$ pour la différence $\dfrac{a}{b} + \left(-\dfrac{c}{d}\right)$.

□

## 3.2 Multiplication

De la même façon, on définit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ la multiplication (notée $\times$) par $(a, b) \times (c, d) = (ac, bd)$. Elle est compatible avec $\mathfrak{R}$. Soient en effet quatres couples d'entiers $(a, b)\mathfrak{R}(a', b')$ et $(c, d)\mathfrak{R}(c', d')$.

Alors $$ab' = ba' \quad \text{et} \quad cd' = dc'$$

Or $$\begin{aligned} pa(a, b) \times (c, d)\mathfrak{R}\left((a', b') \times (c', d')\right) &\iff (ac, bd)\mathfrak{R}(a'c', b'd') \\ &\iff acb'd' = bda'c' \end{aligned}$$

Cette dernière égalité découlant immédiatement des hypothèses, par multiplication terme à terme (dans $\mathbb{Z}$).

D'où par passage au quotient une multiplication sur $\mathbb{Q}$, définie par $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$

**Théorème 3.2** $(\mathbb{Q}, +, \times)$ *est un corps commutatif.*

**Démonstration :** Puisqu'on sait déjà que $(\mathbb{Q}, +)$ est un groupe commutatif, il ne reste à démontrer que les propriétés relatives à la loi $\times$.

- Commutativité :
  Immédiat par commutativité de la multiplication dans $\mathbb{Z}$.
- Associativité :
  Idem, en utilisant l'associativité de la multiplication dans $\mathbb{Z}$.
- Distributivité sur l'addition :
  Soient $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{c}{d}$ et $\dfrac{e}{f}$ dans $\mathbb{Q}$. On a des entiers $a_1$, $c_1$ et $e_1$ tels que
  $$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{\mu}, \quad \frac{c}{d} = \frac{c_1}{\mu} \quad \text{et} \quad \frac{e}{f} = \frac{e_1}{\mu} \quad (\text{avec } \mu = b \vee d \vee f\ )$$
  Alors $$\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a_1}{\mu} \times \left(\frac{c_1}{\mu} + \frac{e_1}{\mu}\right) = \frac{a_1(c_1 + e_1)}{\mu^2} = \frac{a_1c_1 + a_1e_1}{\mu^2}$$
  et $$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f} = \frac{a_1}{\mu} \times \frac{c_1}{\mu} + \frac{a_1}{\mu} \times \frac{e_1}{\mu} = \frac{a_1c_1 + a_1e_1}{\mu^2}$$
  La distributivité à droite en découle, grâce à la commutativité de la multiplication, déjà démontrée.
- $\dfrac{1}{1}$ est élément neutre :
  $$\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, \quad \frac{a}{b} \times \frac{1}{1} = \frac{a.1}{b.1} = \frac{a}{b}$$
- Inverse de $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$ :
  Si $\dfrac{a}{b}$ est dans $\mathbb{Q}^*$, alors $a$ est non nul, donc le rationnel $\dfrac{b}{a}$ est bien défini. Et il vérifie :
  $$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{1}{1}$$
  donc $\dfrac{a}{b}$ est inversible et son inverse est $\dfrac{b}{a}$.

$\square$

## 4 Relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$

**Remarque** Pour tout rationnel $\alpha \in \mathrm{Q}^*$, pour tout représentant $(a, b)$ de $\alpha$, le signe du produit $ab$ est constant (il ne dépend pas du représentant choisi).

En effet, soit $(p, q)$ le représentant irréductible de $\alpha$. On a un entier $k$ tel que $a = kp$ et $b = kq$, donc $ab = k^2pq$ a le signe de $pq$.

**Définition** $\dfrac{a}{b}$ est *strictement positif* si et seulement si $ab > 0$ ; $\dfrac{a}{b}$ est *strictement négatif* si et seulement si $ab < 0$.

**Notations :** On note $\mathbb{Q}_+^*$ l'ensemble des rationnels strictement positifs, $\mathbb{Q}_-^*$ l'ensemble des rationnels strictement négatifs ; on note $\mathbb{Q}_+$ (resp. $\mathbb{Q}_-$) l'ensemble $\mathbb{Q}_+^* \cup \left\{\dfrac{0}{1}\right\}$ (resp. l'ensemble $\mathbb{Q}_-^* \cup \left\{\dfrac{0}{1}\right\}$).

On a alors
$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+ \Longleftrightarrow ab \geq 0$$

En effet, si $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+^*$, alors $ab > 0$, et si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{0}{1}$, alors $ab = 0$. Réciproquement, si $ab > 0$, alors $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+^*$ et si $ab = 0$, alors $\dfrac{a}{b} = \dfrac{0}{1}$

De même
$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_- \Longleftrightarrow ab \leq 0$$

De ces propriété, on déduit des propriétés de signe de la somme et du produit de deux rationnels :

**Propriété 4.1**
$$\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_+ \Longrightarrow \alpha + \beta \in \mathbb{Q}_+, \alpha\beta \in \mathbb{Q}_+$$

*De même*
$$\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_- \Longrightarrow \alpha + \beta \in \mathbb{Q}_-, \alpha\beta \in \mathbb{Q}_+$$

*Enfin*
$$\alpha \in \mathbb{Q}_+, \beta \in \mathbb{Q}_- \Longrightarrow \alpha\beta \in \mathbb{Q}_-$$

On est désormais en mesure de définir la relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$ :

**Définition** On définit ainsi la relation binaire $\leq$ sur $\mathbb{Q}$ :
$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Longleftrightarrow \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$$

**Théorème 4.2** $\leq$ *est une relation d'ordre total sur* $\mathbb{Q}$.

**Démonstration :**

- Réflexivité :
$$\frac{a}{b} - \frac{a}{b} = \frac{0}{1} \in \mathbb{Q}_+ \quad \text{donc} \quad \frac{a}{b} \leq \frac{a}{b}$$
- Antisymétrie :
Si $\dfrac{a}{b} \leq \dfrac{c}{d}$ et $\dfrac{c}{d} \leq \dfrac{a}{b}$, alors $\dfrac{c}{d} - \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$, et $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} \in \mathbb{Q}_+$, donc
$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+ \cap \mathbb{Q}_- = \left\{\frac{0}{1}\right\}$$
et donc
$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

- Transitivité :
  Si $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \leq \frac{e}{f}$, alors $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$ et $\frac{e}{f} - \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_+$. Or nous avons vu que $\mathbb{Q}_+$ est stable par la loi $+$, donc
  $$\frac{e}{f} - \frac{a}{b} = \left(\frac{e}{f} - \frac{c}{d}\right) + \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right) \in \mathbb{Q}_+ \quad \text{donc} \quad \frac{a}{b} \leq \frac{e}{f}$$
- Ordre total :
  On a $\mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- = \mathbb{Q}$, donc pour tout couple de rationnels $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)$, la différence $\frac{c}{d} - \frac{a}{b}$ est nécessairement dans $\mathbb{Q}_+$ ou dans $\mathbb{Q}_-$. Selon les cas, on a alors $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ ou bien $\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}$.

$\square$

**Remarque**

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_-$ et $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_+$, alors $\frac{a}{b} \leq \frac{0}{1}$ et $\frac{0}{1} \leq \frac{c}{d}$, donc par transitivité $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$.

**Propriété 4.3** *La relation d'ordre $\leq$ est compatible avec la loi $+$ sur $\mathbb{Q}$, et avec la loi $\times$ sur $\mathbb{Q}_+$.*

**Démonstration :** Soient donc quatres rationnels $\frac{a}{b} \leq \frac{a'}{b'}$ et $\frac{c}{d} \leq \frac{c'}{d'}$. Alors on a $\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$ et $\frac{c'}{d'} - \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_+$, et donc en sommant :

$$\left(\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c'}{d'} - \frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}\right) - \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \in \mathbb{Q}_+$$

On a montré
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \leq \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}$$

Supposons désormais de plus ces rationnels positifs. Quitte à réduire au même dénominateur, on peut supposer $b = b' = d = d'$. On a alors $0 \leq a \leq a'$ et $0 \leq c \leq c'$. donc (dans $\mathbb{Z}$) $ac \leq a'c'$.
On obtient $\frac{a'c' - ac}{b^2} \in \mathbb{Q}_+$, et donc

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{b} \leq \frac{a'}{b} \times \frac{c'}{b}$$

$\square$

**Notation :**(ordre strict sur $\mathbb{Q}$)

On pose : $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \\ \frac{a}{b} \neq \frac{c}{d} \end{cases}$$

Alors
$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+ \setminus \left\{\frac{0}{1}\right\} = \mathbb{Q}_+^*$$

**Définition** Soit G un groupe (additif) ordonné.
- On note $G_+$ l'ensemble des éléments de G supérieurs ou égaux à l'élément neutre 0. $G_+^*$ désignera l'ensemble $G_+ \setminus \{0\}$.

– Étant donné un élément $a$ du groupe G, et $n$ un entier naturel, $n.a$ désigne l'élément $a + a + \cdots + a$ ($n$ occurences de l'élément $a$).
– Le groupe G est dit *archimédien* s'il vérifie la propriété :

$$\forall b \in \mathrm{G}_+ \forall a \in \mathrm{G}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}, \quad b \leq n.a$$

**Propriété 4.4** $\mathbb{Q}$ *est archimédien.*

**Démonstration :** Soit en effet $\beta$ un rationnel positif et $\alpha$ un rationnel strictement positif. Si $\beta = 0$, il n'y a rien à démontrer.

Sinon, quitte à réduire au même dénominateur (propriété 2.2), on peut supposer $\alpha$ de la forme $\dfrac{a}{q}$ et $\beta$ de la forme $\dfrac{b}{q}$, où $a, b$ et $q$ sont des entiers naturels non nuls.

On a alors $a \geq 1$, et donc $a \times \beta \geq \beta$ (la relation d'ordre est compatible avec la multiplication, sur $\mathbb{Q}_+$). Or $a \times \beta = \dfrac{ab}{q} = b \times \alpha$, donc $b\alpha \geq \beta$.

□

# 5 Plongement de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$

Soit $\mathbb{Q}'$ l'ensemble $\left\{\dfrac{m}{1}, m \in \mathbb{Z}\right\}$. Il s'agit bien sûr d'un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$. Il est immédiat de vérifier que $\mathbb{Q}'$ est stable pour les lois $+$ et $\times$ (en revenant aux définitions de ces lois, on vérifie que $\dfrac{m}{1} + \dfrac{n}{1} = \dfrac{m+n}{1}$ et $\dfrac{m}{1} \times \dfrac{n}{1} = \dfrac{mn}{1}$) ; et que $\mathbb{Q}'$ est également stable par passage à l'opposé pour la loi $+$. On en déduit que $(\mathbb{Q}', +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.

Soit l'application $f$, de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}'$ définie par $m \longmapsto \dfrac{m}{1}$. On a, d'après la remarque précédente, pour tous entiers $m$ et $n$, les relations

$$f(m+n) = f(m) + f(n) \text{ et } f(mn) = f(m)f(n)$$

De plus
$$\forall \frac{m}{1} \in \mathbb{Q}' \; \exists! n \in \mathbb{Z}, \quad f(n) = \frac{m}{1}$$

En effet
$$f(n) = \frac{m}{1} \iff \frac{n}{1} = \frac{m}{1} \iff n = m$$

On a montré que $f$ est un isomorphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Q}'$.

Enfin $f(m) \leq f(n) \iff \dfrac{m}{1} \leq \dfrac{n}{1} \iff \dfrac{m-n}{1} \leq \dfrac{0}{1} \iff m - n \leq 0 \iff m \leq n$, c'est-à-dire que l'isomorphisme $f$ est compatible avec les relations d'ordre sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$.

**Convention :** On identifie, compte-tenu de l'isomorphisme $f$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}'$ en écrivant $m$ le rationnel $\dfrac{m}{1}$ (en particulier : $0 = \dfrac{0}{1}$ et $1 = \dfrac{1}{1}$).

Ainsi, on a $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ ; et les opérations $+$ et $\times$ sur $\mathbb{Q}$ *prolongent* respectivement les opérations $+$ et $\times$ sur $\mathbb{Z}$ ; l'ordre total $\leq$ sur $\mathbb{Q}$ *prolonge* quant à lui l'ordre total $\leq$ sur $\mathbb{Z}$.

**Remarque** Avec cette écriture, on a

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times 1}{1 \times b} = \frac{a}{1} \times \frac{1}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

## 6 Valeur absolue sur $\mathbb{Q}$

On définit sur $\mathbb{Q}$ la *valeur absolue* en posant, pour tout rationnel $\alpha$ :

$$|\alpha| = \max(\alpha, -\alpha)$$

Cette définition est justifiée car on a montré que $\leq$ est un ordre total sur $\mathbb{Q}$ (et donc, pour tout rationnel $\alpha$, l'ensemble $\{\alpha, -\alpha\}$ admet un plus grand élément). En particulier, on a $|-\alpha| = |\alpha|$ pour tout $\alpha$.
**Remarque** Cette valeur absolue prolonge la valeur absolue déjà définie sur $\mathbb{Z}$.

**Propriété 6.1** *Pour tous $\alpha$ et $\beta$ rationnels, on a*

$$\alpha^2 = \beta^2 \Longleftrightarrow |\alpha| = |\beta|$$

**Démonstration :**

$\boxed{\Rightarrow}$ Dans le corps $\mathbb{Q}$, on peut factoriser l'égalité $\alpha^2 = \beta^2$ pour obtenir $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = 0$, donc $\alpha = \pm\beta$, ce qui entraîne $|\alpha| = |\beta|$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$, alors $|\alpha| = |\beta|$ entraîne $\alpha = \beta$ et donc $\alpha^2 = \beta^2$.

Les autres cas se tritent de la même façon : si $\alpha \geq 0$ et $\beta \leq 0$, on obtient $\alpha = -\beta$ et donc $\alpha^2 = \beta^2$, et ainsi de suite.

□

**Propriété 6.2** *Pour tous rationnels $\alpha$ et $\beta$, on a $|\alpha\beta| = |\alpha| \times |\beta|$.*

**Démonstration :** Il suffit là encore de distinguer les cas, en fonction des signes de $\alpha$ et $\beta$.

□

**Propriété 6.3** *Pour tous rationnels $\alpha$ et $\beta$, on a $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.*

**Démonstration :** Remarquons tout d'abord que pour tous rationnels positifs $\alpha$ et $\beta$, on a l'équivalence $\alpha \leq \beta \Longleftrightarrow \alpha^2 \leq \beta^2$. En effet $\Rightarrow$ s'obtient grâce à la compatibilité de $\leq$ avec la multiplication (sur $\mathbb{Q}_+$), et $\Leftarrow$ par contraposée, pour les mêmes raisons.

On peut alors raisonner par équivalence :

$$\begin{aligned}
|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| &\Longleftrightarrow |\alpha + \beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \\
&\Longleftrightarrow \left|(\alpha + \beta)^2\right| \leq |\alpha|^2 + 2\,|\alpha|\,|\beta| + |\beta|^2 \\
&\Longleftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \leq \alpha^2 + 2\,|\alpha|\,|\beta| + \beta^2 \\
&\Longleftrightarrow 2\alpha\beta \leq 2\,|\alpha|\,|\beta|
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant toujours vraie (car $|\alpha| \times |\beta| = |\alpha\beta|$), il en est de même de la première...

□