Quaternions

1 Le corps non-commutatif $(\mathbb{H}, +, \times)$

Définition Un *quaternion* est un élément $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$; on note $\mathbb{H}$ l'ensemble des quaternions (l'ensemble $\mathbb{H}$ s'identifie à $\mathbb{R}^4$, muni des opérations que nous allons définir).

Addition sur $\mathbb{H}$:

On définit la *somme* de deux quaternions (a, b, c, d) et (a', b', c', d') par

$$(a, b, c, d) + (a', b', c', d') = (a + a', b + b', c + c', d + d')$$

(c'est l'addition naturelle dans $\mathbb{R}^4$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.)

Multiplication sur $\mathbb{H}$:

On définit également le *produit* $(a, b, c, d) \times (a', b', c', d')$ de deux quaternions (a, b, c, d) et (a', b', c', d') par l'expression

$$(aa' - bb' - cc' - dd', ab' + ba' + cd' - dc', ac' + ca' - bd' + db', da' + ad' + bc' - cb')$$

Théorème 1.1 $(\mathbb{H}, +, \times)$ *est un corps, non commutatif.*

Démonstration :

- On vérifie sans problème que $(\mathbb{H}, +)$ est un groupe commutatif, d'élément neutre $(0, 0, 0, 0)$; l'opposé d'un élément (a, b, c, d) étant $(-a, -b, -c, -d)$.
- Non-commutativité de la loi $\times$:

  On a $$(0, 1, 0, 0) \times (0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 1)$$

  et $$(0, 0, 1, 0) \times (0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, -1)$$
- Associativité et distributivité sur + :
  Se vérifient en appliquant les propriétés correspondantes des opérations sur $\mathbb{R}$... Attention : il faudrait cette fois démontrer la distributivité à gauche et la distributivité à droite, puisque la multiplication n'est pas commutative.
- $(1, 0, 0, 0)$ est élément neutre de $\times$:
  En appliquant la définition de la loi $\times$, on obtient aisément, pour (a, b, c, d) un quaternion quelconque :

  $$(1, 0, 0, 0) \times (a, b, c, d) = (a, b, c, d) \times (1, 0, 0, 0) = (a, b, c, d)$$

– Tout élément $(a,b,c,d) \in \mathbb{H}^* = \mathbb{H} - \{(0,0,0,0)\}$ est inversible :
En effet, si (a,b,c,d) est un quaternion non nul, on a $a^2+b^2+c^2+d^2 \neq 0$ (sinon les quatre nombres a,b,c,d sont de carré nul, donc tous nuls). Soit alors le quaternion (a_1,b_1,c_1,d_1) défini par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1 & = & \dfrac{a}{a^2+b^2+c^2+d^2} \\ b_1 & = & \dfrac{-b}{a^2+b^2+c^2+d^2} \\ c_1 & = & \dfrac{-c}{a^2+b^2+c^2+d^2} \\ d_1 & = & \dfrac{-d}{a^2+b^2+c^2+d^2} \end{array}\right.$$

En appliquant la définition de la multiplication des quaternions, on vérifie que

$$(a,b,c,d) \times (a_1,b_1,c_1,d_1) = (a_1,b_1,c_1,d_1) \times (a,b,c,d) = (1,0,0,0)$$

□

NOTATION : L'opposé (pour la loi $+$) d'un quaternion Z se note $-\mathrm{Z}$, et l'on note $\mathrm{Z}_1 - \mathrm{Z}_2$ la somme $\mathrm{Z}_1 + (-\mathrm{Z}_2)$.

L'inverse d'un quaternion $\mathrm{Z} \neq (0,0,0,0)$ se note $\dfrac{1}{\mathrm{Z}}$; et si Z_1 et Z_2 sont deux quaternions avec Z_2 non nul, on note $\dfrac{\mathrm{Z}_1}{\mathrm{Z}_2}$ le produit $\mathrm{Z}_1 \times \dfrac{1}{\mathrm{Z}_2}$.

2 Plongement de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{H}$

Isomorphisme de $(\mathbb{C},+,\times)$ sur un sous-corps de $(\mathbb{H},+,\times)$

Soit $\mathbb{H}'$ l'ensemble des quaternions de la forme $(a,b,0,0)$. $\mathbb{H}'$ est non vide, et si $(a,b,0,0)$, $(a',b',0,0)$ sont des éléments de $\mathbb{H}'$:

– $(a,b,0,0) - (a',b',0,0) = (a-a',b-b',0,0) \in \mathbb{H}'$;
– $(a,b,0,0) \times (a',b',0,0) = (aa'-bb',ab'+ba',0,0) \in \mathbb{H}'$.
– $(1,0,0,0) \in \mathbb{H}'$;
– L'inverse $(\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{-b}{a^2+b^2}, 0, 0)$ de $(a,b,0,0)$ est encore dans $\mathbb{H}'$.

Donc $(\mathbb{H}',+,\times)$ est un sous-corps de $\mathbb{H}$. Soit alors l'application :

$$f : \left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{H}' \\ a+ib & \longmapsto & (a,b,0,0) \end{array}\right.$$

f est bijective, et l'on vérifie aisément que pour tous complexes z_1 et z_2, on a $f(z_1+z_2) = f(z_1)+f(z_2)$ et $f(z_1z_2) = f(z_1)f(z_2)$. Donc f est un isomorphisme de $(\mathbb{C},+,\times)$ sur $(\mathbb{H}',+,\times)$.

Convention : L'isomorphisme f permet d'identifier $\mathbb{C}$ à $\mathbb{H}'$ (et d'écrire $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$), les lois $+$ et $\times$ sur $\mathbb{H}$ prolongeant alors les opérations déjà connues sur $\mathbb{C}$.

Notations : On écrira donc tout élément $(a,b,0,0)$ de $\mathbb{H}'$ complexe sous la forme $a+ib$. En particulier 0 est l'élément $(0,0,0,0)$, 1 l'élément $(1,0,0,0)$ et i l'élément $(0,1,0,0)$.

On note par analogie j l'élément $(0,0,1,0)$ et k l'élément $(0,0,0,1)$. La famille $\{1,i,j,k\}$ forme une base de l'ensemble des quaternions vu comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et l'on écrira ainsi $a+bi+cj+dk$ le quaternion (a,b,c,d).

Remarques :

- Via le plongement de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on obtient un plongement de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{H}$ (on peut le décrire explicitement : c'est l'application $x \longmapsto (x,0,0,0)$).
- Pour tout réel x, on vérifie que le produit d'un quaternion (a,b,c,d) par l'élément $(x,0,0,0)$ (à gauche comme à droite) nous donne le quaternion (ax,bx,cx,dx). Autrement dit, la multiplication dans $\mathbb{H}$ coïncide (sur les réels) avec la multiplication externe sur $\mathbb{R}^4$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- La notation des quaternions sous la forme $a+bi+cj+dk$ est parfaitemement adaptée à l'opération d'addition (la somme de deux quaternions $a+bi+cj+dk$ et $a'+b'i+c'j+d'k$ est $(a+a')+(b+b')i+(c+c')j+(d+d')k$) et de multiplication par un réel. Pour le produit de nos deux quaternions, on l'obtient en développant l'expression $(a+bi+cj+dk)\cdot(a'+b'i+c'j+d'k)$ de façon naturelle, et grâce aux relations :

$$i \times j = k = -j \times i, \quad j \times k = i = -k \times j, \quad k \times i = j = -i \times k$$

- On a prouvé que $(\mathbb{H},+,\cdot,\times)$ possède une structure d'algèbre sur $\mathbb{R}$, où l'opération $\cdot$ désigne la multiplication (externe) par un réel. Par la suite, on utilisera le symbole $\cdot$ pour désigner indifféremment la multiplication par un réel ou par un quaternion...

N.B. Ces formules ressemblent étrangement à celles du produit vectoriel. Si $\vec{u}$ désigne un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x,y,z) et a est un réel, alors on pourra noter $(a,\vec{u})$ le quaternion (a,x,y,z).
Cas particulier : Soient $p = xi+yj+zk$ et $q = x'i+y'j+z'k$ des quaternions purs (*i.e.* sans partie réelle) et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x,y,z) et (x',y',z') respectivement. Alors le produit $pq = (0,\vec{u})\cdot(0,\vec{v})$ est :

$$p \cdot q = (-xx'-yy'-zz', yz'-zy', -xz'+zx', xy'-yx') = (-\vec{u}.\vec{v}, \vec{u}\wedge\vec{v})$$

Cas général : Soient $p=(a,\vec{u})$ et $q=(b,\vec{v})$ deux quaternions. On a alors :

$$\begin{aligned} p\cdot q &= (a+(0,\vec{u}))\cdot(b+(0,\vec{v})) = ab+(0,a\vec{v})+(0,b\vec{u})+(-\vec{u}.\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v}) \\ &= (ab-\vec{u}.\vec{v}, a\vec{v}+b\vec{u}+\vec{u}\wedge\vec{v}) \end{aligned}$$

3 Centre du corps $(\mathbb{H},+,\times)$

Définition Le *centre* du corps non-commutatif $(\mathbb{H},+,\times)$ est l'ensemble des éléments de $\mathbb{H}$ commutant pour la loi $\times$ avec tous les éléments de $\mathbb{H}$.

Théorème 3.1 *Le centre de* $(\mathbb{H},+,\times)$ *est l'ensemble des réels.*

Démonstration : Soit $\mathbb{H}_1$ le centre de $(\mathbb{H},+,\times)$, et (x,y,z,t) un quaternion.

$$\begin{aligned} (x,y,z,t)\in\mathbb{H}_1 &\iff \forall(a,b,c,d)\in\mathbb{H}, \\ &\qquad (x,y,z,t)\times(a,b,c,d) = (a,b,c,d)\times(x,y,z,t) \\ &\iff \forall a,b,c,d\in\mathbb{R}, \begin{cases} ax-by-cz-dt = xa-yb-zc-td \\ ay+bx+ct-dz = ya+xb+zd-tc \\ az+cx-bt+dy = xc+za-yd+tb \\ dx+at+bz-cy = ta+xd+yc-zb \end{cases} \\ &\iff \forall b,c,d\in\mathbb{R}, \begin{cases} ct-dz = zd-tc \\ -bt+dy = -yd+tb \\ bz-cy = yc-bz \end{cases} \end{aligned}$$

soit
$$
\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in \mathbb{H}_1 &\iff \forall b,c,d \in \mathbb{R}, \begin{cases} ct - dz = 0 \\ bt - dy = 0 \\ bz - cy = 0 \end{cases} \\
&\iff y = z = t = 0
\end{aligned}
$$

Le quaternion (x,y,z,t) est donc dans le centre de $\mathbb{H}$ si et seulement si c'est l'image d'une réel par le plongement canonique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{H}$.

$\square$

4 Conjugaison dans $\mathbb{H}$; norme sur $\mathbb{H}$

Définition Le *conjugué* de d'un quaternion $\mathrm{Z} = (a,b,c,d)$ est le quaternion $\overline{\mathrm{Z}} = (a,-b,-c,-d)$.
(cette définition prolonge donc celle du conjugué d'un complexe)

Remarques :
- $\mathrm{Z} = \overline{\mathrm{Z}} \iff \mathrm{Z} \in \mathbb{R}$
- $\mathrm{Z} + \overline{\mathrm{Z}} \in \mathbb{R}$
- En développant le produit $\mathrm{Z} \times \overline{\mathrm{Z}}$, on trouve

$(a^2+b^2+c^2+d^2, -ab+ba-cd+dc, -ac+ca+bd-db, da-ad-bc+cb)$
$= (a^2+b^2+c^2+d^2, 0, 0, 0) = a^2+b^2+c^2+d^2 \in \mathbb{R}^+$

Définition L'application de $\mathbb{H}$ dans lui-même qui à un quaternion Z associe $\overline{\mathrm{Z}}$ s'appelle encore la *conjugaison*. Cette application prolonge la conjugaison définie sur $\mathbb{C}$.

Théorème 4.1 *La conjugaison est un automorphisme du groupe* $(\mathbb{H},+)$ *(mais pas du corps* $(\mathbb{H},+,\times)$*). C'est également une involution.*

Démonstration : Soient $\mathrm{Z} = (a,b,c,d)$ et $\mathrm{Z}' = (a',b',c',d')$ deux quaternions.
- $\overline{\mathrm{Z}+\mathrm{Z}'} = (a+a', -b-b', -c-c', -d-d')$
  $= (a,-b,-c,-d) + (a',-b',-c',-d') = h(\mathrm{Z}) + h(\mathrm{Z}')$
- $\overline{\overline{\mathrm{Z}}} = (a, -(-b), -(-c), -(-d)) = (a,b,c,d) = \mathrm{Z}$
- La conjugaison n'est pas un automorphisme multiplicatif. En effet, si l'on considère les éléments j et k, on a :
$$\overline{j}\ \overline{k} = (-j)(-k) = jk = i \quad \text{et} \quad \overline{jk} = \overline{i} = -i$$
$\square$

Soit n l'application de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par $n(\mathrm{Z}) = \mathrm{Z}\overline{\mathrm{Z}}$ (où l'on identifie $\mathbb{R}$ au sous-corps de $\mathbb{H}$). Cette application prolonge l'application correspondante dans $\mathbb{C}$.

Théorème 4.2 *n est un homomorphisme de* $(\mathbb{H},\times)$ *dans* $(\mathbb{R}^+,\times)$

Démonstration : Soient $\mathrm{Z} = (a,b,c,d)$ et $\mathrm{Z}' = (a',b',c',d')$ deux quaternions.

$$
\begin{aligned}
\text{Alors} \quad n(\mathrm{ZZ}') &= (aa'-bb'-cc'-dd')^2 + (ab'+ba'+cd'-dc')^2 \\
&\quad + (ac'+ca'-bd'+db')^2 + (da'+ad'+bc'-cb')^2 \\
&= a^2 n(\mathrm{Z}') + b^2 n(\mathrm{Z}') + c^2 n(\mathrm{Z}') + d^2 n(\mathrm{Z}') \\
&\quad \text{(les produits mixtes s'annullent quand on développe)} \\
\text{Donc} \quad n(\mathrm{ZZ}') &= n(\mathrm{Z})n(\mathrm{Z}')
\end{aligned}
$$
$\square$

Définition L'application $Z \longmapsto \sqrt{n(Z)}$ ainsi définie est appelée la *norme* sur le corps des quaternions. On a vu que la norme définit un homomorphisme du groupe $(\mathbb{H}, \times)$ dans $(\mathbb{R}^{+}, \times)$. Par la suite, on notera G le sous-groupe des quaternions de norme 1, c'est-à-dire le noyau de l'application norme.

5 Représentation matricielle des quaternions

On a vu que l'ensemble $\mathbb{H}$ possède une structure d'algèbre sur $\mathbb{R}$. C'est en particulier un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 4, dont on a explicité une base, la famille $1, i, j, k$. Tout quaternion s'écrit alors sous la forme d'une combinaison linéaire des éléments de cette base, c'est-à-dire comme une somme $a \cdot 1 + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$, avec a, b, c, d réels.

De par la structure d'algèbre de $\mathbb{H}$, la multiplication (à gauche) par un quaternion q donné, soit l'application $p \longmapsto q \cdot p$, est une application linéaire sur $\mathbb{H}$. Si q s'écrit $a + bi + cj + dk$, cette application a pour matrice, dans la base $1, i, j, k$:

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

En fait, on peut définir les quaternions comme l'ensemble des matrices de cette forme : il s'agit manifestement d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Quant à la multiplication de ces matrices, elle vérifie bien les propriétés voulues de la multiplication des quaternions, d'après l'étude précédente : si l'on note $\mathrm{M}(p)$ la matrice associée au quaternion p, alors $\mathrm{M}(p)$ est la matrice dans la base $1, i, j, k$ de la multiplication à gauche par p. En composant les applications linéaires, on a donc le résultat suivant : si p_1 et p_2 sont deux quaternions, et $\mathrm{M}(p_1)$, $\mathrm{M}(p_2)$ les matrices associées, alors $\mathrm{M}(p_1)\mathrm{M}(p_2)$ est la matrice de la composée des deux applications linéaires « multiplication à gauche par p_2 » et « multiplication à gauche par p_1 », c'est-à-dire l'application « multiplication à gauche par $p_1 \cdot p_2$ » !

En fait, on a défini un isomorphisme d'algèbre de $\mathbb{H}$ sur la sous-algèbre de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

En particulier, la matrice de 1 n'est rien d'autre que la matrice de l'identité, et on a pour i, j, k les matrices :

$$\mathrm{M}(i) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; \mathrm{M}(j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; \mathrm{M}(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette représentation matricielle des quaternions permet également d'obtenir à moindre effort la propriété suivante :

Propriété 5.1 *La conjugaison sur $\mathbb{H}$ est un anti-automorphisme d'algèbre.*

(c'est-à-dire une application linéaire du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{H}$ dans lui-même, qui vérifie de plus $\overline{p \cdot q} = \overline{q} \cdot \overline{p}$ pour tous p et q).

Démonstration : On a déjà montré que l'application h était un automorphisme du groupe $(\mathbb{H}, +)$. Reste donc à vérifier :

- Pour tout réel x et tout quaternion p, on a $\overline{x \cdot p} = x \cdot \overline{p}$. C'est immédiat en écrivant p sous la forme $a + bi + cj + dk$.
- Pour tous quaternions p et q, on a $\overline{p \cdot q} = \overline{q} \cdot \overline{p}$. On peut bien sûr obtenir ceci en revenant aux formes $a+bi+cj+dk$, mais le résultat est beaucoup plus simple d'un point de vue matriciel. En effet, la matrice de $\overline{p}$ n'est autre que la transposée ${}^t\mathrm{M}(p)$ de $\mathrm{M}(p)$. La matrice de $\overline{p \cdot q}$ est de la même façon ${}^t\mathrm{M}(p \cdot q) = {}^t\left(\mathrm{M}(p)\mathrm{M}(q)\right) = {}^t\mathrm{M}(q)\ {}^t\mathrm{M}(p)$. On obtient donc $\overline{p \cdot q} = \overline{q} \cdot \overline{p}$.
  Notons que le premier point s'en déduit aisément : si x est réel, alors on a $\overline{x \cdot p} = \overline{p} \cdot \overline{x}$. Mais comme $\overline{x} = x$ commute avec tous les quaternions, on a en particulier $\overline{x \cdot p} = x \cdot \overline{p}$.

□

6 Quaternions et rotations dans l'espace

Nous allons voir que la conjugaison par un élément du groupe G (quaternion de norme 1) peut s'interpréter comme une rotation dans l'espace. La conjugaison par un quaternion q non nul est l'application S_q définie sur $\mathbb{H}$ par :

$$\mathrm{S}_q :\ p \longmapsto q \cdot p \cdot q^{-1} = q \cdot p \cdot \overline{q}$$

(En effet, comme q est de norme 1, on a $q \cdot \overline{q} = 1$ donc $q^{-1} = \overline{q}$.)

Notons P l'ensemble des *quaternions purs*, c'est-à-dire sans partie réelle. P est le sous-espace vectoriel engendré par i, j, k, il est isomorphe à $\mathbb{R}^3$, l'espace à 3 dimensions : à un quaternion $xi + yj + zk$, on fait correspondre le vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$. Nous allons montrer que P est stable par toutes les applications de la forme S_q, et que celles-ci correspondent exactement aux rotations de $\mathbb{R}^3$.

N.B. Si $p \in \mathrm{P} \cap \mathrm{G}$, alors $p^2 = -1$. En effet, on a $p \in \mathrm{G}$ donc $p^{-1} = \overline{p}$, et $p \in \mathrm{P}$ donc $\overline{p} = -p$. On en déduit $p^2 = p \cdot (-p^{-1}) = -1$.

Théorème 6.1 *Soit $q \in \mathrm{G}$. L'application $\mathrm{S}_q :\ p \longmapsto qp\overline{q}$ est une application linéaire du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{H}$ qui conserve la norme (c'est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{H}$). De plus, S_q laisse stable les sous-espace vectoriels $\mathbb{R}$ et P.*

Démonstration : Soit donc q un quaternion de norme 1. La linéarité de S_q ne pose pas de problème : si p_1, p_2 sont deux quaternions et λ_1, λ_2 des réels, alors on a :

$$\mathrm{S}_q(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2) = q \cdot (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2) \cdot \overline{q} = \lambda_1 q \cdot p_1 \cdot \overline{q} + \lambda_2 q \cdot p_2 \cdot \overline{q} = \lambda_1 \mathrm{S}_q(p_1) + \lambda_2 \mathrm{S}_q(p_2)$$

D'autre part, on a par le théorème 4.2, pour un quaternion p :

$$n\left(\mathrm{S}_q(p)\right) = n\left(qp\overline{q}\right) = n(q)n(p)n(\overline{q}) = n(p)$$

puisque q (et donc également $\overline{q}$) est de norme 1. On en déduit en passant à la racine carrée que S_q conserve la norme.

Enfin, on sait déjà que $\mathbb{R}$ est le centre de $\mathbb{H}$. On a donc, pour x réel :

$$\mathrm{S}_q(x) = q \cdot x \cdot \overline{q} = x \cdot q \cdot \overline{q} = xn(q) = x$$

Pour ce qui est de P, soit donc $p \in \mathrm{P}$ un quaternion pur. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_q(p) + \overline{\mathrm{S}_q(p)} &= q \cdot p \cdot \overline{q} + \overline{q \cdot p \cdot \overline{q}} \\
&= q \cdot p \cdot \overline{q} + \overline{\overline{q}} \cdot \overline{p} \cdot \overline{q} \quad \text{(la conjugaison est un anti-automorphisme)} \\
&= q \cdot p \cdot \overline{q} + q \cdot \overline{p} \cdot \overline{q} \quad \text{(la conjugaison est involutive)} \\
&= \mathrm{S}_q(p + \overline{p}) = \mathrm{S}_q(0) = 0
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $\mathrm{S}_q(p)$ est aussi un quaternion pur, et donc que P est stable par S_q. □

La restriction de S_q à P définit donc un endomorphisme orthogonal de P (isomorphe à $\mathbb{R}^3$). $\mathrm{S}_q \restriction_{\mathrm{P}}$ est donc une isométrie vectorielle de P, c'est-à-dire une symétrie ou une rotation. On va noter s_q l'isométrie de P ainsi définie par le quaternion q.

Lemme 6.2 *Pour tout quaternion q de norme 1, s_q est de déterminant 1, c'est donc une rotation.*

Démonstration : On peut bien sûr calculer explicitement en fonction de $q = a + bi + cj + dk$ la matrice (dans la base canonique $\{i, j, k\}$ de P) de l'endomorphisme s_q, et en calculer ensuite le déterminant. Ainsi, on obtient les coefficients de la première colonne en calculant :

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_q(i) &= (a + bi + cj + dk)i(a - bi - cj - dk) \\
&= (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)i + 2(ad + bc)j + 2(bd - ac)k
\end{aligned}$$

La première colonne de notre matrice est donc $\begin{pmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 \\ 2(ad + bc) \\ 2(bd - ac) \end{pmatrix}$. On trouve de la même façon les autre coefficients en calculant l'image de j et k, et l'on obtient alors pour son déterminant une expression polynomiale en a, b, c, d qu'il s'agit de simplifier en utilisant le fait que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$.

Nous allons utiliser à la place un argument topologique. Grâce au fait que le déterminant recherché est une fonction polynomiale de a, b, c et d, donc continue (on muni $\mathbb{H}$ de la topologie induite par la norme), on a une fonction continue de G (l'ensemble des quaternions de norme 1) dans $\{-1, 1\}$ (en effet, les endomorphismes s_q sont des isométries de l'espace vectoriel P de dimension 3, donc de déterminant ± 1). Comme d'autre part G est connexe (G est isomorphe à la sphère de dimension 4), on en déduit que cette fonction est constante. Enfin, lorsque $q = 1$, l'endomorphisme s_q n'est autre que l'identité, de déterminant 1. Notre constante est donc 1, et donc les endomorphismes s_q sont tous des rotations de P. □

Théorème 6.3 *Si $q = xi + yj + zk$ est un quaternion pur de norme 1, alors l'endomorphisme s_q de P est le demi tour d'axe (x, y, z).*

Démonstration : En effet s_q est une rotation, et comme $\mathrm{S}_q(q) = q \cdot q \cdot \overline{q} = q$, on sait que le vecteur (x, y, z) est fixé par s_q, qui est donc une rotation d'axe (x, y, z). D'autre part, comme q est un quaternion pur de norme 1 ($q \in \mathrm{P} \cap \mathrm{G}$), on a vu que $q^2 = -1$. Et donc $(\mathrm{S}_q)^2 = \mathrm{S}_{q^2}$ est la conjugaison par -1, soit l'identité. s_q est donc une rotation d'axe (x, y, z), et aussi une involution (s_q^2 est l'identité). C'est donc que s_q est soit l'identité, soit le demi tour d'axe (x, y, z). La première possibilité est exclue, sinon q serait dans le centre de $\mathbb{H}$, c'est-à-dire dans $\mathbb{R}$. □

N.B. À ce stade là, on peut affirmer que toute rotation de l'espace peut se représenter par la conjugaison par un quaternion de norme 1. En effet, les demi tours engendrent le groupe des rotations, c'est-à-dire que toute rotation peut s'exprimer comme le produit d'un nombre fini de demi tours, et donc comme la conjugaison par un produit de quaternions de norme 1 (produit qui est lui-même un quaternion de norme 1)...

On va tout de même donner une formule explicite reliant une rotation et le quaternion qui la représente.

Théorème 6.4 *Soit $\vec{u}(x, y, z)$ un vecteur unitaire, et θ un angle ($\theta \in [\,0\,; 2\pi\,[$). Alors la rotation d'axe $\vec{u}$ et d'angle θ (dans le sens direct) correspond à l'application s_q, où q est le quaternion :*

$$q = \cos\frac{\theta}{2} + x\sin\frac{\theta}{2}i + y\sin\frac{\theta}{2}j + z\sin\frac{\theta}{2}k$$

(Ce quaternion est encore noté $(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\vec{u})$*.)*

Démonstration : Notons q' le quaternion $xi+yj+zk$ (on a $q = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}q'$).

Alors
$$\begin{aligned}\mathrm{S}_q(q') &= (\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}q')q'(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}q') \\ &= (\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2})q' = q'\end{aligned}$$

On en déduit là aussi que s_q est une rotation d'axe (x, y, z). Si $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$ désigne un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}$, et p le quaternion $x_1 i + y_1 j + z_1 k$, alors on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_q(p) &= (\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}q')p(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}q') \\ &= \cos^2\frac{\theta}{2}p + \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}(q'p - pq') - \sin^2\frac{\theta}{2}q'pq'\end{aligned}$$

Mais $-q'pq' = \mathrm{S}_{q'}(p) = -p$ puisque $s_{q'}$ est le demi tour d'axe (x, y, z). Et donc $pq' = q'\overline{q}'pq' = q'(-q'pq') = q'(-p) = -q'p$. On obtient :

$$\mathrm{S}_q(p) = (\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2})p + 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}q'p = \cos\theta p + \sin\theta q'p$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que le produit $q'p$ correspond au produit vectoriel de $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, et donc $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme une base orthonormale directe. Et l'égalité précédente se retraduit en $s_q(\vec{v}) = \cos\theta\vec{v} + \sin\theta\vec{w}$.

s_q est bien la rotation annoncée. □