Ordinaux

Nous avons essayé ici d'introduire la notion d'ordinal de la façon la plus élémentaire possible, et d'en présenter quelques propriétés, qui nous ont paru les plus importantes. Nous ne prétendons pas en faire une étude complète : par exemple, nous passons sous silence les notions d'addition, de multiplication ou d'exponentiation ordinale, qui mériteraient plus d'attention, et sont des notions plus difficiles qu'il n'y paraît. On pourra trouver des présentations plus complètes dans [1] ou [2].

1 Relations d'ordre sur un ensemble

1.1 Définitions

Définition (relation d'ordre)

Une relation binaire $\mathfrak{R}$ sur un ensemble E est une *relation d'ordre* (au sens large), si elle possède les propriétés suivantes :

- *Antisymétrie :* $\forall x, y \in \mathrm{E}, \quad (x\mathfrak{R}y \text{ et } y\mathfrak{R}x) \Longrightarrow x = y$
- *Transitivité :* $\forall x, y, z \in \mathrm{E}, \quad (x\mathfrak{R}y \text{ et } y\mathfrak{R}z) \Longrightarrow x\mathfrak{R}z$

Définition Une relation d'ordre $\mathfrak{R}$ est dite *réflexive* si elle vérifie de plus

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad x\mathfrak{R}x$$

Définition (ordre strict)

Une relation binaire $\mathfrak{R}$ sur un ensemble E est une *relation d'ordre strict* si et seulement si elle est transitive et vérifie :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \mathrm{non}\,(x\mathfrak{R}x)$$

Remarque Une relation d'ordre strict est nécessairement antisymétrique, mais ceci est superflu dans la définition. En effet l'hypothèse de l'implication est toujours fausse (elle impliquerait $x\mathfrak{R}x$ par transitivité), et donc l'implication est toujours vraie. Une relation d'ordre strict est donc un cas particulier de relation d'ordre au sens où nous l'avons défini ici.

Remarque Si ρ est une relation d'ordre, alors la relation $\mathfrak{R}$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathrm{E}, \quad x\mathfrak{R}y \Longleftrightarrow (x\rho y \text{ et } x \neq y)$$

est une relation d'ordre strict sur E dite *associée* à ρ.

En effet $\mathfrak{R}$ est transitive : ($x\mathfrak{R}y$ et $y\mathfrak{R}z$) implique ($x\rho y$ et $y\rho z$), donc $x\rho z$ par transitivité de ρ. D'autre part si $x = z$, alors ($x\rho y$ et $y\rho x$), donc $x = y$, ce qui est impossible puisque $x\mathfrak{R}y$. D'où $x\mathfrak{R}z$.

De plus, pour tout x élément de E, $x\mathfrak{R}x$ impliquerait $x \neq x$, ce qui est absurde.

Définition (ordre total)

Une relation d'ordre $\mathfrak{R}$ (stricte ou non) sur un ensemble E est dite *totale* si tout couple d'éléments peut être ordonné, c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in \mathrm{E}, \quad x \mathfrak{R} y \text{ ou } y \mathfrak{R} x \text{ ou } x = y$$

Définition (bon ordre)

Une relation d'ordre $\mathfrak{R}$ sur un ensemble E est un *bon ordre* si et seulement si toute partie A de E non vide admet un plus petit élément pour $\mathfrak{R}$.

$$\forall \mathrm{A} \in \mathfrak{P}(\mathrm{E}) \setminus \{\emptyset\}, \exists x_0 \in \mathrm{A}, \quad \forall x \in \mathrm{A}, (x_0 \mathfrak{R} x \text{ ou } x = x_0)$$

On note alors $x_0 = \min(\mathrm{A})$; et x_0 est appelé *plus petit élément* de A (pour la relation $\mathfrak{R}$).

E est alors dit *bien ordonné* par $\mathfrak{R}$.

Remarque Un bon ordre est en particulier un ordre total : si l'on considère une paire d'éléments, cette paire doit nécessairement admettre un plus petit élément, c'est-à-dire que l'un des deux éléments est plus petit que l'autre pour la relation.

1.2 Exemples d'ensembles bien ordonnés

Exemple : 1 : $\mathbb{N}$ est bien ordonné par l'inclusion, aussi notée $\leq$, ce d'après la définition de $\mathbb{N}$. (voir le texte "Construction des entiers naturels")

Exemple : 2 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On considère la relation binaire $\mathfrak{R}$ définie sur E par :

$$(p, q)\ \mathfrak{R}(\ p', q') \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} p \prec p' \\ \text{ou} \\ [\ p = p' \text{ et } q < q'\ ] \end{array} \right.$$

Alors $\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre strict :

Si $(p, q) \in \mathrm{E}$, alors $p = p$ et $q = q$ donc non $((p, q)\ \mathfrak{R}\ (p, q))$.

D'autre part, si l'on a $(a, b)\ \mathfrak{R}\ (c, d)$ et $(c, d)\ \mathfrak{R}\ (e, f)$, alors $a \leq c \leq e$ donc $a \leq e$. Et si $a = e$, alors nécessairement $a = c = e$, et donc $b < d < f$. Il vient alors $b < f$. Dans tous les cas, on a bien $(a, b)\ \mathfrak{R}\ (e, f)$, et la relation $\mathfrak{R}$ est donc transitive.

($\mathfrak{R}$ est appelé *l'ordre lexicographique* sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.)

Enfin, $\mathfrak{R}$ est un bon ordre sur E. Soit en effet $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, avec $\mathrm{A} \neq \emptyset$.

Soit $\mathrm{B} = \{p \in \mathbb{N} \mid \exists q \in \mathbb{N}, (p, q) \in \mathrm{A}\}$. B est une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc B admet un plus petit élément p_0. (pour l'ordre naturel sur les entiers)

Soit $\mathrm{C} = \{q \in \mathbb{N} \mid (p_0, q) \in \mathrm{A}\}$. C est une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc C admet un plus petit élément q_0.

Alors, pour tout élément (p, q) de A, p est dans B par définition de B, donc $p_0 \leq p$. Si $p_0 = p$, alors q est dans C donc $q_0 \leq q$. Dans tous les cas, il vient $(p, q) = (p_0, q_0)$ ou bien $(p_0, q_0) \mathfrak{R} (p, q)$. Donc la partie A admet un plus petit élément (p_0, q_0) pour la relation $\mathfrak{R}$.

Remarque La relation d'inclusion n'est pas un bon ordre sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$; ce n'est même pas un ordre total.

2 Définition, propriétés des ordinaux

Définition Un ensemble ω est un *ordinal* si et seulement si :
- La relation d'appartenance est, sur ω, un relation d'ordre strict qui est un bon ordre.
- Pour tout élément x de ω, on a l'implication : $x \in \omega \Longrightarrow x \subset \omega$

EXEMPLE : On vérifie aisément que $\emptyset$ vérifie ces deux propriétés. C'est le plus petit ordinal, noté 0.

Propriété 2.1 *Pour tout ordinal α, on a $\alpha \notin \alpha$.*

Démonstration : soit α un ordinal. La relation d'appartenance est une relation d'ordre stricte sur α, donc pour tout élément ξ de α, on a $\xi \notin \xi$. En particulier, si $\alpha \in \alpha$, alors $\alpha \notin \alpha$!

□

N.B. À première vue, l'idée intuitive que l'on se fait de la relation d'appartenance fait que l'on imagine cette propriété vraie pour tout ensemble. Ce n'est malheureusement vrai en théorie des ensembles que modulo un axiome supplémentaire, l'axiome de fondation (voir le texte "Les axiomes de Zermelo-Fraenkel"). En revanche, ce résultat est vrai pour les ordinaux, indépendamment de l'axiome de fondation.

Théorème 2.2 *Tout élément d'un ordinal est un ordinal.*

Démonstration : Soit ω un ordinal et $x \in \omega$.

On sait que $x \subset \omega$, donc x est bien ordonné par la relation d'appartenance.

Soit $y \in x$. Montrons que $y \subset x$. Soit donc $z \in y$.

La relation d'appartenance est un bon ordre sur ω, donc en particulier une relation d'ordre, donc transitive. On a donc $z \in x$, ce pour tout élément z de y. Il vient $y \subset x$.

Donc x est un ordinal.

□

Inversement, il y a un procédé canonique pour construire des ordinaux plus "gros" à partir d'un ordinal donné. Il s'agit d'utiliser un certain nombre de fois le résultat suivant :

Théorème 2.3 *Si ω est un ordinal, alors $\omega \cup \{\omega\}$ est aussi un ordinal.*

Démonstration : Il faut d'abord montrer que $\in$ est un bon ordre sur $\omega \cup \{\omega\}$.

Soit $\mathrm{A} \subset \omega \cup \{\omega\}$, $\mathrm{A} \neq \emptyset$. Si $\omega \notin \mathrm{A}$, alors $\mathrm{A} \subset \omega$ donc A admet un plus petit élément (ω étant un ordinal). Sinon, $\omega \in \mathrm{A}$. Soit alors $\mathrm{B} = \mathrm{A} \setminus \{\omega\}$. On a $\mathrm{B} \subset \omega$.
- Si $\mathrm{B} \neq \emptyset$, soit $x_0 = \min \mathrm{B}$. Alors $x_0 \in \omega$ donc $x_0 = \min \mathrm{A}$.
- Sinon $\mathrm{B} = \emptyset$, donc $\mathrm{A} = \{\omega\}$, et alors $\omega = \min \mathrm{A}$.

L'ensemble $\omega \cup \{\omega\}$ est bien ordonné par l'inclusion.

Soit $x \in \omega \cup \{\omega\}$. Montrons que $x \subset \omega \cup \{\omega\}$. Là aussi, deux cas se présentent :
- Si $x \in \omega$, alors $x \subset \omega$ car ω est un ordinal, et donc par transitivité de la relation d'inclusion, $x \subset \omega \cup \{\omega\}$.
- Si $x = \omega$, alors évidemment $x \subset \omega \cup \{\omega\}$.

Dans tous les cas, x vérifie bien la propriété désirée. Et donc $\omega \cup \{\omega\}$ est un ordinal.

$\square$

Exemple : : Tout entier naturel est un ordinal. En effet, par récurrence sur n,
- $0 = \emptyset$ est un ordinal.
- Si n est un ordinal, alors $n + 1 = n \cup \{n\}$ est encore un ordinal.

Théorème 2.4 *Soient ω et α deux ordinaux, vérifiant $\omega \subset \alpha \subset \omega \cup \{\omega\}$.*

Alors $$\alpha = \omega \quad \textit{ou bien} \quad \omega = \omega \cup \{\omega\}$$

Démonstration : Supposons de plus $\alpha \neq \omega$. Alors l'inclusion $\omega \subset \alpha$ est stricte, c'est-à-dire que l'ensemble $\mathrm{A} = \alpha \backslash \omega$ est non vide. Soit β un de ses éléments . Alors $\beta \in \alpha$ donc $\beta \in \omega \cup \{\omega\}$.

Mais comme $\beta \in \mathrm{A}$, nécessairement $\beta \notin \omega$. Donc $\beta \in \{\omega\}$, c'est-à-dire que $\beta = \omega$.

On a donc montré que $\omega \in \alpha$, et donc que $\omega \cup \{\omega\} \subset \alpha$.

Il vient $$\alpha = \omega \cup \{\omega\}$$ $\square$

Définition $\omega \cup \{\omega\}$ est donc le plus petit ordinal contenant strictement ω. Il est appelé ordinal *successeur* de ω.

N.B. Le fait que l'ordinal $\omega \cup \{\omega\}$ est distinct de l'ordinal ω est assuré par la propriété 2.1, qui assure que $\omega \notin \omega$.

Ceci justifie les notations 1 et 2 pour désigner les successeurs de 0. En effet on n'en a pas oublié en cours de route, puisque le résultat précédent nous assure que ce sont les plus petits contenant 0 (puis 1). On construit ainsi une infinité d'ordinaux par récurrence, ce sont les entiers naturels.

3 La classe des ordinaux

Lemme 3.1 *Soient α et β deux ordinaux tels que $\alpha \subset \beta$ et $\alpha \neq \beta$.*
Alors $\alpha \in \beta$.

Démonstration : Soient donc α et β deux ordinaux tels que $\alpha \subset \beta$ et $\alpha \neq \beta$. Alors l'ensemble $\mathrm{A} = \beta \backslash \alpha$ est non vide. Soit γ son plus petit élément (pour la relation d'appartenance). Nous allons montrer que $\gamma = \alpha$, ce qui impliquera $\alpha \in \beta$.

Comme β est un ordinal et $\gamma \in \beta$, on a $\gamma \subset \beta$. Si x désigne un élément de γ, il vient alors $x \in \beta$. Mais alors $x \in \mathrm{A}$ est impossible, car ceci contredirait la minimalité de γ, donc nécessairement $x \in \alpha$. D'où $\gamma \subset \alpha$.

Inversement, soit $x \in \alpha$. Considérons l'ensemble $\{x, \gamma\}$. Cet ensemble est une partie de β, donc admet un plus petit élément pour la relation d'appartenance, c'est-à-dire que $x \in \gamma$ ou $x = \gamma$ ou $\gamma \in x$. Or la situation $\gamma \in x$ est absurde, car alors on aurait $\gamma \in \alpha$ ($x \in \alpha$ donc $x \subset \alpha$ car α est un ordinal) ; ce qui contredirait $\gamma \in \beta \backslash \alpha$. De même $x = \gamma$ entraîne $\gamma \in \alpha$. Donc $x \in \gamma$, et l'on a $\alpha \subset \gamma$.

On a donc $\gamma = \alpha$, c'est-à-dire $\alpha \in \beta$.

$\square$

Remarques

- Si α, β et γ sont des ordinaux, alors
$$(\alpha \in \beta \text{ et } \beta \in \gamma) \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in \gamma$$
En effet, on a alors $\beta \subset \gamma$, donc $\alpha \in \gamma$.
- Tout ordinal ω est bien ordonné par l'inclusion, et l'appartenance est l'ordre strict associé à l'inclusion.

Théorème 3.2 *Soient α et β deux ordinaux. Alors on est dans l'une des trois situations suivantes, qui s'excluent mutuellement :*
- $\alpha \in \beta$
- $\alpha = \beta$
- $\beta \in \alpha$

Autrement dit, la relation d'appartenance est un ordre total strict sur la classe des ordinaux.

Démonstration : Soient α et β deux ordinaux, et soit $\gamma = \alpha \cap \beta$. Alors γ est encore un ordinal : $\gamma \subset \alpha$ donc γ est bien ordonné par la relation d'appartenance. Et si x est un élément de γ, alors $x \in \alpha$ (resp. $x \in \beta$), donc $x \subset \alpha$ (resp. $x \subset \beta$), et donc $x \subset \alpha \cap \beta$.

Si $\gamma \neq \alpha$, comme $\gamma \subset \alpha$, le lemme 3.1 nous permet de conclure que $\gamma \in \alpha$. De la même façon, si $\gamma \neq \beta$ alors $\gamma \in \beta$.

Nous avons alors quatre possibilités : $\gamma = \alpha$ ou $\gamma \in \alpha$, et $\gamma = \beta$ ou $\gamma \in \beta$.

La situation $\gamma \in \alpha$ et $\gamma \in \beta$ est absurde : on aurait alors $\gamma \in \alpha \cap \beta = \gamma$, ce qui est impossible puisque γ est un ordinal.

Reste les trois situations :
- $\gamma = \alpha$ et $\gamma \in \beta$, auquel cas $\alpha \in \beta$.
- $\gamma = \alpha$ et $\gamma = \beta$, auquel cas $\alpha = \beta$.
- $\gamma \in \alpha$ et $\gamma = \beta$, auquel cas $\beta \in \alpha$.

Bien sûr, ces trois possibilités s'excluent, sinon on aurait $\alpha \in \alpha$ ou $\beta \in \beta$, ce qui est impossible.

$\square$

Enfin, nous sommes désormais en mesure de montrer qu'en théorie des ensembles, tout comme il n'y a pas d'ensemble de tous les ensembles, il n'y a pas non plus d'ensemble de tous les ordinaux : en langage de la théorie, on dit que c'est une "classe propre". Ceci peut être interprété comme un résultat sur la "taille" de la classe des ordinaux : il y a trop d'ordinaux pour les mettre tous dans un même ensemble.

Théorème 3.3 *Il n'existe pas d'ensemble de tous les ordinaux.*

Démonstration : Supposons au contraire qu'il existe un ensemble, noté $\mathrm{O}n$, de tous les ordinaux. Nous allons montrer dans un premier temps qu'alors $\mathrm{O}n$ est également un ordinal, ce qui nous permettra d'aboutir à une contradiction.

Le théorème 3.2 nous assure que la relation d'appartenance est un ordre total strict sur $\mathrm{O}n$. Montrons que c'est un bon ordre. Soit A une partie non vide de $\mathrm{O}n$, x un élément de A. Considérons l'ensemble $\mathrm{B} = \mathrm{A} \cap x$.

Si B est non vide, comme B est une partie de x ordinal, B admet un plus petit élément x_0. Soit alors $y \in$ A. Si $y \in x$, alors $y \in \mathrm{A} \cap x = \mathrm{B}$, donc $x_0 \in y$ ou $x_0 = y$ par définition de x_0 (plus petit élément de B pour la relation d'appartenance). Sinon $y \notin x$. Mais alors, d'après le théorème 3.2, on a $x = y$ ou $x \in y$. Si $x = y$, alors $x_0 \in y$. Et si $x \in y$, alors $x \subset y$ et donc également $x_0 \in y$.

Dans tous les cas, on a donc $y = x_0$ ou $x_0 \in y$, c'est-à-dire que x_0 est le plus petit élément de A pour la relation d'appartenance. Donc On est bien ordonné par l'inclusion.

D'autre part, on veut montrer $x \in \mathrm{O}n \Longrightarrow x \subset \mathrm{O}n$. Soit donc $x \in \mathrm{O}n$. x est alors un ordinal par définition de On. Or nous avons montré que tout élément d'un ordinal est un ordinal (théorème 2.2). Donc tous les éléments de x sont dans On, ce qui prouve bien que $x \subset \mathrm{O}n$.

En conclusion, l'ensemble On vérifie toutes les propriétés voulue : c'est aussi un ordinal. Mais alors $\mathrm{O}n \in \mathrm{O}n$, ce qui est impossible pour un ordinal, et l'on a bien obtenu une contradiction. Donc il n'y a pas d'ensemble de tous les ordinaux.

□

N.B. Au passage, nous avons vu que la relation d'appartenance sur la classe des ordinaux vérifie les trois propriétés :

- $\in$ est transitive : $(\alpha \in \beta$ et $\beta \in \gamma) \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in \gamma$.
- Pour tout ordinal α, on a $\alpha \notin \alpha$.
- tout ensemble A d'ordinaux possède un plus petit élément pour la relation d'appartenance.

En résumé, la relation d'appartenance est un bon ordre strict sur la classe des ordinaux.

4 Ordinaux successeur, ordinaux limites

Théorème 4.1 *Soit ω un ordinal. Alors il existe au plus un ordinal dont ω est le successeur.*

Démonstration : Soit donc ω un ordinal. Supposons que $\omega = \alpha \cup \{\alpha\} = \beta \cup \{\beta\}$, où α et β sont des ordinaux. D'après le théorème 3.2, on a $\alpha \in \beta$, $\alpha = \beta$, ou $\beta \in \alpha$. supposons par exemple $\alpha \in \beta$. Alors $\alpha \subset \beta$, et $\beta \subset \beta \cup \{\beta\} = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Nous sommes donc dans la situation $\alpha \subset \beta \subset \alpha \cup \{\alpha\}$ du théorème 2.4, donc $\beta = \alpha$, ce qui est en contradiction avec $\alpha \in \beta$, ou bien $\beta = \alpha \cup \{\alpha\}$, ce qui nous donne $\beta = \beta \cup \{\beta\}$, et donc $\beta \in \beta$, ce qui est encore absurde. De la même façon, la possibilité $\beta \in \alpha$ nous conduit à une contradiction. Donc $\alpha = \beta$.

□

Définition Si ω est un ordinal de la forme $\alpha \cup \{\alpha\}$, on dit que ω est un *ordinal successeur*. L'ordinal α est appelé *prédécesseur* de l'ordinal ω.

Définition Si au contraire ω est un ordinal qui n'admet aucun prédécesseur, ω est appelé *ordinal limite*.

N.B. L'existence d'ordinaux limites n'a rien d'évident *a priori*. En fait, les premiers axiomes de Zermelo-Fraenkel ne suffisent pas à montrer qu'il en existe.

C'est pourquoi la théorie s'est enrichie d'un axiome supplémentaire, appelé *axiome de l'infini*, qui peut s'énoncer de la façon suivante :

Axiome de l'infini : Il existe un ordinal limite.

Théorème 4.2 *Soit* A *un ensemble d'ordinaux.*
Alors l'ensemble $\alpha = \bigcup_{x \in \mathrm{A}} x$ *est encore un ordinal.*

Démonstration : Soit $x \in \mathrm{A}$. x est par hypothèse un ordinal, donc tous ses éléments sont des ordinaux. Et donc l'ensemble α est un ensemble d'ordinaux. Donc α est bien ordonné par la relation d'appartenance. Enfin la propriété $x \in \alpha \Longrightarrow x \subset \alpha$ est immédiate : si $x \in \alpha$ et $y \in x$, alors par définition de α, il existe $z \in \mathrm{A}$ tel que $x \in z$. z étant un ordinal, on a aussi $y \in z$, et donc $y \in \alpha$.

□

Remarque Lorsque A admet un plus grand élément x_m, l'ordinal α construit n'est autre que x_m. Ce procédé n'approte de nouveau ordinaux que lorsque A n'a pas de plus grand élément. L'ordinal construit est alors un ordinal limite.

Nous pouvons enfin définir ce qu'est un ordinal *fini* :

Définition Soit ω un ordinal. ω est un *ordinal fini* si tout ordinal $\alpha \subset \omega$ possède un prédécesseur. Un *ordinal infini* est alors tout simplemment un ordinal qui n'est pas fini.

N.B. Les ordinaux finis sont les entiers naturels, voir le texte "Construction des entiers naturels". Également, un ordinal limite est nécessairement infini, et l'existence d'un ordinal infini implique l'existence d'un ordinal limite. L'axiome de l'infini peut donc être exprimé sous la forme : "il existe un ordinal infini".

Si l'on note ω le premier ordinal infini (qui existe d'après l'axiome de l'infini, et grâce au fait que la classe des ordinaux est bien ordonnée), alors on a immédiatement :

Théorème 4.3 ω *est l'ensemble des ordinaux finis. C'est également un ordinal limite.*

En particulier, ω n'est autre que l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.
Démonstration : Soit α un ordinal fini. Alors $\omega \subset \alpha$ est impossible, sinon ω serait aussi un ordinal fini. D'après le théorème 3.2, on a donc $\alpha \in \omega$.

Réciproquement, si α est un élément de ω, alors bien sûr α est un ordinal, puisque tout élément d'un ordinal est un ordinal, qui plus est fini puisque ω est le plus petit ordinal infini.

Enfin, ω est bien un ordinal limite. Sinon, on aurait un ordinal α tel que $\omega = \alpha \cup \{\alpha\}$. Mais alors, si α est fini, tout ordinal plus petit que ω est un successeur, et ω également, auquel cas ω serait un ordinal fini, ce qui est absurde. Et si α est infini, alors il contredit la définition de ω comme plus petit ordinal infini.

□

N.B. Il existe une autre caractérisation des ensembles infinis, qui présuppose l'axiome du choix. Un ensemble E est infini si et seulement si il est en bijection avec l'une de ses parties propres. Cette caractérisation faisant par ailleurs appel à la notion de cardinal, nous ne la développerons pas plus avant. On peut cependant remarquer au passage que $\mathbb{N}$ est bien sûr en bijection avec nombre de ses parties propres, par exemple $\mathbb{N}^*$.

Construction d'ordinaux infinis

Si α est un ordinal et p un ordinal fini, on définit par récurrence sur p l'ordinal $\alpha+p$: $\alpha+1$ est l'ordinal $\alpha\cup\{\alpha\}$, successeur de α, puis $\alpha+(p+1)=(\alpha+p)+1$.

L'ordinal $\mathbb{N}$ nous permet alors de construire les ordinaux infinis suivants :

- $\mathbb{N}+p$ ($p\in\mathbb{N}$).
- $2.\mathbb{N}=\mathbb{N}\cup(\{\mathbb{N}+p\}_{p\in\mathbb{N}})$ (à ne pas confondre avec l'ensemble des entiers pairs, qui lui n'est pas un ordinal).
- $2.\mathbb{N}+p$ ($p\in\mathbb{N}$).
- $3.\mathbb{N}=2.\mathbb{N}\cup(\{2.\mathbb{N}+p\}_{p\in\mathbb{N}})$
- Et ainsi de suite, par récurrence sur $k\in\mathbb{N}^*$, on construit les ordinaux notés $k.\mathbb{N}$ par : $(k+1).\mathbb{N}=k.\mathbb{N}\cup(\{k.\mathbb{N}+p\}_{p\in\mathbb{N}})$.
- En faisant la réunion de tous ces ordinaux, on obtient l'ordinal $\mathbb{N}^2$, à savoir $\{k.\mathbb{N}+p\}_{(k,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$.

On pourrait ensuite continuer par le même procédé : on passe d'un ordinal à son successeur, ce une infinité de fois, et l'on prend la réunion des ordinaux obtenus pour obtenir un ordinal limite plus grand. Les ordinaux $k.\mathbb{N}$ ($k\in\mathbb{N}^*$) et N^2 sont des ordinaux limites.

5 Ordinal d'un ensemble bien ordonné

Théorème 5.1 *(admis)*

Soit E *un ensemble bien ordonné par une relation d'ordre stricte* $\mathfrak{R}$. *Alors il existe un unique couple* (ω, f) *tel que :*

- ω *est un ordinal.*
- f *est un isomorphisme de* $(\mathrm{E},\mathfrak{R})$ *sur* $(\omega,\in)$.

N.B. Dire que f est un isomorphisme signifie ici que, en plus d'être une bijection, f respecte l'ordre : $a\mathfrak{R}b \Longleftrightarrow f(a)\in f(b)$.

Définition L'ordinal ω ainsi défini s'appelle *l'ordinal de* $(\mathrm{E},\mathfrak{R})$.

Exemples :

- Considérons l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, muni de la relation binaire ρ définie par :
  - $\forall x,y\in\mathbb{N}^*, x\rho y \Longleftrightarrow x<y$
  - $\forall x\in\mathbb{N}^*, x\rho 0$

  (Attention : il ne s'agit pas de l'ordinal $\mathbb{N}$, la relation d'ordre considérée ici n'est pas l'appartenance)

  On vérifie aisément que ρ est une relation d'ordre strict, qui est un bon ordre. Les entiers naturels sont rangés, pour la relation ρ, dans l'ordre :

  $$1,2,3,\ldots,0$$

  L'application $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}+1=\mathbb{N}\cup\{\mathbb{N}\}$ définie par $x\in\mathbb{N}^*\mapsto x-1$ et $0\mapsto\mathbb{N}$ est alors un isomorphisme de $(\mathbb{N},\rho)$ sur $\mathbb{N}+1$, qui est donc l'ordinal de $(\mathbb{N},\rho)$.

- Prenons cette fois pour E l'ensemble $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, muni de l'ordre lexicographique $\mathfrak{R}$. Nous avons déjà vu que c'est un bon ordre.

L'application de E dans $\mathbb{N}^2$ qui à un couple (k,p) associe l'ordinal $k.\mathbb{N}+p$ (avec la convention $0.\mathbb{N}=0$) est clairement une bijection.
Et si $(k,p)\,\mathfrak{R}\,(k',p')$, alors soit $k<k'$, auquel cas $k.\mathbb{N}+p \in k'.\mathbb{N}+p'$, soit $k=k'$ et $p<p'$, et alors $k.\mathbb{N}+p\in k.\mathbb{N}+p'$ également. Donc cette application est un isomorphisme, et l'ordre lexicographique a pour ordinal $\mathbb{N}^2$.

Remarque Inversement, la donnée d'une bijection f d'un ensemble E sur un ordinal ω permet de munir l'ensemble E d'un bon ordre $\mathfrak{R}$ induit par f :

$$\forall a,b\in \mathrm{E},\quad a\mathfrak{R}b \Longleftrightarrow f\,(a)\in f\,(b)$$

f est alors naturellement un isomorphisme de $(\mathrm{E},\mathfrak{R})$ sur $(\omega,\in)$.

L'existence d'une telle bijection *a priori* sur n'importe quel ensemble n'a rien d'évident. Dans certains cas, on peut en construire une (par exemple pour les ensembles finis), mais dans le cas général, c'est l'objet de l'axiome du choix, axiome à propos duquel la polémique n'est toujours pas entièrement close...

En tous cas, l'une des formulation (nombreuses) de cet axiome est la suivante :
Axiome du choix : (AC) Tout ensemble peut être muni d'un bon ordre.

La relation entre cette définition et la notion intuitive de choix n'est peut-être pas immédiate. Mais sur un ensemble sur lequel on dispose d'un bon ordre, il est facile de choisir un élément, ou un élément dans une partie donnée de l'ensemble : il suffit de prendre le plus petit ! Et inversement, si l'on sait choisir un élément dans un ensemble, on peut le munir d'un bon ordre : le plus petit élément sera le premier choisi, puis viendra le deuxième, choisi parmi les éléments restant, et ainsi de suite. De cette façon, on construit une bijection sur un ordinal...

Références

[1] J.-L. Krivine, *Théorie des ensembles*, Cassini, 1998.

[2] T. Jech, *Set theory*, Academic Press, 1978.