UNE AUTRE CONSTRUCTION DU CORPS DES RÉELS
Les coupures de Dedekind

Jean Gounon

http://dma.ens.fr/culturemath

1 Introduction

Dans le chapitre intitulé "Nombres réels" nous avons construit le corps des réels en utilisant comme point de départ les suites de Cauchy de rationnels. Cette méthode est due historiquement à Cantor. Mais il existe une deuxième présentation classique, due à Dedekind, fondée sur la notion de "coupure" à l'intérieur de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels. C'est de cette seconde présentation que nous nous inspirons dans ce qui suit ;cette méthode est par moments un peu laborieuse, par exemple dans l'étude des propriétés des lois de composition sur $\mathbb{R}$; par contre, elle permet un accès plus direct à certaines propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$ (densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et théorème de la borne supérieure).

2 Définition d'un nombre réel. Exemples

Définition 2.1 *On appelle* nombre réel *(ou plus simplement* réel*) tout sous-ensemble α de $\mathbb{Q}$ vérifiant les propriérés suivantes :*
1) $\alpha \neq \emptyset$ *;* $\alpha \neq \mathbb{Q}$
2) $\forall x \in \alpha \ \forall y \in \mathbb{Q} \setminus \alpha : x < y$
3) α ne possède pas de plus grand élément.

L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Remarque 2.2 *C'est une telle partition de $\mathbb{Q}$ en deux sous-ensembles non vides (ici notés α et $Q\setminus\alpha$) tels que tout élément de l'un soit inférieur à tout élément de l'autre qui fut désignée comme "coupure dans les nombres rationnels" dans la présentation de Dedekind.*

Exemples 2.3

1. Soit $a \in \mathbb{Q}$; soit l'ensemble $\alpha = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ x < a\}$. Cet ensemble α vérifie bien les trois propriétés ci-dessus : c'est donc un réel.
2. Soit l'ensemble $\alpha = \left\{x \in \mathbb{Q}_+ \ / \ x^2 < 2\right\} \cup \mathbb{Q}_-$. α vérifie clairement les propriétés 1) et 2) ci-dessus. Pour la 3), raisonnons par l'absurde en supposant que α admet un plus grand élément a.

On a $0 < a$ et $a^2 < 2$. Soit alors le rationnel

$$b = \frac{a(a^2+6)}{3a^2+2}$$

on a

$$b - a = \frac{2a(2-a^2)}{3a^2+2} > 0$$

et

$$b^2 - 2 = \frac{a^2(a^2+6)^2 - 2(3a^2+2)^2}{(3a^2+2)^2} = \frac{a^6 - 6a^4 + 12a^2 - 8}{(3a^2+2)^2} = \frac{(a^2-2)^3}{(3a^2+2)^2} < 0$$

On a obtenu un élément $b > a$ dans α, ce qui contredit la définition de a comme plus grand élément de α.

Notons tout de suite que ces deux exemples sont différents : montrons que l'exemple (2) n'est pas du type de l'exemple (1). Raisonnons par l'absurde et supposons que $\alpha = \{x \in Q \ / \ x < a\}$ avec $a \in \mathbb{Q}_+^*$. Comme $a \notin \alpha$, on a $a^2 \geq 2$.

Reprenons le nombre $b = \dfrac{a(a^2+6)}{3a^2+2}$. Le calcul précédent montre ici que $b - a \leq 0$, donc $b \leq a$, et que $b^2 - 2 \geq 0$, donc $b^2 \geq 2$ donc $b \notin \alpha$ donc $b \geq a$; finalement donc $b = a$, d'où $a = \dfrac{a(a^2+6)}{3a^2+2}$ d'où on déduit $a^2 = 2$.

Or, il n'existe aucun rationnel de carré 2 : pour le montrer raisonnons encore par l'absurde en supposant que $2 = \left(\dfrac{p}{q}\right)^2$ avec $p \wedge q = 1$:

On a donc $p^2 = 2q^2$ donc $2 \mid p$ donc $p = 2p'$ donc $4p'^2 = 2q^2$ donc $2p'^2 = q^2$ donc $2 \mid q$; et finalement 2 esr un diviseur commun à p et $\mathbb{Q}$, ce qui contredit $p \wedge q = 1$.

On va noter provisoirement *réels du type 1* les réels du type de l'exemple 1), et *réels du type 2* tous les autres réels. Vous vous en doutez peut-être déjà, une fois notre construction terminée, les premiers seront les *rationnels* et les seconds les *irrationnels*. . .

Propriété 2.4 *L'inclusion est une relation d'ordre total sur* $\mathbb{R}$

Démonstration :

$R \subset \mathfrak{P}(Q)$ (ensemble des parties de $\mathbb{Q}$) ; on sait que l'inclusion est une relation d'ordre (partiel seulement) sur $\mathfrak{P}(Q)$; reste à démontrer que l'ordre ainsi induit sur $\mathbb{R}$ est total, donc que :

$$\forall \alpha, \beta \in R : \alpha \subset \beta \quad ou \quad \beta \subset \alpha.$$

Supposons que $\alpha \not\subset \beta$: $\exists x \in \alpha \diagdown \beta$. Soit alors $y \in \beta$: on a donc $y < x$ (car $x \notin \beta$) donc $y \in \alpha$ (car $x \in \alpha$) ; on a donc $\beta \subset \alpha$.

3 Le groupe $(\mathbb{R}, +)$

3.1 Définition d'une addition sur $\mathbb{R}$

Définition 3.1 *On va définir une addition sur $\mathbb{R}$ ainsi : Si α et β sont des réels, on pose*

$$\alpha + \beta = \{z \in \mathbb{Q} \;/\; \exists x \in \alpha \; \exists y \in \beta : z = x + y\}.$$

Cette définition associe plus généralement, à tout couple de sous-ensembles de $\mathbb{R}$, un troisième sous-ensemble dit *somme* des deux premiers). Pour affirmer que l'on définit ainsi une addition sur $\mathbb{R}$ il faut montrer que $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$ et donc vérifier pour $\alpha + \beta$ les propriétés 1), 2) et 3) de la définition d'un réel. :

1. $\exists x_0 \in \alpha \; \exists y_0 \in \beta$ donc $x_0 + y_0 \in \alpha + \beta$ donc $\alpha + \beta \neq \emptyset$
   $\exists x_1 \notin \alpha \; \exists y_1 \notin \beta$; si $x_1 + y_1 \in \alpha + \beta$, alors $x_1 + y_1 = x + y$ avec $x \in \alpha$ et $y \in \beta$; or $x_1 > x$ et $y_1 > y$ d'où une contradiction : $x_1 + y_1 \notin \alpha + \beta$ donc $\alpha + \beta \neq \mathbb{Q}$.
2. Soient $z \in \alpha + \beta$ et $t \in \mathbb{Q} \setminus (\alpha + \beta)$: montrons que $z < t$:
   $z = x + y$ avec $x \in \alpha$ et $y \in \beta$
   $t = x + y'$ avec $y' \notin \beta$ (car $t \notin \alpha + \beta$)
   Donc $y < y'$donc $t > x + y = z$
3. Par l'absurde, supposons que $\alpha + \beta$ ait un plus grand élément $a \in \mathbb{Q}$: alors $a = a_1 + a_2$ avec $a_1 \in \alpha$ et $a_2 \in \beta$; $\exists a'_1 \in \alpha \; \exists a'_2 \in \beta : a'_1 > a_1$et $a'_2 > a_2$; d'où : $a'_1 + a'_2 > a_1 + a_2 = a$ avec $a'_1 + a'_2 \in \alpha + \beta$: impossible.

On a donc bien défini une addition sur $\mathbb{R}$.

3.2 Propriétés de l'addition sur $\mathbb{R}$

3.2.1 Commutativité

Elle résulte de la commutativité de l'addition sur $\mathbb{Q}$.

3.2.2 Associativité

Elle résulte de l'associativité de l'addition sur $\mathbb{Q}$.

3.2.3 Elément neutre

On va montrer que $\varepsilon = Q^*_-$ est élément neutre, donc que : $\forall \alpha \in R : \alpha + \varepsilon = \alpha$

- Soit $z \in \alpha + \varepsilon : z = x + y$ avec $x \in \alpha$ et $y \in \varepsilon$ donc $z < x$ donc $z \in \alpha$
- Réciproquement, si $z \in \alpha$: $\exists z' \in \alpha : z' > z$; on a $z = z' + (z - z')$ avec $z' \in \alpha$ et $z - z' \in \varepsilon$ donc $z \in \alpha + \varepsilon$

3.2.4 Tout élément a un opposé

On va montrer que : $\forall \alpha \in \mathbb{R} \; \exists \alpha' \in \mathbb{R} : \alpha + \alpha' = \varepsilon$. Pour cela on va distinguer deux cas, selon que le réel α est *du type 1* ou *du type 2* (notation vue à la fin du §2) :

1. α est *du type 1* : $\alpha = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ x < a\}$ avec $a \in \mathbb{Q}$
   Choisissons $\alpha' = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ x < -a\}$ (c'est encore un réel du type 1) :
   – Soit $z \in \alpha + \alpha'$: on a $z = x + y$ avec $x < a$ et $y < -a$ donc $x + y < 0$ donc $z = x + y \in \varepsilon$
   – Soit $z \in \varepsilon$: $\frac{z}{2} < 0$ et $z = (\frac{z}{2} + a) + (\frac{z}{2} - a)$ avec $\frac{z}{2} + a < a$ et $\frac{z}{2} - a < -a$ donc $\frac{z}{2} + a \in \alpha$ et $\frac{z}{2} - a \in \alpha'$ donc $z \in \alpha + \alpha'$.
2. α est *du type 2*
   Choisissons $\alpha' = \{x \in \mathbb{Q} : \ -x \notin \alpha\}$. Ici, il faut montrer que $\alpha' \in \mathbb{R}$: on doit vérifier les propriétés 1), 2), 3) de la définition d'un réel.
   (a) $\alpha' \neq \emptyset$: Soit $y \notin \alpha$: $-y \in \alpha'$
       $\alpha' \neq \mathbb{Q}$: Soit $y \in \alpha$: $-y \notin \alpha'$
   (b) Soient $x \in \alpha'$ et $y \notin \alpha'$: $-x \notin \alpha$ et $-y \in \alpha$ donc $-y < -x$ donc $x < y$
   (c) Supposons (par l'absurde) que α' possède un plus grand élément a : alors $\alpha' = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq a\}$ (en effet : si $x \in \alpha'$, alors $x \leq a$; réciproquement, supposons $x \leq a$: si $x \notin \alpha'$, comme $a \in \alpha'$, $a < x$ d'après le point 2) ci-dessus) ; alors : $x \in \alpha \iff -x \notin \alpha' \iff -x > a \iff x < -a$ donc $\alpha = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ x < -a\}$et donc α est du type 1, ce qui est contraire à l'hypothèse.

   Donc α' est bien un réel.

   Reste à vérifier que $\alpha + \alpha' = \varepsilon$:
   – Soit $z \in \alpha + \alpha'$: $z = x + y$ avec $x \in \alpha$ et $y \in \alpha'$ donc $-y \notin \alpha$ donc $x < -y$ donc $z \in \varepsilon$
   – Soit $z \in \varepsilon$:
   Supposons d'abord que $0 \in \alpha$.
   Soit $y \notin \alpha$. Alors $y > 0$; soit $n \in \mathbb{N}$ défini par $n(-z) \leq y < (n+1)(-z)$ (n est le quotient dans la division euclidienne de y par $-z$). Alors : $(n+1)(-z) \notin \alpha$ et donc l'ensemble $\{x \in \alpha \ / \ \exists k \in \mathbb{N} : x = k(-z)\}$ est fini et admet donc un plus grand élément $p(-z)$. On a : $z = (p+1)z + p(-z)$ avec $(p+1)z \in \alpha'$ (en effet $(p+1)(-z) \notin \alpha$) et $p(-z) \in \alpha$. Donc dans ce cas on a bien $z \in \alpha + \alpha'$.
   Supposons maintenant que $0 \notin \alpha$.
   Alors $0 \in \alpha'$: on reproduit le raisonnement ci-dessus en remplaçant α par α'.

Tout réel α est donc bien symétrisable pour l'addition ; son opposé α' sera noté dorénavant $-\alpha$.

Conclusion : $(\mathbb{R}, +)$ est un *groupe commutatif* .

On notera $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ (*différence* des réels α et β).

4 Nombres réels positifs, négatifs

Définition 4.1 *Un réel α est dit* strictement positif *si et seulement si* $0 \in \alpha$ *; leur ensemble est noté* $\mathbb{R}_+^*$.

Un réel α *est dit* strictement négatif *si et seulement si* $-\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ *; leur ensemble est noté* $\mathbb{R}_-^*$*.*

Propriété 4.2 $\mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{R}_-^* = \emptyset$

Démonstration :

Supposons en effet un réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{R}_-^*$:

$\alpha \in \mathbb{R}_+^* \Longleftrightarrow 0 \in \alpha$

$\alpha \in \mathbb{R}_-^* \Longleftrightarrow -\alpha \in \mathbb{R}_+^* \Longleftrightarrow 0 \in -\alpha \Longleftrightarrow 0 \notin \alpha$

Notation 4.3 $R^* = \mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-^*$

Propriété 4.4 $R = R^* \cup \{\varepsilon\}$

Démonstration :

Pour prouver cela, il suffit de montrer l'implication : $\alpha \notin R^* \Longrightarrow \alpha = \varepsilon$.

Soit donc $\alpha \notin R^*$; montrons que $\forall x \in Q : x \in \alpha \Longleftrightarrow x < 0$

$\boxed{\Longrightarrow}$ $x \in \alpha$; $\alpha \notin \mathbb{R}_+^*$ donc $0 \notin \alpha$ donc $x < 0$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $x < 0$; si $x \notin \alpha$, $-x \in -\alpha$; or $\alpha \notin \mathbb{R}_-^*$ donc $-\alpha \notin \mathbb{R}_+^*$ donc $0 \notin -\alpha$; donc $-x < 0$ donc $x > 0$: contradiction.

Notation 4.5 *On pose*

$$\mathbb{R}_+ := \mathbb{R}_+^* \cup \{\varepsilon\}$$

et

$$\mathbb{R}_- := \mathbb{R}_-^* \cup \{\varepsilon\}$$

Les éléments de $\mathbb{R}_+$ *sont les* nombres réels positifs (au sens large)*, ceux de* $\mathbb{R}_-$ *sont les* nombres réels négatifs (au sens large).

D'après ce qui précède : $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{\varepsilon\}$ et $R = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$

Propriété 4.6 *1)* $[\alpha \in \mathbb{R}_+$ *et* $\beta \in \mathbb{R}_+] \Longrightarrow \alpha + \beta \in \mathbb{R}_+$

2) $[\alpha \in \mathbb{R}_-$ *et* $\beta \in \mathbb{R}_-] \Longrightarrow \alpha + \beta \in \mathbb{R}_-$

Démonstration :

1) Les cas où $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ étant triviaux, supposons α et β dans $\mathbb{R}_+^*$:

$0 \in \alpha$ donc : $\exists x \in \alpha : 0 < x$; $0 = x + (-x)$; $-x < 0$ et $0 \in \beta$ donc $-x \in \beta$; donc $0 \in \alpha + \beta$: donc $\alpha + \beta \in \mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}_+$

2) De même, on peut prendre ici α et β dans $\mathbb{R}_-^*$: alors $-\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $-\beta \in \mathbb{R}_+^*$ donc, d'après 1), $(-\alpha)+(-\beta) \in \mathbb{R}_+^*$ donc $-(\alpha+\beta) \in \mathbb{R}_+^*$ donc $\alpha+\beta \in \mathbb{R}_-^* \subset \mathbb{R}_-$

Propriété 4.7 *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ *(donc* $\alpha + \beta \in \mathbb{R}_+^*$*). Pour tout* $z \in Q_+^* \cap (\alpha + \beta)$*, il existe deux rationnels* *strictement positifs* x *et* y *tels que* $x \in \alpha$*,* $y \in \beta$ *et* $z = x + y$

Démonstration :

On rappelle que l'inclusion est un ordre total sur $\mathbb{R}$, donc que $\alpha \subset \beta$ ou $\beta \subset \alpha$.

Par ailleurs, $\alpha \subset \alpha + \beta$ (car $\forall x \in \alpha : x = x + 0$ et $0 \in \beta$) et de même $\beta \subset \alpha + \beta$.

Supposons donc $\alpha \subset \beta \subset \alpha + \beta$. On va distinguer trois cas :

- $\underline{z \in (\alpha + \beta) \setminus \beta}$
  $z = x + y, x \in \alpha, y \in \beta$; donc $y < z$ donc $x > 0$.
  Si $y \leq 0$, alors $z \leq x$ donc $z \in \alpha$, impossible car $z \notin \beta$.

- $\underline{z \in \beta \setminus \alpha}$
  Soit $0 < a$ et $a \in \alpha$; $\mathbb{Q}$ étant archimédien, il existe $n \in N^*$ tel que $0 < \dfrac{z}{2n} < a$. Alors : $z = \dfrac{z}{2n} + \dfrac{2n-1}{2n}z$ avec $\dfrac{z}{2n} \in \alpha, \dfrac{z}{2n} > 0$ et $0 < \dfrac{2n-1}{2n}z, \dfrac{2n-1}{2n}z < z$ donc $\dfrac{2n-1}{2n}z \in \beta$

- $\underline{z \in \alpha}$

$$z = \frac{z}{2} + \frac{z}{2} \,;\text{ et } \frac{z}{2} > 0, \frac{z}{2} \in \alpha, \frac{z}{2} \in \beta$$

Propriété 4.8 $\forall \alpha, \beta \in R : \alpha \subset \beta \Longleftrightarrow \beta - \alpha \in \mathbb{R}_+$

Démonstration : On va démontrer la double implication :

$\boxed{\Longrightarrow}$

Si $\alpha = \beta$, alors $\beta - \alpha = \varepsilon \in \mathbb{R}_+$.

Si $\alpha \neq \beta$, soit $x \in \beta \setminus \alpha$: on a $0 = x + (-x)$; $x \in \beta$; $x \notin \alpha$ donc $-x \in -\alpha$: donc $0 \in \beta + (-\alpha)$ donc $\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}_+$.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Si $\beta - \alpha = \varepsilon$, alors $\alpha = \beta$ donc $\alpha \subset \beta$.

Si $\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \in \beta + (-\alpha)$: donc $0 = x + y$ avec $x \in \beta$ et $y \in -\alpha$; donc $x = -y \notin \alpha$. En raisonnant par l'absurde, supposons que $\alpha \not\subset \beta$: alors $\beta \subset \alpha$; or $x \in \beta$ et $x \notin \alpha$, d'où la contradiction.

5 Le corps $(R, +, \times)$

5.1 Définition d'une multiplication sur $\mathbb{R}$

Définition 5.1 *Si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, on pose*

$$\alpha \times \beta = \left\{ z \in Q \ / \ \exists x \in \alpha \cap Q_+^* \ , \ \exists y \in \beta \cap Q_+^* \ : z = xy \right\} \cup Q_-$$

On note aussi cette opération $\alpha.\beta$ ou $\alpha\beta$.

Montrons que l'on définit bien ainsi un réel :

1. $Q_- \subset \alpha\beta$ donc $\alpha\beta \neq \emptyset$.
   Soient $x_0 \notin \alpha$ et $y_0 \notin \beta$: alors $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$; si $x_0 y_0 \in \alpha\beta$, on a $x_0 y_0 = x_1 y_1$ avec $x_1 \in \alpha \cap Q_+^*$ et $y_1 \in \beta \cap Q_+^*$ donc $0 < x_1 < x_0$ et $0 < y_1 < y_0$: contradiction. Donc $x_0 y_0 \notin \alpha\beta$ et donc $\alpha\beta \neq Q$

2. Soient $z \in \alpha\beta$ et $t \notin \alpha\beta$: montrons que $z < t$.
   On a $t > 0$ (car $0 \in Q_- \subset \alpha\beta$)
   Si $z \in Q_-$, on a bien $z < t$.
   Sinon : $z = xy$ avec $x \in \alpha \cap Q_+^*$ et $y \in \beta \cap Q_+^*$; $t = xy'$ avec $y' \in Q_+^*$ et $y' \notin \beta$ (car $t \notin \alpha\beta$) ; donc $0 < y < y'$ donc $z = xy < xy' = t$.

3. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\alpha\beta$ possède un plus grand élément $a \in Q$; on sait que : $\exists x_0 \in \alpha \cap Q_+^*$ et $\exists y_0 \in \beta \cap Q_+^*$; alors $x_0 y_0 \in \alpha\beta \cap Q_+^*$; donc $a > 0$. Donc $a = a_1 a_2$ avec $a_1 \in \alpha \cap Q_+^*$ et $a_2 \in \beta \cap Q_+^*$; il existe $a_1' \in \alpha$ et $b_1' \in \beta$ tels que $0 < a_1 < a_1'$ et $0 < a_2 < a_2'$; donc $a < a_1' a_2' \in \alpha\beta$, ce qui contredit la définition de a.

$\alpha\beta$ ainsi défini est donc bien un réel. Remarquons de plus que ce réel est strictement positif : soient $x_0 \in \alpha \cap Q_+^*$ et $y_0 \in \beta \cap Q_+^*$; alors $x_0 y_0 \in \alpha\beta$ et $x_0 y_0 > 0$ donc $0 \in \alpha\beta$.

Définition 5.2 *Si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}_-^*$ on pose : $\alpha\beta = -[\alpha(-\beta)]$ (alors $\alpha\beta \in \mathbb{R}_-^*$).*

Si $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ on pose : $\alpha\beta = -[(-\alpha)\beta]$ (alors $\alpha\beta \in \mathbb{R}_-^*$).

Si $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$ et $\beta \in \mathbb{R}_-^*$ on pose : $\alpha\beta = (-\alpha)(-\beta)$ (alors $\alpha\beta \in \mathbb{R}_+^*$).

Pour tout $\alpha \in R$ on pose : $\alpha\varepsilon = \varepsilon\alpha = \varepsilon$

On a donc défini une multiplication sur $\mathbb{R}$ tout entier.

5.2 Propriétés de la multiplication sur $\mathbb{R}$

5.2.1 Commutativité

Montons que : $\forall \alpha \in R \; \forall \beta \in R : \alpha\beta = \beta\alpha$

– Supposons $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$: on a $Q_- \subset \alpha\beta$ et $Q_- \subset \beta\alpha$; et :
  $z \in Q_+^* \cap \alpha\beta \iff \exists x \in Q_+^* \cap \alpha \;\; \exists y \in Q_+^* \cap \beta : z = xy \iff \exists x \in Q_+^* \cap \alpha$
  $\exists y \in Q_+^* \cap \beta : z = yx \iff z \in Q_+^* \cap \beta\alpha$
– Autres cas : on se ramène au cas ci-dessus :
  si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\beta \in \mathbb{R}_-^*$: $\alpha\beta = -[\alpha(-\beta)] = -[(-\beta)\alpha] = \beta\alpha$
  si $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$, $\beta \in \mathbb{R}_+^*$: $\alpha\beta = -[(-\alpha)\beta] = -[\beta(-\alpha)] = \beta\alpha$
  si $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$, $\beta \in \mathbb{R}_-^*$: $\alpha\beta = (-\alpha)(-\beta) = (-\beta)(-\alpha) = \beta\alpha$

5.2.2 Associativité

Même principe : l'égalité $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ se démontre sur $\mathbb{R}_+^*$ comme ci-dessus ; puis on distingue les cas en s'y ramenant : exemple avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ et $\gamma \in \mathbb{R}_-^*$:

$(\alpha\beta)\gamma = -[(\alpha\beta)(-\gamma)] = -[\alpha(\beta(-\gamma))] = -[\alpha(-(\beta\gamma))] = -[-(\alpha(\beta\gamma))] = \alpha(\beta\gamma)$

5.2.3 Distributivité sur l'addition

On doit montrer que

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in R : \alpha (\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

La propriété étant évidente si l'un des trois réels est nul, on suppose $\alpha, \beta, \gamma \in R^*$ et on distingue les cas suivants :

1. $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

   (a) $\beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$
   On a $\beta + \gamma \in \mathbb{R}_+^*$ et les deux membres de l'égalité à démontrer sont donc dans $\mathbb{R}_+^*$. On peut donc démontrer la double inclusion en raisonnant avec $z \in Q_+^*$:

      i. $z \in \alpha (\beta + \gamma)$:
      $z = xt, x > 0, x \in \alpha, t > 0, t \in \beta + \gamma$. D'après une propriété vue au §4, on peut écrire : $t = y + u, y > 0, y \in \beta, u > 0, u \in \gamma$. Alors $z = x (y + u) = xy + xu$, avec $xy \in \alpha\beta$ et $xu \in \alpha\gamma$

      ii. $z \in \alpha\beta + \alpha\gamma$:
      $\alpha\beta$ et $\alpha\gamma$ étant dans $\mathbb{R}_+^*$, on peut écrire : $z = t_1 + t_2, t_1 \in \alpha\beta, t_2 \in \alpha\gamma, t_1 > 0, t_2 > 0$, soit : $z = x_1 y_1 + x_2 y_2$ avec $x_1 > 0, x_2 > 0, y_1 > 0, y_2 > 0, x_1 \in \alpha, y_1 \in \beta, x_2 \in \alpha, y_2 \in \gamma$. Supposons par exemple que $0 < x_1 \leq x_2$: on a : $z = x_2 \left(\frac{x_1}{x_2} y_1 + y_2 \right)$; $0 < \frac{x_1}{x_2} y_1 \leq y_1$ donc $\frac{x_1}{x_2} y_1 + y_2 \in \beta + \gamma$ avec $\frac{x_1}{x_2} y_1 + y_2 > 0$ donc $z \in \alpha (\beta + \gamma)$

   (b) $\beta \in \mathbb{R}_+^*, \gamma \in \mathbb{R}_-^*, \beta + \gamma \in \mathbb{R}_+^*$
   Raisonnons par équivalences à partir de l'égalité à démontrer :

$$\begin{aligned} & \alpha (\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \\ \iff & \alpha (\beta + \gamma) + \alpha (-\gamma) = \alpha\beta \\ \iff & \alpha ((\beta + \gamma) + (-\gamma)) = \alpha\beta \\ \iff & \alpha\beta = \alpha\beta \end{aligned}$$

   (c) $\beta \in \mathbb{R}_+^*, \gamma \in \mathbb{R}_-^*, \beta + \gamma \in \mathbb{R}_-^*$
   On a

$$\alpha (\beta + \gamma) = - [\alpha ((-\beta) + (-\gamma))]$$

   or : $-\beta \in \mathbb{R}_-^*, -\gamma \in \mathbb{R}_+^*, (-\beta) + (-\gamma) \in \mathbb{R}_+^*$ donc, d'après ci-dessus :

$$\alpha (\beta + \gamma) = - [\alpha (-\beta) + \alpha (-\gamma)] = - [- (\alpha\beta) - (\alpha\gamma)] = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

   (d) $\beta \in \mathbb{R}_+^*, \gamma \in \mathbb{R}_-^*, \beta + \gamma = 0$
   $\alpha (\beta + \gamma) = 0$ et $\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha\beta + \alpha (-\beta) = \alpha\beta - \alpha\beta = 0$

2. $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$
   $\alpha (\beta + \gamma) = - [(-\alpha) (\beta + \gamma)]$ (que $\beta + \gamma$ soit nul, dans $\mathbb{R}_+^*$ou dans $\mathbb{R}_-^*$) donc d'après ci-dessus : $\alpha (\beta + \gamma) = - [(-\alpha) \beta + (-\alpha) \gamma] = - [- (\alpha\beta) - (\alpha\gamma)] = \alpha\beta + \alpha\gamma$

5.2.4 Elément neutre

Soit $\varepsilon_1 = \{x \in Q \ \ / \ x < 1\}$: montons que ε_1 est élément neutre, donc que : $\forall \alpha \in R : \alpha\varepsilon_1 = \alpha$

- $\alpha = 0$: évident
- $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$: on a $Q_- \in \alpha\varepsilon_1$ et $Q_- \in \alpha$; soit donc $z \in Q_+^*$:
  Si $z \in \alpha\varepsilon_1 : z = xy$ avec $x \in \alpha$, $x > 0$ et $0 < y < 1$ donc $z = xy < x$ donc $z \in \alpha$
  Si $z \in \alpha$: soit $z' > z$, $z' \in \alpha : z = z' \times \dfrac{z}{z'}$ avec $\dfrac{z}{z'} < 1$ donc $\dfrac{z}{z'} \in \varepsilon_1$ donc $z \in \alpha\varepsilon_1$
- $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$:
  $-\alpha \in \mathbb{R}_+^*$; alors : $\alpha\varepsilon_1 = -\left[(-\alpha)\,\varepsilon_1\right] = -(-\alpha) = \alpha$

5.2.5 Tout élément a un inverse

On doit montrer que

$$\forall \alpha \in R^*, \exists \alpha', \ tel\ que\ \alpha\alpha' = \varepsilon_1$$

Commençons par supposer que $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. on distingue deux cas :

1. $\alpha = \{x \in Q \ / \ x < a\}$ avec $a \in Q_+^*$ (α est un réel du type 1) :
   Prenons $\alpha' = \left\{x \in Q \ / \ x < \dfrac{1}{a}\right\}$ et montrons la double inclusion (il suffit là encore de la montrer sur Q_+^*) :
   Soit $z \in \alpha\alpha'$ avec $z > 0 : z = xy$ avec $0 < x < a$ et $0 < y < \dfrac{1}{a}$ donc $z < 1$ donc $z \in \varepsilon_1$
   Soit $z \in \varepsilon_1 : 0 < z < 1$; soit z' tel que $z < z' < 1$: alors : $z = (z'a) \times \left(\dfrac{z}{z'} \times \dfrac{1}{a}\right)$ avec
   $z'a > 0, \dfrac{z}{z'} \times \dfrac{1}{a} > 0$, $z'a \in \alpha$ et $\dfrac{z}{z'} \times \dfrac{1}{a} \in \alpha'$ donc $z \in \alpha\alpha'$.
2. α est un réel du type 2. On peut prendre $\alpha' = \left\{x \in Q_+^* \diagup \dfrac{1}{x} \notin \alpha\right\} \cup Q_-$
   On doit vérifier cinq propriétés : trois pour démontrer que $\alpha' \in R$, puis deux pour la double inclusion signifiant $\alpha\alpha' = \varepsilon_1$.
   (a) $\alpha' \neq \emptyset$ car $Q_- \subset \alpha'$
   $\alpha' \neq Q$: en effet $\exists x \in \alpha \cap Q_+^*$ donc $\dfrac{1}{x} \notin \alpha'$
   (b) Soient $x \in \alpha'$ et $y \notin \alpha'$: montrons que $x < y$
   On a $y > 0$: la propriétéest donc vraie si $x \in Q_-$; supposons donc $x > 0$.
   $\dfrac{1}{y} \in \alpha$; $\dfrac{1}{x} \notin \alpha$ donc $\dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$ donc $x < y$.
   (c) Si α' possède un plus grand élément $a \in Q_+^*$, on peut écrire (voir l'étude de la symétrisation pour l'addition) $\alpha' = Q_- \cup \left\{x \in Q_+^* \diagup x \leq a\right\}$
   donc : $\forall x \in Q_+^* : x > a \Longleftrightarrow x = \dfrac{1}{t}, t \in \alpha \cap Q_+^*$; donc : $t \in \alpha \cap Q_+^* \Longleftrightarrow \dfrac{1}{t} > a \Longleftrightarrow t < \dfrac{1}{a}$; alors α serait un réel du type 1, ce qui est exclu.

(d) $\alpha\alpha' \subset \varepsilon_1$:

Soit $z \in Q_+^* \cap (\alpha\alpha')$: $z = xy$, $x \in Q_+^* \cap \alpha$ et $y \in Q_+^* \cap \alpha'$: alors $\dfrac{1}{y} \notin \alpha$ donc $x < \dfrac{1}{y}$ donc $z = xy < 1$ donc $z \in \varepsilon_1$

(e) $\varepsilon_1 \subset \alpha\alpha'$:

Soit $z \in \varepsilon_1 \cap Q_+^*$: $0 < z < 1$ donc $\dfrac{1}{z} > 1$ donc la suite rationnelle de terme général $\left(\dfrac{1}{z}\right)^n$, strictement croissante, est non majorée (résultat classique : on montre par récurrence que, en posant $\dfrac{1}{z} = 1 + a$ avec $a > 0$, on a $\left(\dfrac{1}{z}\right)^n \geq 1 + na$ pour tout $n \in N$).

Prenons le cas $1 \in \alpha$; soit $y \notin \alpha$. L'ensemble $\left\{ x \in \alpha / \exists k \in N : x = \left(\dfrac{1}{z}\right)^k \right\}$ est borné par 1 et y et donc est fini d'après ci-dessus. Soit $\left(\dfrac{1}{z}\right)^n$ son plus grand élément : $\left(\dfrac{1}{z}\right)^n \in \alpha$ et $\left(\dfrac{1}{z}\right)^{n+1} \notin \alpha$ donc $z^{n+1} \in \alpha'$.

Or : $z = z^{n+1} \times \left(\dfrac{1}{z}\right)^n$; donc $z \in \alpha\alpha'$.

Dans le cas $1 \notin \alpha$, on a donc $1 \in \alpha'$: on raisonne comme ci-dessus en remplaçant α par α'.

La propriété est donc bien démontrée si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Si $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$ alors $-\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, d'après ci-dessus il existe $\alpha' \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(-\alpha)\,\alpha' = \varepsilon_1$; or $(-\alpha)\,\alpha' = \alpha\,(-\alpha')$ donc $\alpha\,(-\alpha') = \varepsilon_1$.

Tout $\alpha \in R^*$ est donc inversible ; son inverse sera dorénavant noté $\dfrac{1}{\alpha}$.

On déduit de ces propriétés que $(R, +, \times)$est un *corps commutatif*.

On notera $\dfrac{\alpha}{\beta} = \alpha \times \dfrac{1}{\beta}$ (*quotient* du réel α par le réel non nul β).

6 Inclusion de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Soit $\mathbb{R}'$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ formé des réels du type 1.

Théorème 6.1 $\mathbb{R}'$ *est un sous-corps du corps des réels.*

Démonstration :

Notons, si $a \in \mathbb{Q}$, $\varphi(a) = \{x \in \mathbb{Q} / x < a\} \in \mathbb{R}'$.

Pour montrere notre résultat, on doit vérifier 6 points :

1. $\forall a, b \in \mathbb{Q} : \varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(a + b)$ (d'où la stabilité de $\mathbb{R}'$pour +)
   Montrons la double-inclusion.

(a) Soit $z \in \varphi(a) + \varphi(b)$: $z = x + y$ avec $x < a$ et $y < b$ donc $z < a + b$ donc $z \in \varphi(a + b)$

(b) Soit $z \in \varphi(a + b)$: $z < a+b$; or : $z = a - \dfrac{a+b-z}{2} + b - \dfrac{a+b-z}{2}$; et $z_1 = a - \dfrac{a+b-z}{2} < a$ et $z_2 = b - \dfrac{a+b-z}{2} < b$ donc $z \in \varphi(a) + \varphi(b)$

2. $\varepsilon = \varphi(0) \in R'$
3. $\forall a \in \mathbb{Q} : -\varphi(a) = \varphi(-a) \in \mathbb{R}'$.
4. $\forall a, b \in \mathbb{Q} : \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ (d'où la stabilité de $\mathbb{R}'$ pour $\times$) :

(a) Supposons $a > 0$ et $b > 0$: il suffit de montrer l'égalité des restrictions de ces ensembles à $\mathbb{Q}_+^*$.

i. Soit $z \in \varphi(ab) \cap \mathbb{Q}_+^*$: alors $0 < z < ab$; $\exists p \in \mathbb{N}^* : ab - z > \dfrac{b}{p}$.
Alors $a > \dfrac{1}{p}$.
Posons $z = \left(a - \dfrac{1}{p}\right) z_2$;$0 < a - \dfrac{1}{p} < a$; et comme $z < ab - \dfrac{b}{p}$, on a $0 < z_2 < b$. Donc $z \in \varphi(a)\varphi(b)$

ii. Soit $z \in \varphi(a)\varphi(b) \cap \mathbb{Q}_+^*$: $z = z_1 z_2$ avec $0 < z_1 < a$ et $0 < z_2 < b$ d'où $0 < z < ab$ et $z \in \varphi(ab)$

(b) Si $a > 0$ et $b < 0$ on a :

$$\begin{array}{lllllll} \varphi(ab) & = & -\varphi(-ab) & = & -\varphi(a(-b)) & & \\ & = & -[\varphi(a)\varphi(-b)] & = & -[\varphi(a)(-\varphi(b))] & = & \varphi(a)\varphi(b) \end{array}$$

(c) Si $a < 0$ et $b < 0$, on a :

$$\varphi(ab) = \varphi((-a)(-b)) = \varphi(-a)\varphi(-b) = (-\varphi(a))(-\varphi(b)) = \varphi(a)\varphi(b)$$

5. $\varepsilon_1 = \varphi(1) \in \mathbb{R}'$
6. $\forall a \in \mathbb{Q}^* : \dfrac{1}{\varphi(a)} = \varphi\left(\dfrac{1}{a}\right)$

En effet : $\varphi(a)\varphi\left(\dfrac{1}{a}\right) = \varphi\left(a \times \dfrac{1}{a}\right) = \varphi(1) = \varepsilon_1$

Théorème 6.2 *Le corps* ($\mathbb{R}', +, \times$) *est isomorphe au corps* $(\mathbb{Q}, +, \times)$

<u>*Démonstration*</u> :

Soit l'application $\varphi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}' : a \longmapsto \varphi(a) = \{x \in \mathbb{Q} \diagup x < a\}$. D'après la démonstration ci-dessus, φ est un homomorphisme de $(\mathbb{Q}, +, \times)$ dans $(\mathbb{R}', +, \times)$. Pour montrer que φ est bijective, la surjectivité résultant de la définition même de φ, il suffit de montrer l'injectivité :

Soit $\varphi(a) = \varphi(b)$. Si $a < b$, $\exists x \in \mathbb{Q} : a < x < b$ donc $x \in \varphi(b) \diagdown \varphi(a)$: contradiction (on aurait pu également utiliser le fait général qu'un morphisme d'anneaux entre deux corps est forcément injectif.)

Convention 6.3 *L'isomorphisme* φ *permet d'*identifier *le corps* $\mathbb{Q}$ *des rationnels et le corps* $\mathbb{R}'$ *des réels du type 1, en convenant d'assimiler le* rationnel a *et le réel* $\{x \in \mathbb{Q} / x < a\}$ *; cette identification permet de considérer* $\mathbb{Q}$ *comme* inclus *dans* $\mathbb{R}$. *En particulier, cette inclusion permet d'écrire*

$$\text{« } \varepsilon = 0 \text{ » et « } \varepsilon_1 = 1 \text{ ».}$$

Les réels du type 2 (donc les réels non rationnels, éléments de $\mathbb{R} \diagdown \mathbb{Q}$*) seront dits dorénavant* irrationnels.

7 Prolongement à $\mathbb{R}$ de la relation $\leq$

Rappels 7.1

1. L'inclusion est un ordre total sur $\mathbb{R}$
2. $\forall \alpha, \beta \in R : \alpha \subset \beta \Longleftrightarrow \beta - \alpha \in \mathbb{R}_+$

Montrons que la relation $\subset$ sur $\mathbb{R}$ *prolonge* la relation $\leq$ définie sur $\mathbb{Q}$:

$$\begin{array}{ll} & \forall a, b \in \mathbb{Q} : a \subset b \\ \Longleftrightarrow & b - a \in \mathbb{R}_+ \\ \Longleftrightarrow & \left[b - a \in \mathbb{R}_+^* \text{ ou } b - a = 0\right] \\ \Longleftrightarrow & [0 \in b - a \text{ ou } b = a] \\ \Longleftrightarrow & [0 < b - a \text{ ou } b = a] \\ \Longleftrightarrow & a \leq b \end{array}$$

Ce prolongement permet d'*étendre la notation* $\leq$ *à* $\mathbb{R}$ par :

$$\alpha \leq \beta \Longleftrightarrow \alpha \subset \beta$$

Remarques 7.2 *:*

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R} : 0 \leq \alpha \Longleftrightarrow 0 \subset \alpha \Longleftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}_+$
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha \leq \beta \Longleftrightarrow \alpha \subset \beta \Longleftrightarrow \beta - \alpha \in \mathbb{R}_+ \Longleftrightarrow 0 \leq \beta - \alpha$

3. $\leq$ *est* compatible avec $+$ sur $\mathbb{R}$:
   $[\alpha \leq \beta \textit{ et } \alpha_1 \leq \beta_1] \Longrightarrow [\beta - \alpha \geq 0 \textit{ et } \beta_1 - \alpha_1 \geq 0] \Longrightarrow (\beta - \alpha) + (\beta_1 - \alpha_1) \geq 0$
   $\Longrightarrow (\beta + \beta_1) - (\alpha + \alpha_1) \geq 0 \Longrightarrow \alpha + \alpha_1 \leq \beta + \beta_1$

4. $\leq$ *est* compatible avec $\times$ sur $\mathbb{R}_+$:
   Soit $0 \leq \alpha \leq \beta$ *et* $0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1$ *: alors :* $\beta\beta_1 - \alpha\alpha_1 = (\beta - \alpha)\beta_1 + \alpha(\beta_1 - \alpha_1) \geq 0$ *donc* $\alpha\alpha_1 \leq \beta\beta_1$

Toutes ces propriétés confèrent à $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ une structure de *corps totalement ordonné*.

On définit sur $\mathbb{R}$ l'ordre strict associé à $\leq$ par

$$\alpha < \beta \Longleftrightarrow [\alpha \leq \beta \text{ et } \alpha \neq \beta] .$$

On a donc : $\alpha < \beta \Longleftrightarrow [\beta - \alpha \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \alpha \neq \beta] \Longleftrightarrow \beta - \alpha \in \mathbb{R}_+^*$

Propriété 7.3 $\forall r \in \mathbb{Q}\ \forall \alpha \in \mathbb{R} : r < \alpha \Longleftrightarrow r \in \alpha$

<u>*Démonstration*</u> :

$$\begin{array}{ll} & r < \alpha \\ \Longleftrightarrow & \alpha - r \in \mathbb{R}_+^* \\ \Longleftrightarrow & 0 \in \alpha - r \\ \Longleftrightarrow & 0 \in \alpha + (-r) \\ \Longleftrightarrow & [\exists x \in Q\ \exists y \in Q : 0 = x + y, x \in \alpha, y \in -r] \\ \Longleftrightarrow & [\exists x \in Q\ \exists y \in Q : 0 = x + y, x \in \alpha, y < -r] \\ \Longleftrightarrow & [\exists x \in Q : x \in \alpha, -x < -r] \\ \Longleftrightarrow & [\exists x \in \alpha : x > r] \\ \Longleftrightarrow & r \in \alpha \end{array}$$

8 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et théorème de la borne supérieure

Théorème 8.1 *Si α et β sont deux réels tels que $\alpha < \beta$, il existe un rationnel r tel que $\alpha < r < \beta$ (on dit que $\mathbb{Q}$ est* dense dans $\mathbb{R}$ *).*

<u>*Démonstration*</u> :

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha < \beta$: on distingue plusieurs cas :

- $\alpha \in \mathbb{Q}, \beta \in \mathbb{Q}$
  Alors $\dfrac{\alpha+\beta}{2} \in \mathbb{Q}$, et $\alpha < \dfrac{\alpha+\beta}{2} < \beta$.

- $\alpha \in \mathbb{Q}, \beta \in \mathbb{R} \diagdown \mathbb{Q}$
  Alors : $\alpha < \beta \Longleftrightarrow \alpha \in \beta$; donc : $\exists r \in Q : [\alpha < r \text{ et } r \in \beta]$ donc : $\alpha < r < \beta$.

- $\alpha \in \mathbb{R} \diagdown \mathbb{Q}, \beta \in \mathbb{Q}$
  Alors : $-\beta \in \mathbb{Q}, -\alpha \in \mathbb{R} \diagdown \mathbb{Q}$, et $-\beta < -\alpha$; d'après le cas précédent : $\exists r \in \mathbb{Q} : -\beta < r < -\alpha$ donc
  $\alpha < -r < \beta$ et $-r \in \mathbb{Q}$.

- $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \diagdown \mathbb{Q}$
  On a $\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ donc $0 \in \beta - \alpha$ donc $0 = x + y$ avec $x \in \beta$ et $y \in -\alpha$, donc $x \in \beta$ et $-x \in -\alpha$, donc $x \in \beta$ et $x \notin \alpha$, donc $\alpha \leq x$ et $x \in \beta$; alors il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r$ et $r \in \beta$; donc : $\alpha \leq x < r < \beta$ et finalement : $\alpha < r < \beta$.

Théorème 8.2 *Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, non vide et majoré (i.e. il existe un* majorant *de E, réel supérieur ou égal à tous les éléments de E). Alors : l'ensemble des majorants de E admet un plus petit élément, nommé* borne supérieure *de E*

Démonstration :

Soit α l'ensemble des rationnels qui ne majorent pas E. On va montrer successivement que α est un réel, que α est un majorant de E, et que α est le plus petit des majorants de E.

- Montrons que $\alpha \in \mathbb{R}$
  1. $\alpha \neq \emptyset$ et $\alpha \neq \mathbb{Q}$:
     Puisque $E \neq \emptyset$, soit $\beta \in E$; soit $r \in \beta$: alors $r < \beta$ donc $r \in \alpha$.

     Puisque E est majoré, soit γ un réel majorant de E ; soit un rationnel $r \notin \gamma$: on a donc $r \geq \gamma$ donc $\mathbb{R}$ majore E, et donc $r \notin \alpha$.
  2. Soit $x \in \alpha$ et $y \notin \alpha$: $\exists t \in E : x < t \leq y$; donc : $x < y$
  3. On raisonne par l'absurde en supposant que $\alpha = \{x \in \mathbb{Q} / x \leq a\}$ avec $a \in \mathbb{Q}$:
     $a \in \alpha$ donc : $\exists y \in E : a < y$. On a donc $a < \dfrac{a+y}{2} < y$; la première de ces deux inégalités implique $\dfrac{a+y}{2} \notin \alpha$; mais la seconde implique $\dfrac{a+y}{2} \in \alpha$.
- Montrons que α est un majorant de E
  Par l'absurde : supposons que : $\exists \beta \in E : \beta > \alpha$
  D'après la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$: $\exists r \in \mathbb{Q} : \alpha < r < \beta$. Donc $r \notin \alpha$ donc $\mathbb{R}$ est un majorant de E ; d'où une contradiction avec $r < \beta$, puisque $\beta \in E$.

- Montrons que α est le plus petit majorant de E
  Par l'absurde : soit γ un autre majorant de E tel que $\gamma < \alpha$.
  D'après la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$: $\exists r \in \mathbb{Q} : \gamma < r < \alpha$. Donc $r \in \alpha$ donc $\mathbb{R}$ n'est pas un majorant de E ; d'où une contradiction avec $\gamma < r$, puisque γ est un majorant de E.