Jeux et stratégies

Le principe du jeu de Nim est le suivant. Le plateau de jeu se présente sous la forme d'un certain nombre de piquets plantés dans un morceau de bois. Ces piquets sont destinés à recevoir des petits anneaux. Au début de la partie, on met un certain nombre d'anneaux autour de chacun des piquets, pas forcément le même nombre pour chaque piquet. Chacun son tour, chacun des deux joueurs choisit un piquet et y retire le nombre d'anneaux qu'il souhaite. Le jeu se termine lorsque tous les anneaux ont été retirés, le gagnant étant celui qui a pris le dernier anneau.

Donnons un exemple. Supposons qu'il y ait quatre piquets et qu'au début de la partie, le premier piquet est entouré d'un unique anneau, le second de trois anneaux, le troisième de cinq et le quatrième de sept. Par la suite, on notera cette position par le quadruplet $(1, 3, 5, 7)$. C'est au premier joueur, disons Paul, de jouer. Il choisit le dernier piquet et décide d'y retirer trois anneaux de sorte que l'on arrive dans la position $(1, 3, 5, 4)$. Son adversaire, Pierre, enlève alors les trois anneaux du deuxième piquet. La position est $(1, 0, 5, 4)$. Paul prend alors trois anneaux autour du troisième piquet. La position est $(1, 0, 2, 4)$. Pierre réfléchit et retire un unique anneau du dernier piquet... on arrive dans la position $(1, 0, 2, 3)$. Paul se sent mal, il prend quand même l'anneau restant dans la premier piquet, ce à quoi Pierre répond en enlevant un anneau du dernier piquet. On arrive dans la position $(0, 0, 2, 2)$. Paul abandonne. *Pourquoi ?*

Avant d'étudier en détail ce jeu, fixons un peu de vocabulaire. Un *jeu de Nim à n piquets* sera un jeu de Nim dont le plateau de jeu comporte n piquets. Une position est dite *gagnante* pour une joueur J si, jouant à partir de cette position, il a une stratégie *gagnante*, c'est-à-dire que quelles que soient les réactions de son adversaire, il sait quoi faire pour gagner la partie. La position $(0, \dots, 0)$ est ainsi perdante, car si un joueur doit jouer dans cette position, c'est précisément que l'autre joueur vient de prendre le dernier anneau, donc de gagner la partie. (Le terme de stratégie est employé ici au sens intuitif, il sera défini plus proprement plus loin dans ce texte, même si le concept reste le même...)

Propriété 0.1 *Si la position initiale d'une partie n'est pas gagnante pour le premier joueur, alors c'est le deuxième qui possède une stratégie pour gagner.*

Démonstration : En effet, si la position de départ n'est pas gagnante, c'est justement que le premier joueur n'a pas de stratégie gagnante. Le deuxième joueur a donc une suite de coups qui lui permettent de répondre aux coups du premier sans que celui-ci ne gagne. Mais alors, s'il applique cette tactique, le deuxième joueur est sûr de gagner : puisque le second ne peut pas arriver à la position $(0, \dots, 0)$, c'est forcément lui qui y arrivera. Autrement dit, le deuxième joueur a une stratégie gagnante. $\square$

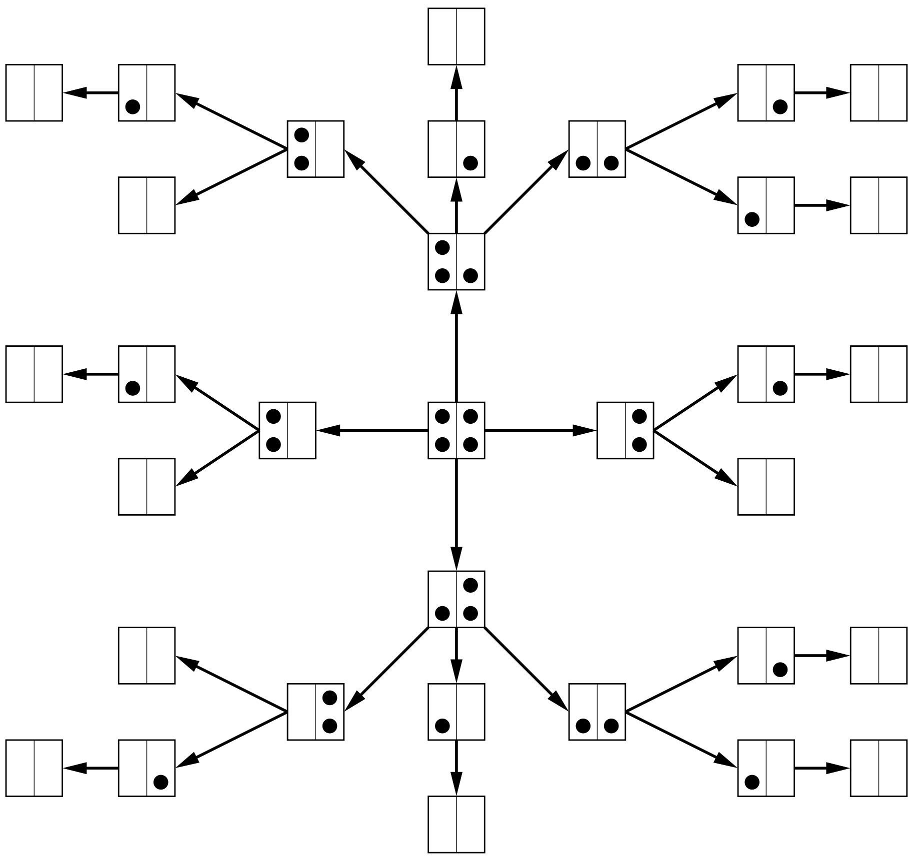
Ceci prouve en particulier que si les joueurs savent bien jouer, l'issue de la partie est en fait simplement déterminée par la position initiale. D'où l'intérêt pour les positions possibles d'un jeu de ce type, qui permettent de construire (du moins théoriquement) des stratégies gagnantes...

1 Arbre d'un jeu

Nous nous intéresserons ici à des jeux à deux joueurs et à information parfaite (c'est-à-dire sans intervention du hasard, ce qui exclut par exemple les jeux dans lesquels une partie des coups sont fonction du résultat d'un lancé de dés, etc). La structure la plus simple pour modéliser un tel jeu, en général, est celle d'un arbre. Les sommets correspondent à des états du jeu, les arêtes à des mouvements des joueurs. La *racine* de l'arbre correspond ainsi à l'état initial du jeu, et l'on construit progressivement l'arbre en fonction de tous les mouvements possibles, jusqu'à arriver aux *feuilles* de l'arbre, qui correspondent à des états qui terminent le jeu.

Exemple : Aux échecs, l'arbre à construire serait considérable : à chaque position du jeu d'échec, le joueur dont c'est le tour à un nombre conséquent de mouvements possibles, qui correspondent tous à des arêtes distinctes...

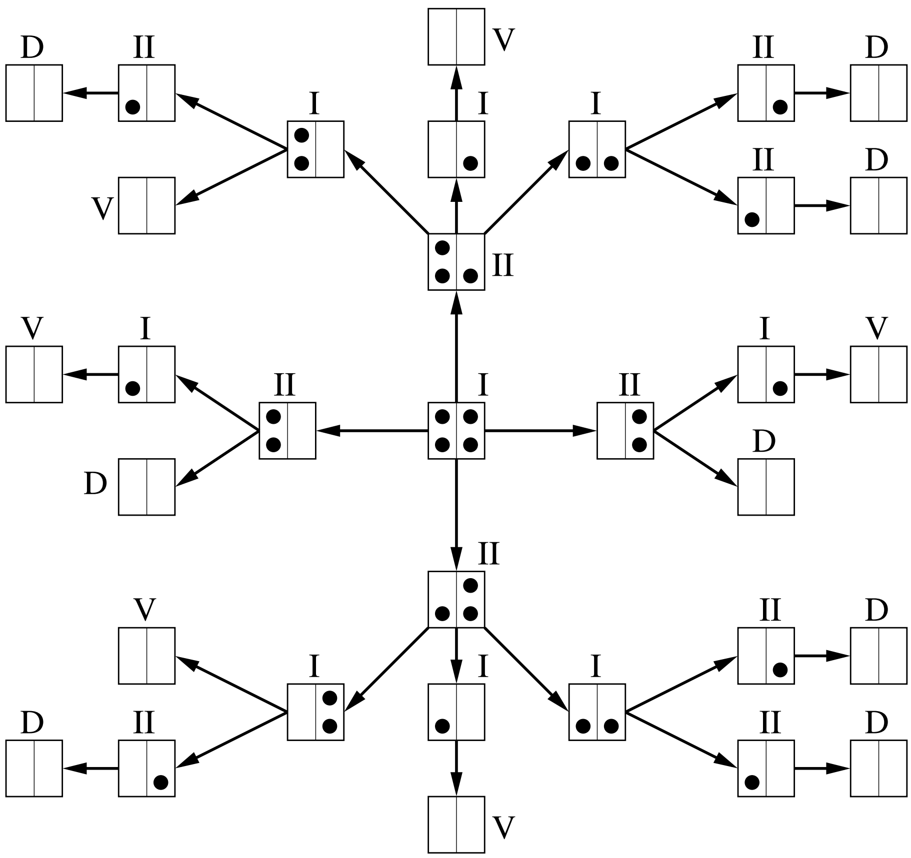
Un cas beaucoup plus simple est celui du jeu de Nim à deux piquets. Par exemple, si l'on a au départ 2 anneaux sur chaque piquets, l'arbre correspondant est le suivant (pour chaque position, les anneaux restant sur chaque piquet sont représentés par des points) :



Sous cette forme, on a au passage représenté toutes les parties possibles : une partie commence à la racine, et parcours une *branche* de notre arbre, jusqu'à une feuille correspondant à l'état final de la partie jouée. Tel quel, ce mode de représentation n'a pas forcément un intérêt démesuré. En revanche, il permet aisément de repérer les positions gagnante, d'élaborer des *stratégies* pour les deux joueurs. Pour ceci, il convient de compléter notre arbre.

- D'abord, notre arbre tel qu'on l'a représenté ne permet pas de déterminer tous les renseignements possible sur le jeu que l'on est en train de jouer. Ainsi, on ne sait pas, dans une position donnée, lequel des deux joueur doit jouer. Aussi il convient d'associer à chaque sommet de notre arbre le nom (ou le numéro) du joueur dont c'est le tour. Par convention, on appellera I le premier joueur (celui qui fait le premier mouvement de la partie, c'est-à-dire celui qui part de la racine de l'arbre), et II le second joueur.
- On veut également pouvoir déterminer sur l'arbre le résultat du jeu. Chaque feuille de l'arbre correspondant à une partie jouée donc à des conséquences pour les deux joueurs (victoire du premier joueur, défaite du premier joueur, match nul, gain de 1 Euro pour le premier joueur, perte de 500 Euros pour le premier joueur, etc). À chacune des feuilles sera donc affecté une *valeur*, qui est déterminée par les règles du jeu et représente le résultat de la partie.

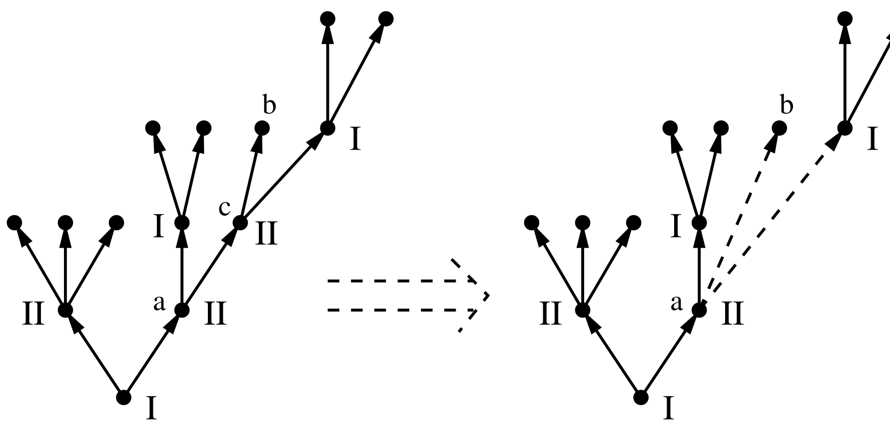
Exemple : Dans le cas du jeu de Nim précédent, on notera V la victoire du premier joueur et D sa défaite :



Quelques restrictions :

- Pour l'instant, nous allons nous restreindre aux jeux qui n'ont que deux issues possibles : victoire du premier joueur (événement noté V), et victoire du second (noté D, comme défaite du premier).
- Dans la plupart des jeux connus, chacun des deux joueurs joue à tour de rôle. Ceci n'est en fait pas une restriction, puisque l'on peut « coller » deux sommets successifs (*i.e* reliés par une arête) correspondant au même joueur : l'action dudit joueur correspondra éventuellement à deux actions successives, mais de toutes façons cela correspond bien à notre idée de départ : une arête de l'arbre correspond à l'action d'un joueur pour amener le jeu d'un état à un autre.

  Exemple : Les deux arbre qui suivent sont en réalité équivalents pour l'étude des jeux qu'ils représentent. Sur le premier de ces arbres, dans la position a, il nous importe peu que le joueur II, pour arriver à la position b, ait ou non à passer par la position c... On peut donc « simplifier » notre arbre et représenter le jeu dont il est question par le second arbre.



Ainsi, dans ce qui suit, on pourra faire la supposition suivante : à l'un des joueurs correspond la racine et tous les sommets à distance paire de la racine ; à l'autre correspondent les sommets de l'arbre à distance impaire de la racine.

2 Stratégies gagnantes

Une *stratégie* pour un des deux joueurs, c'est la donnée des actions correspondant à faire à chaque position du jeu pour laquelle c'est à ce joueur de jouer. Autrement dit, comme les positions sont représentées par les sommets de l'arbre et les actions possibles des joueurs par les arêtes partant de ces sommets, une stratégie pour le joueur I, c'est la donnée d'une fonction qui associe à chaque sommet étiqueté I une arête partant de ce sommet.

Ainsi, si l'on connaît la stratégie de chacun des joueurs, on peut déterminer la façon dont se déroulera la partie. À chaque étape en effet, le joueur dont c'est le tour de jouer va choisir l'arête que lui indique sa stratégie...

Définition Une stratégie est dite *gagnante* pour un joueur J si, quelle que soit la façon dont joue l'autre joueur, c'est le joueur J qui gagne lorsqu'il joue selon cette stratégie.

Nous allons voir que dans un jeu *fini* (c'est-à-dire dont l'arbre a un nombre fini de sommets) à deux joueurs, à information parfaite, et dont les seules issues possibles sont les victoires de l'un ou l'autre des joueurs, alors l'un des deux possède une stratégie gagnante.

Théorème 2.1 (Zermelo) *Dans un jeu fini à deux joueurs, à information parfaite et ayant seulement deux issues possibles (victoire de I ou victoire de II), alors l'un des deux joueurs a une stratégie gagnante.*

Démonstration : Nous allons construire une stratégie gagnante en partant de la fin du jeux, selon l'*algorithme de Zermelo* (utilisé à l'origine pour analyser le jeu d'échecs, en 1912). L'idée est de partir des feuilles de l'arbre, pour pouvoir remonter peu à peu.

On va étiqueter peu à peu les sommets de l'arbre comme on l'a déjà fait pour les feuilles. Un sommet de l'arbre est *gagnant* (V) si, dans le sous-jeu correspondant au sous-arbre dont ce sommet est la racine, le joueur I possède une stratégie gagnante. Le sommet sera *perdant* (D) si au contraire c'est le joueur II qui a une stratégie gagnante dans le sous-jeu correspondant. Tout ce qu'il nous reste à montrer, c'est que la racine peut être étiquetée...

Nous allons montrer par récurrence sur la *hauteur* de l'arbre (*i.e.* la longueur de la plus longue branche) que tout sommet de l'arbre d'un jeu est soit gagnant soit perdant. Cette propriété est immédiate pour les arbres de hauteur 0 : un tel arbre est réduit à sa racine, qui est également une feuille, donc étiquetée V ou D. L'un des deux joueurs a donc gagné sans rien faire, donc possède une stratégie gagnante.

Supposons le résultat établi pour les arbres de hauteur au plus n, et soit un jeu dont l'arbre est de hauteur $n+1$. On considère les fils de la racine (*i.e.* les sommet voisins de la racine). Les sous-arbres correspondant à ces sommet sont de hauteur au plus n, on peut donc étiqueter tous leurs sommets par des V ou des D. En particulier, tous les fils de la racine sont étiquetés.

Plusieurs cas se présentent alors :

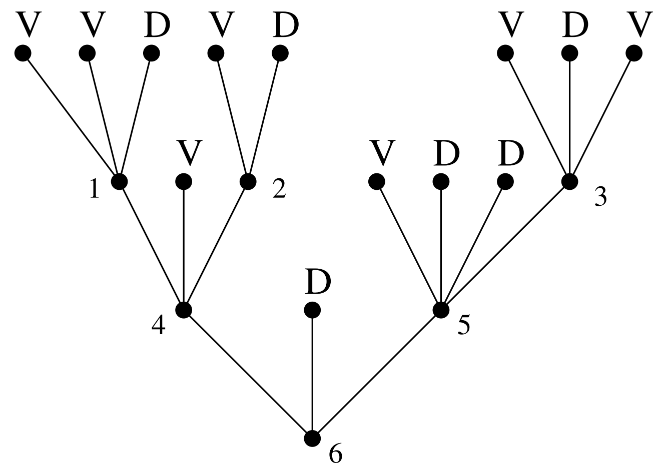
- La racine correspond au premier joueur, et l'un de ses fils au moins est étiqueté V. On obtient alors une stratégie gagnante pour le joueur I, qui consiste à choisir, au niveau de la racine, une arête qui mène à un sommet V, puis à suivre la stratégie gagnante à partir de ce sommet (pour avoir une stratégie complète, c'est-à-dire définie partout, on peut la compléter n'importe comment sur les autres branches).

- La racine correspond au premier joueur, mais aucun de ses fils n'est étiqueté V (ils sont tous étiqueté D). Alors c'est le joueur II qui possède une stratégie gagnante. Quel que soit le choix du joueur I à la racine, il répond ensuite par la stratégie gagnante de la branche choisie par I.

- Le cas où la racine correspond au joueur II est symétrique : si l'un au moins des fils de la racine est étiqueté D, alors le joueur II a une stratégie gagnante, obtenue en choisissant le sommet en question, puis en adoptant la stratégie gagnante correspondante. Sinon, tous les fils de la racine sont étiquetés V, et le joueur I a une stratégie gagnante à partir de la racine.

On conclut par récurrence. □

Exemple : Sur l'arbre suivant, on a étiqueté les feuilles par des V ou des D.



Selon l'algorithme précédemment décrit, on va partir des feuilles. Le sommet 1 est de niveau pair, il correspond donc au joueur I. À partir du sommet 1, il suffit au joueur I de choisir une feuille étiquetée V pour gagner. Comme ceci est possible (deux fils du sommet 1 étant étiquetés V), le sommet 1 est donc étiqueté V. De même pour les sommets 2 et 3. Ensuite, le sommet 4 a trois fils étiquetés V. Bien qu'il soit de niveau impair (c'est au joueur II de choisir), c'est donc encore le joueur I qui possède une stratégie gagnante à partir du sommet 4 : quel que soit le choix du joueur II, il possède ensuite une stratégie gagnante. En revanche, le sommet 5 est de niveau impair (c'est au joueur II de jouer), et possède des fils étiquetés D. C'est donc le joueur II qui possède une stratégie gagnante à partir du sommet 5, qui sera donc étiqueté D.

On en arrive donc à la racine, qui possède deux fils étiquetés D, et un fils (le sommet 4) étiqueté V. Il est donc étiqueté V : c'est au joueur I de choisir, sa stratégie gagnante consiste à choisir le sommet 4...

N.B. On peut raffiner un peu l'énoncé de notre théorème : nous avons en effet utilisé le fait que la hauteur de l'arbre est fini, non que l'arbre a un nombre fini de sommet. Le même résultat reste donc valable lorsque les joueurs ont une infinité de choix possibles à chaque étape, à condition toutefois que l'arbre n'ait qu'un nombre fini de niveaux.

3 Exemple du jeu de Nim

3.1 Positions gagnantes

Le jeu de Nim à un seul piquet est on ne peut plus simple : toute position, à l'exception de la position (0) est gagnante pour le premier joueur. Il lui suffit en effet de prendre tous les anneaux sur le piquet ! Passons à un cadre plus général.

Lemme 3.1 *Une position* P *est gagnante si et seulement si on peut atteindre une position perdante en un seul coup à partir de* P*.*

Plaçons nous alors un instant dans le cas du jeu de Nim à deux piquets. La propriété énoncée précédemment va nous permettre de déterminer facilement toutes les positions gagnantes.

En effet, représentons les positions par le tableau qui suit. Une gros point indique que la position en question est perdante et une croix qu'elle est gagnante. Une case non remplie bien entendu indique que l'on ne sait pas (encore) ce qu'il en est. Pour l'instant, on a :

	0	1	2	3	4	5	6
0	$\bullet$						
1							
2							
3							
4							
5							
6							

On remarque que sur ce tableau les positions qui peuvent être atteintes en un coup à partir d'une position P sont exactement celles qui se trouvent soit à gauche, soit en dessus de P. Ainsi le lemme 3.1 peut aussi s'exprimer de la façon suivante : une case contient un point si et seulement si toutes les cases qui sont à sa gauche *et* toutes les cases qui sont au-dessus contiennent des croix. Cela implique en particulier que dès qu'une case contient un point, toutes les cases qui sont à sa droite et toutes les cases qui sont en-dessous doivent contenir une croix. Ainsi on peut déjà compléter le tableau de la façon suivante :

	0	1	2	3	4	5	6
0	$\bullet$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
1	$\times$						
2	$\times$						
3	$\times$						
4	$\times$						
5	$\times$						
6	$\times$						

Regardons maintenant la case $(1, 1)$. Les cases qui sont à sa gauche et les cases qui sont en dessus contiennent toutes des croix. Ainsi cette case doit contenir un point et on peut continuer la construction du tableau :

	0	1	2	3	4	5	6
0	$\bullet$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
1	$\times$	$\bullet$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
2	$\times$	$\times$					
3	$\times$	$\times$					
4	$\times$	$\times$					
5	$\times$	$\times$					
6	$\times$	$\times$					

Théorème 3.2 *Les positions perdantes (i.e gagnantes pour le second joueur) du jeu de Nim à deux piquets sont exactement celles de la forme* (n, n)*.*

Étant donnée une telle position, la stratégie que doit suivre le deuxième joueur pour gagner consiste évidemment à revenir à chaque étape à une position de la forme (n, n), donc à prendre le même nombre d'anneaux que son adversaire au coup précédent, mais sur l'autre anneau. Inversement, pour une position qui n'est pas perdante, la stratégie que doit suivre le premier joueur pour gagner consiste à prendre sur le piquet qui contient le plus d'anneau de façon à en laisser exactement le même nombre que sur l'autre, puis à suivre la stratégie précédemment décrite.

Cette méthode se généralise bien sûr à des jeux de Nim à n piquets : la position $(0, \ldots, 0)$ est perdante, et une position $(a_1, \ldots, a_n)$ est gagnante si et seulement si on peut atteindre en un coup une position perdante à partir de $(a_1, \ldots, a_n)$ (ces positions sont les $(a_1, \ldots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \ldots, a_n)$, avec $x < a_j$).

Ainsi, on trouve que pour un jeu de Nim à quatre piquets, la position $(1, 3, 5, 7)$ est perdante (et donc que Paul aurait pu abandonner la partie dès le début). Malheureusement, cette méthode théorique n'est pas très facile à mettre en pratique.

3.2 Une stratégie fondée sur la base 2

Signalons au passage, dans le cas du jeu de Nim, une caractérisation originale des positions gagnantes et perdantes, intimement liée à l'écriture en base 2. Nous allons bien sûr expliciter la stratégie gagnante correspondante.

Si l'on écrit en base 2 le nombre d'anneaux sur le premier piquet (resp. le deuxième, le troisième, etc), on obtient une suite de 0 et de 1. Si l'on range ces écriture dans un tableau dont les lignes correspondent aux nombres $a_1, \ldots, a_n$ de la position étudiée, et dont les colonnes correspondent aux puissances de 2, on obtient quelque chose du type :

	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
	64	32	16	8	4	2	1
33		1	0	0	0	0	1
59		1	1	1	0	1	1
13				1	1	0	1
22			1	0	1	1	0

Ainsi présentée, on est en mesure de donner un critère pour déterminer les positions gagnantes et perdantes : une position est perdante si dans chaque colonne du tableau, il y a un nombre pair de fois le chiffre 1. Elle est gagnante sinon, c'est-à-dire si au moins une colonne contient un nombre impair de 1.

L'argument clé est que, partant d'une position dans laquelle chaque colonne contient un nombre pair de fois le chiffre 1, le deuxième joueur est toujours en mesure de ramener le jeu dans un état ayant la même propriété, quel que soit le coup joué par le premier joueur. Plaçons nous en effet dans une telle position. Le premier joueur doit retirer un certain nombre d'anneau, tous sur le même piquet. Il ne modifie donc qu'une seule ligne du tableau, dans laquelle un certain nombre de 1 vont être transformés en des 0, et inversement. Tout ceci change la parité du nombre de 1 dans un certain nombre de colonnes, qui contiennent alors un nombre impair de fois le chiffre 1.

Pour rétablir la parité dans toutes les colonnes modifiées, le deuxième joueur choisit alors une ligne qui correspondent à un chiffre 1 dans la colonne modifiée la plus à gauche (c'est possible puisque par hypothèse ladite colonne contient un nombre impair de fois le chiffre 1, donc au moins une fois...). Il lui faut alors retirer le nombre d'anneau sur le piquet correspondant de façon à modifier exactement les chiffres, dans l'écriture en base 2, des colonnes affectées par le le premier joueur. Cette opération correspond bien à diminuer le nombre d'anneaux sur le piquet, puisque parmi les chiffres qui changent, celui le plus à gauche passe de la valeur 1 à la valeur 0.

Comme la position finale $(0, \ldots, 0)$ correspond évidemment à un tableau dont toutes les colonne ont un nombre pair de 1, c'est forcément le second joueur qui atteindra cette position, s'il suit notre stratégie. Il aura alors remporté la partie.

Exemple : La position décrite par le tableau précédent n'est pas perdante : toutes les colonnes contiennent un nombre pair de fois le chiffre 1, sauf la colonne de droite. La stratégie gagnante pour le premier joueur consiste à rétablir la parité de cette colonne, en enlevant un unique anneau dans l'une des trois premiers piquets, puis à suivre la stratégie que nous avons décrite pour le second joueur...

N.B. Dans le jeu décrit en introduction, on s'aperçoit que la position de départ est perdante pour le premier joueur, Paul. En effet, le tableau est ici :

	2^3	2^2	2^1	2^0
	8	4	2	1
1				1
3			1	1
5		1	0	1
7		1	1	1

Le critère énoncé nous dit que cette position de départ est perdante pour le premier joueur, Paul. Si l'on observe l'effet sur ce tableau des coups décrits dans l'introduction, on s'aperçoit que Pierre a effectivement suivi la stratégie que nous avons exposée.

4 Valeur d'un jeu compétitif

Nous nous sommes pour l'instant intéressés à des jeux pour lesquels seuls deux issues étaient possibles : la victoire de l'un ou l'autre des deux joueurs. Or en pratique, dans de nombreux cas, il peut y avoir d'autres issues. Ainsi, aux échecs, la partie peut se terminer sur un nul (pat).

Mais le cas de deux issues possibles seulement résume à lui seul une grande partie du cas général. En effet, on s'y ramène de la façon suivante :

Théorème 4.1 (Zermelo) *Soit* T *un ensemble d'issues possibles d'un jeu à deux joueur à information parfaite. Alors de deux choses l'une :*

- *soit le joueur I a une stratégie qui lui permet d'assurer une issue dans* T.
- *soit le joueur II a une stratégie qui lui assure une issue dans* $\sim$ T*, le complémentaire de* T.

Démonstration : Il suffit de remplacer, dans la démonstration du théorème 2.1, les occurrences de V par des T et celles de D par des $\sim$ T... $\square$

Nous allons maintenant examiner quelques conséquences de ceci sur les jeux *compétitifs*. Pour définir ces jeux, il nous faut d'abord introduire quelques notations.

<u>NOTATION :</u> Si a et b désignent deux issues possibles d'un jeu, la notation $a \preceq_1 b$ (resp. $a \preceq_2 b$) signifiera ici que le joueur I (resp. le joueur II) préfère l'issue b à l'issue a. On notera $a \prec_1 b$ pour dire que cette préférence est stricte.

Définition Un jeu à deux joueurs est *strictement compétitif* si les deux joueurs ont des buts diamétralement opposés, c'est-à-dire si, quels que soient les issues a et b, on a :

$$a \prec_1 b \quad \Longleftrightarrow \quad b \prec_2 a$$

(Le terme de jeu compétitif s'oppose à celui de jeu coopératif, jeu dans lequel les deux joueur ont des objectifs communs, que nous n'étudierons pas ici.)

EXEMPLE : Les échecs sont un exemple naturel de jeu strictement compétitif. Les issues possibles sont en l'occurrence "victoire des blancs" (B), "victoire des noirs" (N) et "pat" (P). Si l'on appelle I le joueur qui a les blancs et II celui qui a les noirs, on a alors N $\prec_1$ P $\prec_1$ B et B $\prec_2$ P $\prec_2$ N.

On supposera également par la suite que les deux joueurs ont des objectifs compatibles, c'est-à-dire que les relations $\prec_1$ et $\prec_2$ sont bien des relations d'ordre. Ainsi, il est raisonnable de supposer la transitivité de ces relations : si un joueur préfère l'issue b à l'issue a et l'issue c à l'issue b, alors il préfère l'issue c à l'issue a. On supposera également que ces ordres sont totaux, c'est-à-dire que chacun des joueurs est capable de choisir entre deux issues possibles.

On peut donc énumérer l'ensemble $\mathrm{U} = \{u_1, \ldots, u_k\}$ des issues possibles de notre jeu de façon à avoir :

$$u_1 \prec_1 u_2 \prec_1 \cdots \prec_1 u_k$$

et donc

$$u_1 \succ_2 u_2 \succ_2 \cdots \succ_2 u_k$$

Définition Une issue v du jeu est appelée *valeur du jeu* si le joueur I possède une stratégie qui lui garantit une issue dans l'ensemble $\{u \in \mathrm{U}, u \succeq_1 v\}$ et si le joueur II possède une stratégie qui lui garantit une issue dans l'ensemble $\{u \in \mathrm{U}, u \succeq_2 v\}$.

C'est-à-dire que l'on se trouve dans une situation du type suivant :

$$\overbrace{u_1 \quad \succ_2 \quad \ldots \quad \succ_2 \quad u_{i-1} \quad \succ_2 \quad v}^{\text{II peut forcer une de ces issues}} = \underbrace{u_i \quad \prec_1 \quad u_{i+1} \quad \prec_1 \quad \ldots \quad \prec_1 \quad u_k}_{\text{I peut forcer une de ces issues}}$$

N.B. Une telle situation est « optimale » : chacun des deux joueurs peut obtenir une issue du jeu au moins aussi bonne (selon ses critère) que l'issue v. Si chacun applique sa stratégie optimale, v sera nécessairement l'issue de la partie jouée. Finalement, ni l'un ni l'autre ne peut espérer mieux, car v est aussi la moins mauvaise issue compte tenu de la stratégie de l'autre.

Théorème 4.2 *Tout jeu à deux joueur, strictement compétitif et à information parfaite, possède une unique valeur.*

Démonstration : L'unicité est immédiate : si deux issues u_i et u_j distinctes vérifiaient cette propriété, on aurait par exemple $u_i \prec_1 u_j$ (et donc $u_i \succ_2 u_j$). Ceci signifierait qu'à la fois I peut forcer une issue $u \succeq_1 u_j$ et II peut forcer une issue $u \succeq_2 u_i$, mais ces deux conditions sont incompatibles, puisqu'une partie dans laquelle les deux joueurs appliqueraient ces stratégies aurait pour résultat une issue u vérifiant à la fois $u \succeq_1 u_j$ et $u \succeq_2 u_i$.

Pour l'existence, considérons l'ensemble $\mathrm{A} \subset \mathrm{U}$ des issues que le joueur I peut garantir (c'est-à-dire l'ensemble des $u \in \mathrm{U}$ tel que I a une stratégie lui garantissant une issue $u' \succ_1 u$). Cet ensemble A est non vide, puisque le joueur I peut bien sûr garantir une issue au moins aussi bonne que u_1 (u_1 étant la pire issue de son point de vue). On peut donc définir la meilleure issue possible pour I dans l'ensemble A (c'est l'élément maximal de A pour l'ordre $\prec_1$). Appelons u_i cette issue. Alors u_i est la valeur du jeu.

En effet, si $i = k$, la définition de u_i signifie que le joueur I a une stratégie qui lui garantit l'issue u_k, qui est la meilleure pour lui. Et le joueur II peut dans ce cas garantir une issue au moins aussi bonne pour lui que u_k (c'est la pire issue pour lui...).

Si $i < k$, alors toujours par définition de u_i, le joueur I ne peut garantir une issue au moins aussi bonne pour lui que u_{i+1}. C'est-à-dire qu'il n'a pas de stratégie qui assure une issue dans $\mathrm{T} = \{u \in \mathrm{U}, u \succeq_1 u_{i+1}\} = \{u \in \mathrm{U}, u \succ_1 u_i\}$. D'après le théorème de Zermelo (4.1), le joueur II peut alors assurer une issue dans $\sim \mathrm{T} = \{u \in \mathrm{U}, u \preceq_1 u_i\} = \{u \in \mathrm{U}, u \succeq_2 u_i\}$. Les deux joueurs peuvent donc garantir une issue au moins aussi bonne que u_i, de leur point de vue. □

Corollaire 4.3 *Le jeu d'échec a une valeur.*

Sans que l'on puisse construire les stratégies optimales pour les deux joueurs (les arbres à construire étant bien trop gros par rapport aux capacités de calcul des ordinateurs actuels), on peut affirmer qu'une et une seule des situations suivantes est vérifiée :

– Les blancs ont une stratégie gagnante.
– Les noirs ont une stratégies gagnante.
– Les blancs et les noirs ont chacun une stratégie qui leur assure la nulle.

N.B. Si v est la valeur du jeu, S_1 et S_2 des stratégies qui garantissent aux joueurs I et II respectivement des issues au moins aussi bonnes (de leur point de vue) que v, alors le couple $(\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2)$ est un cas particulier d'*équilibre de Nash.*

Définition Une paire de stratégies $(\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2)$ est un *équilibre de Nash* pour le jeu considéré si :

– S_1 est une stratégie optimale pour le joueur I s'il sait que le joueur II va joueur selon la stratégie S_2.
– S_2 est une stratégie optimale pour le joueur II s'il sait que le joueur I va joueur selon la stratégie S_1.

La notion d'équilibre de Nash est bien plus générale, elle a de nombreuses applications, en économie notamment. Il serait cependant long et fastidieux d'exhiber des exemples d'équilibres de Nash qui ne soient pas du type précédent.