nom :

spé MP1 carnot DIJON

Dans un domaine Δ du plan de deux variables réelles $x,\ y$, on donne trois familles $F_1,\ F_2,\ F_3$ de courbes analytiques telles que :

(a) Par tout point de Δ il passe une courbe et une seule de chaque famille (ce qui n'exclut pas l'existence possible en dehors de Δ de points par où il en passe plusieurs) ;

(b) Deux courbes appartenant à deux familles différentes ont au plus un point commun dans Δ.

PARTIE I

1) Montrer qu'on peut toujours représenter les familles $F_1,\ F_2,\ F_3$ par des équations de la forme

$$f_1(x,y)=a_1, \qquad f_2(x,y)=a_2, \qquad f_3(x,y)=a_3,$$

et qu'on peut par une transformation analytique biunivoque substituter à Δ un domaine dans lequel F_1 et F_2 sont représentés par des segments parallèles aux axes de coordonnées. De quelle nature est l'équation de la transformée d'une courbe de F_3 ?

2) Soient $C_1,\ C_2,\ C_3$ trois courbes arbitraires de $F_1,\ F_2,\ F_3$ et A un point arbitraire de C_1 ; par A passe une courbe de F_2 dont on désigne par B le point de rencontre, s'il existe, avec C_3 ; Par B passe une courbe de F_1 dont on désigne par C le point de rencontre, s'il existe, avec C_2 ; Par C passe une courbe de F_3 dont on désigne par D le point de rencontre, s'il existe avec C_1 ; par D passe une courbe de F_2 dont on désigne par E le point de rencontre, s'il existe, avec C_3 ; par E passe une courbe de F_1 dont on désigne par F le point de rencontre, s'il existe , avec C_2.

Nous dirons que les familles $F_1,\ F_2,\ F_3$ ont la propriété de **"FERMETURE HEXAGONALE"** lorsque la courbe de F_3 qui passe par le point F passe également par le point initial A.

Montrer que, s'il existe des représentations de $F_1,\ F_2,\ F_3$ vérifiant dans tout le domaine Δ l'identité $\mathbf{f_1(x,y)}+\mathbf{f_2(x,y)}+\mathbf{f_3(x,y)}\equiv\mathbf{0}$, la figure a la propriété de fermeture hexagonale.

Examiner le cas où, F_1 et F_2 étant transformées en les parallèlles aux axes, les courbes de F_3 sont les intégrales d'une équation différentielle à variables séparées, $A(x)dx+B(y)dy=0$, où $\frac{A}{B}$, supposée uniforme, a un signe constant dans le domaine Δ.

3) Étudier si la propriété de fermeture hexagonale est vérifiée dans les exemples suivants :

(a) $P,\ Q,\ R$ étant trois points non alignés, on prend comme domaine Δ l'intérieur du cercle circonscrit au triangle PQR et pour $F_1,\ F_2,\ F_3$ les faisceaux de cercles ayant pour points de bases respectifs P et Q, Q et R, R et P ;

(b) On prend comme domaine Δ l'intérieur du triangle PQR et pour $F_1,\ F_2,\ F_3$ les faisceaux de cercles ayant pour points de PONCELET respectifs P et Q, Q et R, R et P ;

(c) Le plan étant rapporté à deux axes rectangulaires $Ox,\ Oy$, on désigne par γ le cercle de centre O et de rayon ρ et l'on prend comme domaine Δ le demi plan $x>\rho$; F_1 est la famille des droites passant par O, F_2 est la famille des droites tangentes à γ en un point d'ordonnée positive, F_3 est la famille des droites tangentes à γ en un point d'ordonnée négative.

PARTIE II

$\varphi(x,y)$ étant une fonction analytique arbitraire des variables x et y, on associe à chacune des familles F_i $(i=1,\ 2$ ou $3)$ une fonction $T_i(\varphi)$ définie par la relation : $T_i(\varphi)=\lambda_1\frac{D(\varphi,f_i)}{D(x,y)}=\lambda_i\big(\dfrac{\partial f_i}{\partial y}.\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}-\dfrac{\partial f_1}{\partial x}.\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\big)$, où λ_i désigne une fonction des variables x et y.

1) Montrer que l'on peut toujours choisir les multiplicateurs λ_i de sorte que les fonctions associées à trois familles arbitraires $F_1,\ F_2,\ F_3$ vérifient $T_1(\varphi)+T_2(\varphi)+T_3(\varphi)\equiv 0$ (1)

Que deviennent les fonctions $T_i(\varphi)$ lorsqu'on effectue sur x,y une transformation analytique biunivoque ?

2) Montrer que la fonction $T_1[T_2(\varphi)]-T_2[T_1(\varphi)]$ est indépendante des dérivées secondes de φ et que l'on peut trouver des coefficients $h_1(x,y)$ et $h_2(x,y)$ tels que $T_1(T_2)-T_2(T_1)\equiv h2.T_1-h_1.T_2$.

Que deviennent h_1 et h_2 lorsqu'on effectue sur $x,\ y$ une transformation analytique biunivoque ?

3) Montrer que si $F_1,\ F_2,\ F_3$ sont transformables simultanément en trois faisceaux de droites parallèles, on peut choisir les variables et les multiplicateurs λ_i de façon que l'on ait, en même temps que (1), la relation $T_1(T_2)-T_2(T_1)=0$. (2)

Si, réciproquement, les conditionbs (1) et (2) sont vérifiées, on a $h_1=h_2=0$ et les deux systèmes différentiels $\begin{cases} T_1(\psi)=1, \\ T_2(\psi)=0, \end{cases}$ $\begin{cases} T_1(\psi)=0, \\ T_2(\psi)=1, \end{cases}$ sont intégrables. En déduire que $F_1,\ F_2,\ F_3$ sont alors transformables en faisceaux de droites parallèles et ont la propriété de fermeture hexagonale.

Étudier par ce procédé l'exemple suivant : F_1, $x = constante$; F_2, $y = constante$; F_3, $\frac{e^x.\ln y}{e^x+\ln y} = constante$.