Courbure des surfaces triangulées

Frédéric Bosio

Il existe, en géométrie riemannienne, une notion très importante qui est celle de *courbure*, mais qui est, hélas, très difficile à définir et à utiliser. On peut cependant, dans le cas des surfaces, en donner une vision assez simple et néanmoins assez précise.

Nous définissons la courbure en un point comme le "défaut de platitude" de la surface en ce point. C'est une notion qui a une signification locale, liée à une métrique. Nous l'utilisons ensuite afin de présenter la caractéristique d'Euler-Poincaré des surfaces, et montrer ainsi l'intérêt de la courbure globale.

1 Surfaces triangulées

On appelle surface triangulée un espace Σ, non vide, qui vérifie les propriétés suivantes :

i) Σ est une réunion finie de triangles (on appelle triangle un espace isométrique à l'enveloppe convexe de trois points non alignés dans $\mathbf{R}^2$) :

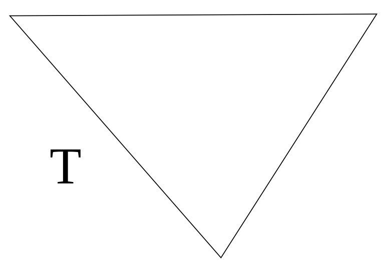

Figure 1 : Un triangle

$$\Sigma = \bigcup_{i \in I} T_i$$

où I est un ensemble fini

ii) Deux triangles T_i et T_j, $i \neq j$, ont leur intersection soit vide, soit réduite à un sommet commun, soit réduite à une arête commune. En particulier, la situation de la figure 2 ne peut pas se présenter, car $T_1 \cap T_2$ et $T_1 \cap T_3$ ne sont que des morceaux d'arête de T_1.

iii) toute arête est contenue dans exactement deux triangles distincts.

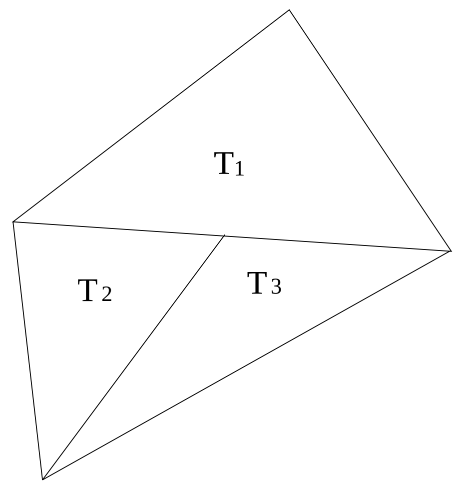

Figure 2 : Situation interdite

Remarque. Il s'agit en fait simplement de découper des triangles dans un plan et de les recoller suivant des arêtes de même longueur. On ne peut néanmoins pas toujours le faire "physiquement", car notre surface ne se plonge pas forcément dans $\mathbf{R}^3$.

Dans toute la suite, nous ne considérerons que des surfaces triangulées connexes, c'est à dire d'un seul tenant (Σ n'est pas réunion disjointe de deux sous-surfaces triangulées).

Remarque. Une surface triangulée est munie d'une topologie naturelle, où une partie est ouverte si sa trace sur chaque triangle (c'est-à-dire son intersection avec) est une partie ouverte du triangle. Cette topologie ne dépend pas de la forme des triangles mais uniquement de la façon dont ils sont recollés. Ainsi, lorsqu'on ne s'interesse qu'à la topologie de la surface, on peut supposer que tous les triangles utilisés sont équilatéraux ce qui permet d'étudier la surface en étudiant simplement sa combinatoire.

Néanmoins, on ne peut restreindre l'étude de la courbure d'une surface, qui est une notion géométrique, à une étude uniquement combinatoire. Pour parler de géometrie, il faut parler de distance, et une surface triangulée est justement munie d'une distance naturelle où les triangles sont plongés isométriquement dans la surface et où la distance entre deux points est la longueur minimale d'un chemin affine par morceaux joignant ces deux points.

Exemple : Le tétraèdre, l'octaèdre, et l'icosaèdre sont des surfaces triangulées, toutes trois homéomorphes à la sphère.

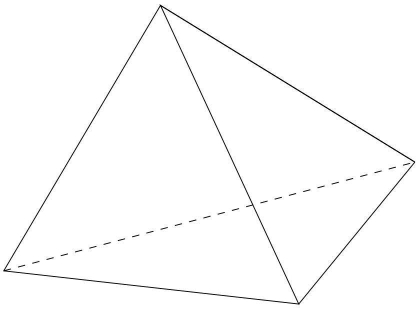

Figure 3 : Le tétraèdre

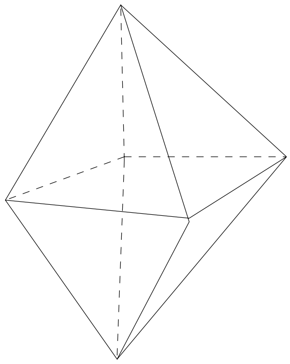

Figure 4 : L'octaèdre

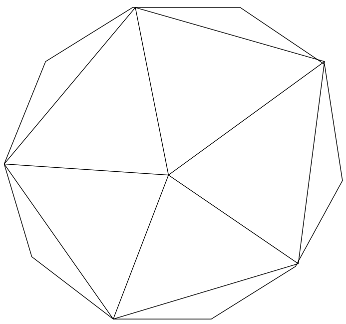

Figure 5 : L'icosaèdre

De plus, on a le théorème suivant :

THÉORÈME. *Il existe des surfaces triangulées homéomorphes à n'importe quelle surface fermée.*

Définissons maintenant une notion très utile pour la suite :

DÉFINITION. *Etant donné deux surfaces triangulées* Σ_1 *et* Σ_2*, on dit que* Σ_1 *est* plus fine *que* Σ_2 *(ou est une subdivision de* Σ_2*) s'il existe un homéomorphisme qui soit affine sur chaque triangle de* Σ_1*, et tel que tout triangle de* Σ_2 *soit réunion d'images de triangles de* Σ_1*.*

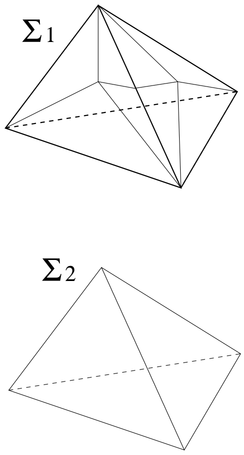

Figure 6 : Σ_1 est plus fine que Σ_2

On a le théorème suivant :

THÉORÈME 1. *Etant donné deux surfaces triangulées* Σ_1 *et* Σ_2 *homéomorphes, il existe une surface triangulée* Σ *plus fine que* Σ_1 *et que* Σ_2*.*

Toutes ces notions vont nous servir pour étudier la courbure des surfaces triangulées, notion plus simple que pour les surfaces riemanniennes.

2 Courbures d'une surface

Lorsqu'on se donne un cercle C de périmètre P et de rayon R dans un plan, P et R sont reliés par l'équation :

$$P = 2\pi R.$$

Lorsqu'on considère le même dessin sur une sphère de rayon 1 (munie de la distance sphérique), l'équation devient :

$$P = 2\pi \sin(R).$$

Le fait que le périmètre d'un cercle de rayon donné sur une sphère soit plus petit que dans un plan vient du fait que la sphère "se recourbe sur elle même", donc à un défaut de platitude de la sphère.

C'est cette remarque qui va nous permettre de définir la courbure d'une surface triangulée.

On se donne une surface triangulée Σ, et on se donne M un point de Σ. On se donne r, un réel strictement positif assez petit pour que le cercle tracé sur Σ, de centre M et de rayon r ne rencontre pas les triangles auxquels M n'appartient pas. notons P le périmètre de ce cercle et définissons la courbure en M par :

$$K(M) = 2\pi - \frac{P}{r}$$

On vérifie facilement que $K(M)$ ne dépend pas du r choisi (car deux cercles de rayons différents son homothétiques). On a la proposition fondamentale suivante :

Théorème. *Si M n'est pas un sommet de Σ, on a $K(M) = 0$.*

Si S est un sommet de Σ, la courbure en S vaut :

$$K(S) = 2\pi - \sum_{S \in T} \hat{S}_T$$

où $\hat{S}_T$ est l'angle du triangle T en S (la somme est prise sur les triangles de Σ ayant S pour sommet).

Démonstration. On étudie les trois cas :

- Si le point M est à l'intérieur d'un triangle, le cercle considéré est un cercle euclidien, donc la formule $P = 2\pi r$ s'applique, et $K(M) = 0$.

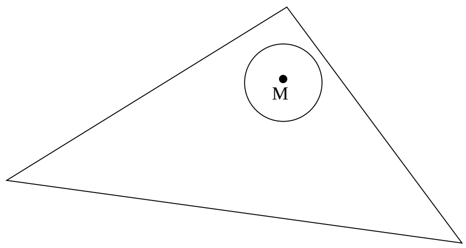

Figure 7

- Si le point M est sur l'arête d'un triangle, il appartient à deux triangles et à deux seulement. La trace du cercle de rayon r centré en ce point est, sur chacun des deux triangles, un demi-cercle euclidien de rayon r. Le périmètre total du cercle est donc égal à $2\pi r$ et la courbure en ce point est bien nulle.

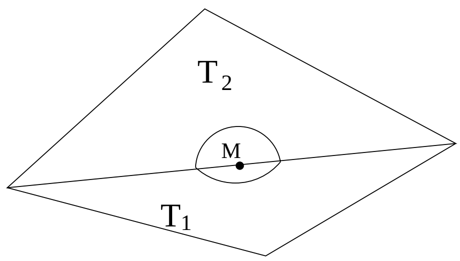

Figure 8

- Si, enfin, le point S considéré est un sommet, le périmètre du cercle est la somme des longueurs des traces de ce cercle sur les triangles de Σ. Or, la longueur de la trace d'un cercle centré au sommet S d'un triangle T et de rayon r inférieur à la distance de S au côté opposé vaut $r\hat{S}_T$, d'où la formule pour $K(S)$.

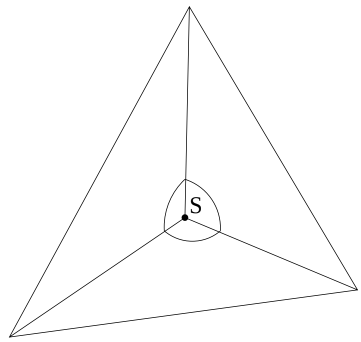

Figure 9

Ce théorème montre en particulier que la courbure d'une surface triangulée est concentrée aux sommets de la surface. ∎

On remarque que si Σ n'est formée que de triangles équilatéraux, la courbure en un sommet s'écrit :

$$K(S) = \frac{\pi}{3}(6 - N_S)$$

où N_S est le nombre de triangles de Σ ayant S pour sommet.

Regardons l'allure de la surface en un sommet en fonction de sa courbure :

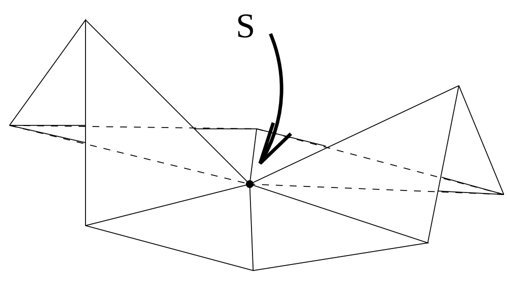

Figure 10 : Courbure négative

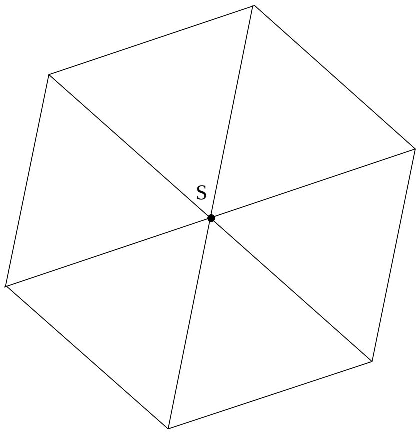

Figure 11 : Courbure nulle

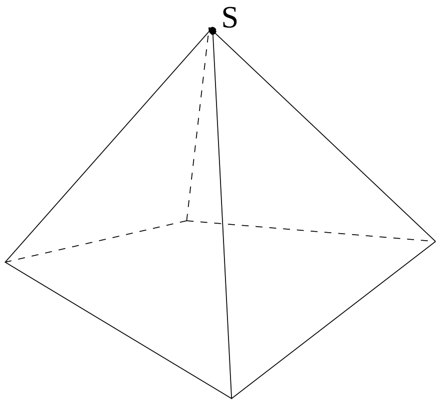

Figure 12 : Courbure positive

On peut aussi parler de la courbure globale d'une surface triangulée :

On appelle courbure globale de Σ :

$$K(\Sigma) = \sum_{S \in \text{Sommet}(\Sigma)} K(S)$$

On montre très simplement le résultat suivant :

PROPOSITION 1. *Soient n_S, n_A, n_T, les nombres respectifs de sommets, d'arêtes et de triangles de Σ. On a alors : $K = 2\pi(n_S - n_A + n_T)$.*

DÉMONSTRATION. Chaque triangle possédant trois arêtes et chaque arête étant commune à deux triangles, on a $n_A = 3n_T/2$. Or :

$$K = \sum_S (2\pi) - \sum_T \sum_{S \in T} \hat{S}_T.$$

La somme des angles de tout triangle valant π, on a donc : $K = 2\pi n_S - \pi n_T$. Et comme $n_T = 2(n_A - n_T)$, on obtient :

$$K = 2\pi(n_S - n_A + n_T).$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. ∎

L'importance de la courbure globale se retrouve dans le théorème suivant :

THÉORÈME. *Soit Σ une surface triangulée. L'entier $K/2\pi = n_S - n_A + n_T$ associé à cette surface triangulée ne dépend que de la topologie de la surface et s'appelle la caractéristique d'Euler-Poincaré de Σ, notée $\chi(\Sigma)$.*

DÉMONSTRATION. D'après le théorème 1, il suffit de vérifier que l'on ne change pas ce nombre en raffinant la surface triangulée. Or, raffiner une surface triangulée revient à lui rajouter des sommets. Regardons donc ce qui se passe lorsqu'on rajoute un sommet :

- Si le sommet S qu'on rajoute est à l'intérieur d'un triangle, cela donne la situation suivante :

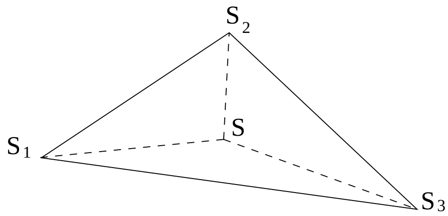

Figure 13

On voit que sont apparus trois nouveaux triangles, trois nouvelles arêtes, un nouveau sommet, mais qu'un triangle a disparu. Le nombre $n_S - n_A + n_T$ n'a donc pas changé.

- Si le sommet S qu'on rajoute se trouve sur une arête, cela donne ceci :

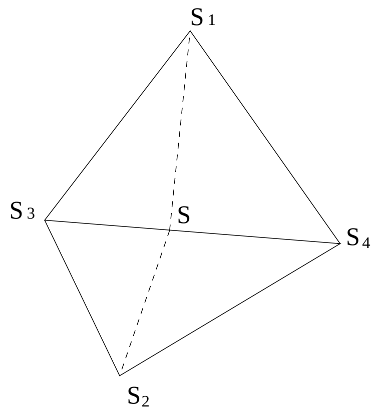

Figure 14

on voit que sont apparus quatre nouveaux triangles, quatre nouvelles arêtes, un nouveau sommet, mais que deux triangles et une arête ont disparu. Le nombre $n_S - n_A + n_T$ n'a pas changé non plus.

Donc la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une surface triangulée est la même que celle d'une surface triangulée plus fine. D'après la propriété 1, elle ne dépend que de la topologie de la surface. ∎

3 Calcul de caractéristiques d'Euler de surfaces

D'après le théorème précédent, pour calculer la caractéristique d'Euler d'une surface, il suffit de la calculer par rapport à une surface triangulée homéomorphe qu'on aura choisie.

- La sphère : comme surface triangulée,

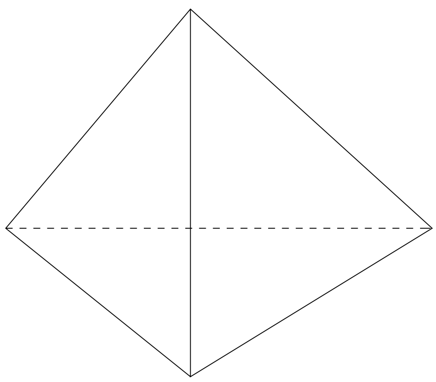

Figure 15 : on choisit le tétraèdre régulier

Le tétraèdre régulier possède quatre sommets. En chacun de ces sommets, la courbure est : $K(S) = (\pi/3)(6-3) = \pi$. la courbure totale de la sphère est donc de 4π . La caractéristique d'Euler de la sphère est donc égale à 2.

- Le tore : on peut obtenir un tore triangulé dans $\mathbf{R}^3$ en recollant un certain nombre (disons trois) de prismes à bases triangulaires suivant leurs bases.

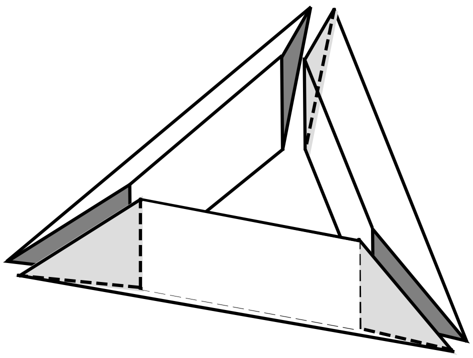

Figure 16 : recollement de trois prismes

De plus, il est facile de trianguler un prisme à base triangulaire de sorte qu'en chaque sommet arrivent trois triangles (+1 triangle de base).

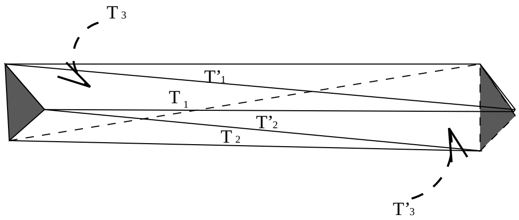

Figure 17 : trianguler un prisme

Ainsi, le nombre de triangles de cette surface triangulée est dix-huit, le nombre d'arêtes est de vingt-sept, et le nombre de sommets est de neuf. Donc, la courbure totale et la caractéristique d'Euler du tore sont nulles.

- Somme connexe de deux surfaces : étant donné deux surfaces Σ_1 et Σ_2, on construit une surface Σ qu'on appelle somme connexe de Σ_1 et Σ_2 de la facon suivante. On se donne un point x_1 sur Σ_1 et on retire à Σ_1 un petit disque D_1 autour de x_1. On retire, de même, un petit disque D_2 à Σ_2. Puis on recolle les deux surfaces ainsi obtenues suivant le bord des deux disques. On obtient ainsi la surface Σ, qui ne dépend ni de D_1, ni de D_2, ni de la facon dont on recolle les deux surfaces.

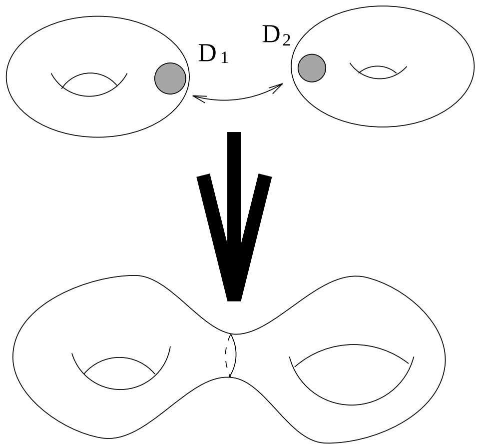

Figure 18 : la surface Σ

Pour faire la somme connexe de deux surfaces triangulées, on retire un triangle à chaque surface, puis on les recolle suivant le bord de ces deux triangles (on peut toujours supposer que les triangles retirés sont isométriques, quitte à changer la surface triangulée par un homéomorphisme).

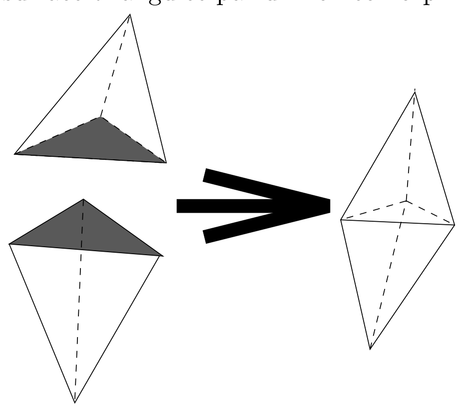

Figure 19

Calculons la caractéristique d'Euler de Σ, somme connexe de Σ_1 et de Σ_2

- Les sommets de Σ sont les sommets, soit de Σ_1, soit de Σ_2. On a néanmoins identifié trois sommets de Σ_1 avec trois sommets de Σ_2. On obtient ainsi : $n_S = n_{1S} + n_{2S} - 3$.
- Les arêtes de Σ sont les arêtes, soit de Σ_1, soit de Σ_2. On a néanmoins identifié trois arêtes de Σ_1 avec trois arêtes de Σ_2. On obtient ainsi : $n_A = n_{1A} + n_{2A} - 3$.
- Les faces de Σ sont les faces, soit de Σ_1, soit de Σ_2, exceptées les deux faces qu'on a retirées. On obtient ainsi : $n_T = n_{1T} + n_{2T} - 2$.

La caractéristique d'Euler de Σ est donc :

$$\begin{aligned}\chi(\Sigma) &= n_S - n_A + n_T\\ &= n_{1S} + n_{2S} - 3 - n_{1A} - n_{2A} +\\ &\quad 3 + n_{1T} + n_{2T} - 2\\ &= \chi(\Sigma_1) + \chi(\Sigma_2) - 2\end{aligned}$$

En particulier, la caractéristique d'Euler d'un "tore à g trous", qui est en fait la somme connexe de g tores vaut : $\chi = 2 - 2g$.

4 Conclusion

On a donc introduit, dans le cas particlier des surfaces triangulées, deux importantes notions qui sont la courbure et la caractéristique d'Euler-Poincaré. Ces deux notions admettent des généralisations pour des variétés plus complexes.

La courbure est une notion métrique qui décrit l'allure d'une variété au voisinage de chaque point.

La caractéristique d'Euler-Poincaré est un invariant topologique, donc rend compte de l'allure globale d'une variété (elle est même définie pour des espaces qui ne sont pas des variétés, même si sa définition générale est assez compliquée). Elle est particulièrement importante dans le cas des surfaces fermées car elle permet presque à elle toute seule de les classifier (il suffit de lui ajouter l'orientabilité). Son origine combinatoire illustre bien l'intérêt de la topologie algébrique, qui consiste à étudier les espaces topologiques à travers leurs invariants d'origine algébrique.

◇ Frédéric Bosio
ENS–Lyon
46, allée d'Italie
69364 Lyon cedex 7
`fbosio@umpa.ens-lyon.fr`