

# Autour des triangles inscrits sur une hyperbole équilatère

M.GOUY

G.HUVENT

A.LADUREAU

10 février 2003

Dans tout le texte qui suit,  $ABC$  désignant un triangle,  $\Omega$  désignera le centre du cercle  $\mathcal{C}_1$  circonscrit au triangle et  $H$  son orthocentre.

## 1 Triangles inscrits dans une hyperbole équilatère

1. Construire l'hyperbole  $\mathcal{H}_1$  d'équation  $y = \frac{1}{x}$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (l'unité sera de 2 cm)
2. Placer les points  $A(2, \frac{1}{2})$ ,  $B(-\frac{1}{2}, -2)$  et  $C(4, \frac{1}{4})$ . Construire l'orthocentre du triangle  $ABC$ .  
Que constatez-vous ?
3. Déterminer par un calcul à la main une équation de la hauteur  $\Delta A$  du triangle  $ABC$  passant par  $A$ .
4. Faire de même avec la hauteur  $\Delta B$  du triangle  $ABC$  passant par  $B$ .  
En déduire les coordonnées de  $H$  puis vérifier ou infirmer la conjecture émise à la question 2
5. Déterminer par un calcul à la main les coordonnées du centre  $\Omega$  du cercle circonscrit  $\mathcal{C}_1$  au triangle  $ABC$ .
6. Tracer  $\mathcal{C}_1$  puis le symétrique de  $H$  par rapport à  $O$ . Que constatez-vous ? Prouvez-le.
7. Reprendre les questions 4, 5 et 6 en faisant les calculs à l'aide d'un logiciel de calcul formel.
8. A l'aide d'un logiciel de géométrie, refaire la figure en prenant cette fois trois points quelconques sur  $\mathcal{H}_1$ .  
Le résultat reste-t-il valable si l'on déplace les points  $A, B$  et  $C$  ?
9. On désigne par  $A(x_1, \frac{1}{x_1})$ ,  $B(x_2, \frac{1}{x_2})$  et  $C(x_3, \frac{1}{x_3})$  trois points quelconques distincts de  $\mathcal{H}_1$ .
  - (a) Déterminer à l'aide d'un logiciel de calcul formel, une équation de la hauteur  $\Delta A$  du triangle  $ABC$  passant par  $A$  puis une équation de la hauteur  $\Delta B$  issue de  $B$ . Conclure.
  - (b) Déterminer l'intersection de  $\Delta A$  et  $\mathcal{H}_1$ . Comment sans calculs supplémentaires peut-on retrouver le résultat précédent ?
  - (c) Démontrer que le symétrique de  $H$  par rapport au point  $O$  appartient au cercle circonscrit du triangle  $ABC$ .

## 2 Intersection d'un cercle et de l'hyperbole $\mathcal{H}$

1. Construire l'hyperbole  $\mathcal{H}_1$  d'équation  $y = \frac{1}{x}$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 2 cm)
2. Construire le cercle  $\mathcal{C}_1$  d'équation  $x^2 + y^2 + \frac{7}{2}x + \frac{7}{2}y + \frac{9}{2} = 0$ .  
Déterminer graphiquement puis algébriquement les points communs à  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{C}_1$ .
3. Refaire le même travail avec  $\mathcal{C}_2$  cercle de diamètre  $[A, B]$  où  $A$  et  $B$  sont les points de coordonnées respectives  $A(-1, -1)$  et  $B(\frac{1}{2}, 2)$
4. Dans le cas d'un cercle quelconque, montrer à l'aide d'un logiciel de calcul formel que l'équation aux abscisses des points communs aux deux courbes se ramène à une équation polynomiale de degré 4.

**Remarque 1** *Pour la suite, on admettra les résultats suivants :*

*Une telle équation :*

*Ne peut avoir qu'au plus quatre solutions dans  $\mathbb{R}$ .*

*A exactement quatre solutions si elle en possède au moins trois (Attention, une même solution peut être comptée deux fois ou plus).*

*Dans le cas où un polynôme  $P$  de degré 4 a quatre solutions dans  $\mathbb{R}$  alors, on peut écrire :*

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c = a(x - \alpha) \times (x - \beta) \times (x - \gamma) \times (x - \delta)$$

*où  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  sont les quatre racines de  $P$*

5. A l'aide d'un logiciel de calcul formel, développer la seconde expression de  $P$  et en déduire la valeur en fonction des coefficients de  $P$  des expressions suivantes :

$$\begin{aligned} S_1 &= \alpha + \beta + \gamma + \delta \\ S_2 &= \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta \\ S_3 &= \alpha\beta\gamma + \beta\gamma\delta + \gamma\delta\alpha + \delta\alpha\beta \\ S_4 &= \alpha\beta\gamma\delta \end{aligned}$$

6. On désigne par  $A(x_1, \frac{1}{x_1})$ ,  $B(x_2, \frac{1}{x_2})$  et  $C(x_3, \frac{1}{x_3})$  trois points quelconques distincts de  $\mathcal{H}_1$  et par  $\mathcal{C}_1$  le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .
- (a) Montrer que  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{C}_1$  ont quatre points en commun dont trois au moins sont distincts deux à deux (On notera  $D$  le dernier point et  $x_D$  son abscisse).
- (b) En s'aidant de la question 5, montrer que l'isobarycentre  $G$  des points  $A, B, C$  et  $D$  est le milieu de  $[\Omega, O]$ .
- (c) Montrer que  $D$  est le symétrique de l'orthocentre  $H$  du triangle  $ABC$  par rapport à  $O$ .

### 3 Triangles équilatéraux inscrits dans une hyperbole équilatère

1. Soit  $\Omega$  un point de  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{C}_1$  un cercle de centre  $\Omega$  vérifiant :
- $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{C}_1$  ont au moins trois points distincts deux à deux en commun.
  - Le symétrique  $\Omega'$  de  $\Omega$  par rapport au centre  $S$  de l'hyperbole appartient à  $\mathcal{C}_1$
- D'après la partie 3, on a vu qu'il y a quatre points communs entre ces deux courbes, notons  $A, B$  et  $C$  les trois points s'ajoutant à  $\Omega'$ . On remarquera alors que  $\mathcal{C}_1$  est le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .
- (a) Faire un dessin correspondant aux hypothèses. Tracer le triangle  $ABC$ , que peut-on constater?
- (b) On se propose de démontrer ce résultat.
- i. Notons  $x_0$ , l'abscisse de  $\Omega$ . Déterminer alors les coordonnées de  $\Omega$  et  $\Omega'$ .
  - ii. En remarquant que  $[\Omega, \Omega']$  est un rayon de  $\mathcal{C}_1$ , déterminer une équation de  $\mathcal{C}_1$ .
  - iii. En déduire l'équation aux abscisses des points communs aux deux courbes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{H}_1$ .
  - iv. Vérifier que  $-x_0$  est bien solution de cette équation. On note  $x_1, x_2$  et  $x_3$  les trois autres solutions ou encore les abscisses des points  $A, B$  et  $C$ .
  - v. A l'aide de la question 6 b) déterminer en fonction de  $x_0$ , les coordonnées de  $G$  centre de gravité du triangle  $ABC$ . Conclure.
- (c) Montrer que le cercle et l'hyperbole n'ont que trois points distincts en commun si, et seulement si,  $\Omega$  a pour abscisse 1 ou  $-1$ .
2. Soit trois points  $A, B$  et  $C$  appartenant à  $\mathcal{H}_1$  tel que le triangle  $ABC$  soit équilatéral. Démontrer que le centre  $\Omega$  du cercle circonscrit au triangle  $ABC$  appartient à  $\mathcal{H}_1$  et qu'il passe par le symétrique du point  $\Omega$  par rapport à  $O$ .
3. Déduire des questions précédentes les triangles équilatéraux  $ABC$  inscrits dans  $\mathcal{H}_1$  dont le sommet  $A$  a pour abscisse 2.

## 4 Triangles rectangles inscrits dans une hyperbole équilatère

On désigne par  $A(x_1, \frac{1}{x_1})$ ,  $B(x_2, \frac{1}{x_2})$  et  $C(x_3, \frac{1}{x_3})$  trois points quelconques distincts de  $\mathcal{H}_1$  et par  $\mathcal{C}_1$  le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .

1. En utilisant la question 2 6.c), montrer que si  $ABC$  est rectangle (en  $A$  par exemple), le cercle  $\mathcal{C}_1$  passe par deux points symétriques par rapport au centre de l'hyperbole
2. Donner une CNS sur  $x_1, x_2$  et  $x_3$  pour que  $ABC$  soit rectangle en  $A$
3. On se propose d'examiner la réciproque du résultat obtenu à la question 1. Soient  $A, B$  et  $C$  trois points quelconques deux à deux distincts de  $\mathcal{H}_1$ . On suppose que  $\mathcal{C}_1$  passe par le symétrique de  $A$  par rapport au centre de l'hyperbole et que ce symétrique est distinct des points  $B$  et  $C$ . L'équation de  $\mathcal{C}_1$  est de la forme  $x^2 + y^2 - 2ux - 2vy + w$ 
  - (a) Par des considérations géométriques simples, exprimer  $w$  en fonction de  $x_1$ .
  - (b) En écrivant à l'aide d'un logiciel de calcul formel, que  $\mathcal{C}_1$  passe par  $A$ , exprimer  $v$  en fonction de  $u$ . Puis en exprimant que  $\mathcal{C}_1$  passe par  $B$ , déterminer  $u$  et  $v$ .
  - (c) En exprimant que  $\mathcal{C}_1$  passe par  $C$ , en déduire que le triangle est rectangle en  $A$ .
4. Montrer que le triangle est rectangle en  $A$  si et seulement si la tangente en  $A$  à l'hyperbole  $\mathcal{H}_1$  est perpendiculaire au côté  $BC$ .

## 5 Triangles inscrits dans une parabole

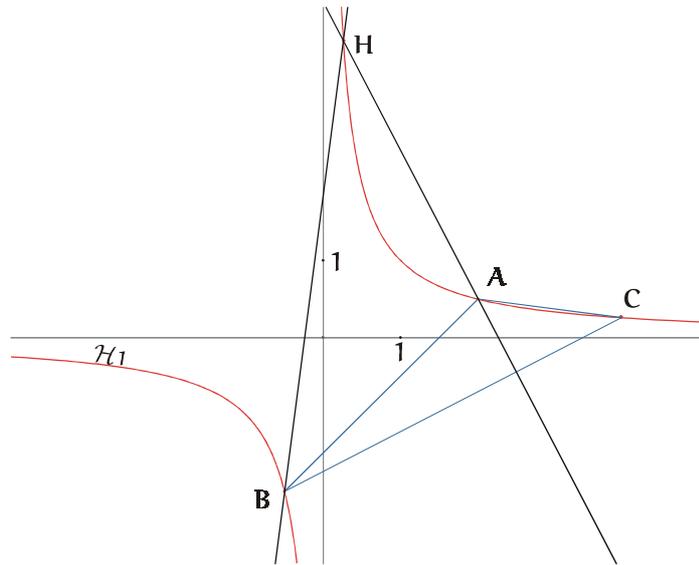
On se propose de reprendre la première partie en remplaçant l'hyperbole  $\mathcal{H}_1$  par la parabole  $\mathcal{P}$  d'équation  $y = x^2$ . L'objectif est donc d'étudier l'orthocentre d'un triangle  $ABC$  inscrit dans  $\mathcal{P}$ .

1. Placer les points  $A(2, 4)$ ,  $B(0, 0)$  et  $C(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ , puis construire l'orthocentre du triangle  $ABC$ . Que constatez-vous ?  
Faire la même chose lorsque  $C(-\frac{5}{2}, \frac{25}{4})$ .
2. Calculer les coordonnées de l'orthocentre pour les deux cas précédents.
3.  $A$  et  $B$  étant donnés comme dans la question 1., pour quels points  $C(x_1, x_1^2)$  de  $\mathcal{P}$  l'orthocentre  $H$  est-il aussi sur  $\mathcal{P}$  ?  
(Ce calcul sera fait à l'aide d'un logiciel de calcul formel).
4. A l'aide d'un logiciel de géométrie, constater le phénomène suivant : soient  $A, B$  et  $C$  trois points distincts deux à deux de la parabole  $\mathcal{P}$ , l'orthocentre du triangle  $ABC$  est sur  $\mathcal{P}$  si et seulement si  $ABC$  est rectangle.
5. On se propose d'en faire une démonstration à l'aide d'un logiciel de calcul formel, pour cela :
  - (a) Définir trois points quelconques  $A, B$  et  $C$  de la parabole d'abscisses respectives  $x_1, x_2$  et  $x_3$ .
  - (b) Calculer les coordonnées de  $H$  en fonction de ces trois réels.
  - (c) Déterminer la condition sur ces trois réels pour que le point  $H$  appartienne à  $\mathcal{P}$ .
  - (d)  $A, B$  et  $C$  étant distincts deux à deux, écrire la condition traduisant que le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$ . Faire de même pour les points  $B$  et  $C$ .
  - (e) En se rappelant qu'un produit de facteurs est nul, si et seulement si, un au moins des facteurs est nul, démontrer la propriété énoncée à la question 5.

# Solution

## 1 Triangles inscrits dans une hyperbole équilatère

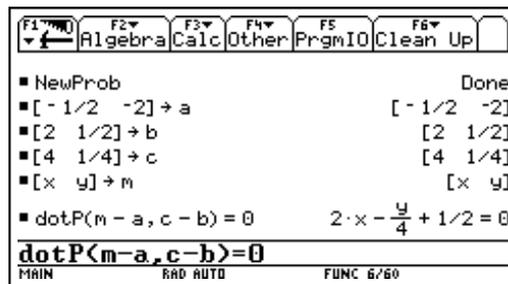
1. et 2.



3. et 4. Recherche des coordonnées de H. Soit  $M(x, y)$  un point quelconque du plan

$$\begin{aligned}
 M \in \Delta A &\iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\
 &\iff \left(x + \frac{1}{2}\right) \times 2 + (y + 2) \times \left(-\frac{1}{4}\right) = 0 \\
 &\iff 2x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{2} = 0
 \end{aligned}$$

Equation qu'on peut retrouver sur une TI-92, par exemple, comme suit :



On peut alors chercher de même une équation de la hauteur issue de B puis les coordonnées de H

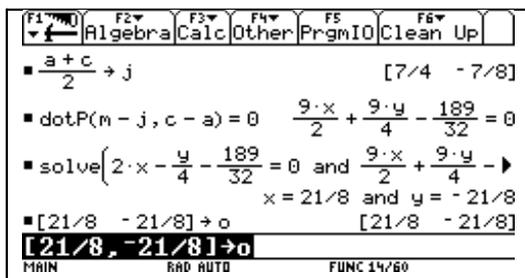
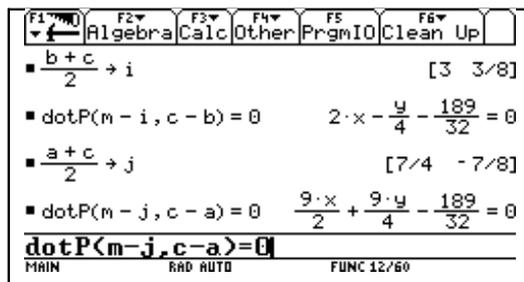
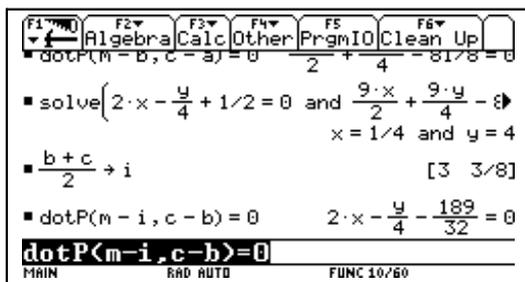
Equations des hauteurs (dotP calcule le produit scalaire)	Coordonnées de H

On en conclut sans difficulté que le point H est sur l'hyperbole ( $\mathcal{H}_1$ )

5. Soit  $M(x, y)$  un point quelconque du plan

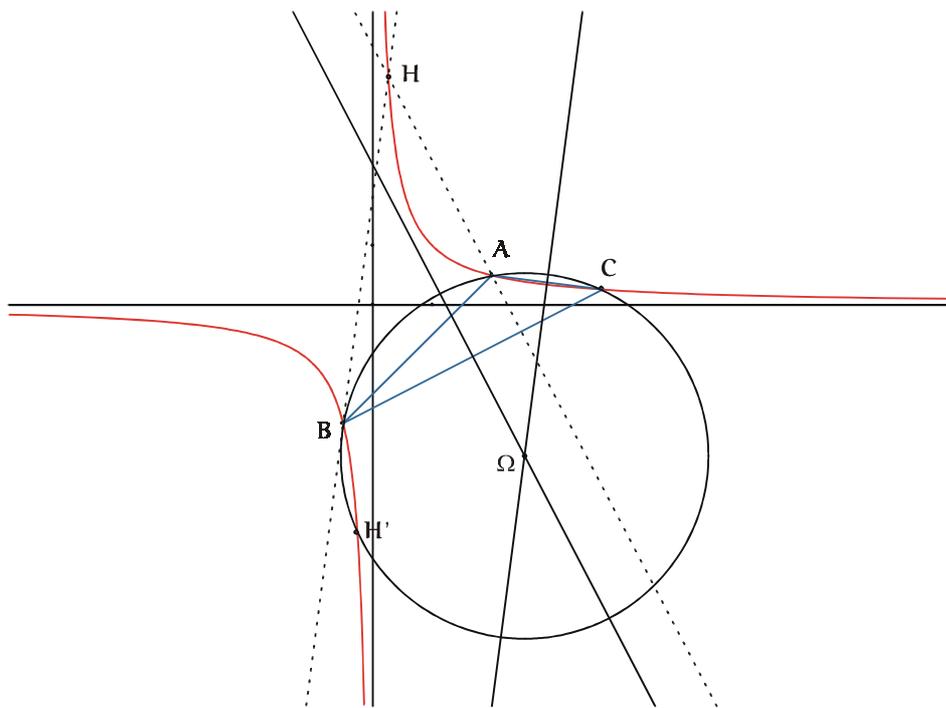
$$\begin{aligned}
 M \in \text{Med}[BC] &\iff \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \text{ où } I \text{ est le milieu de } [B, C] \\
 &\iff (x - 3) \times (2) + \left(y - \frac{3}{8}\right) \times \left(-\frac{1}{4}\right) = 0 \\
 &\iff 2x - \frac{1}{4}y - \frac{189}{32} = 0
 \end{aligned}$$

Ce que l'on peut retrouver facilement sur la TI-92 comme suit :



La détermination d'une seconde médiatrice et des coordonnées du centre  $\Omega$  du cercle circonscrit<sup>1</sup> étant alors évidente.

6.



<sup>1</sup>Les coordonnées du point  $\Omega$  sont stockés dans la variable  $o$  (pour *oméga*) de la calculatrice.

Il semble que  $H'$  soit un point du cercle circonscrit au triangle  $ABC$ , calculons  $\Omega A$  et  $\Omega H'$  pour le démontrer :

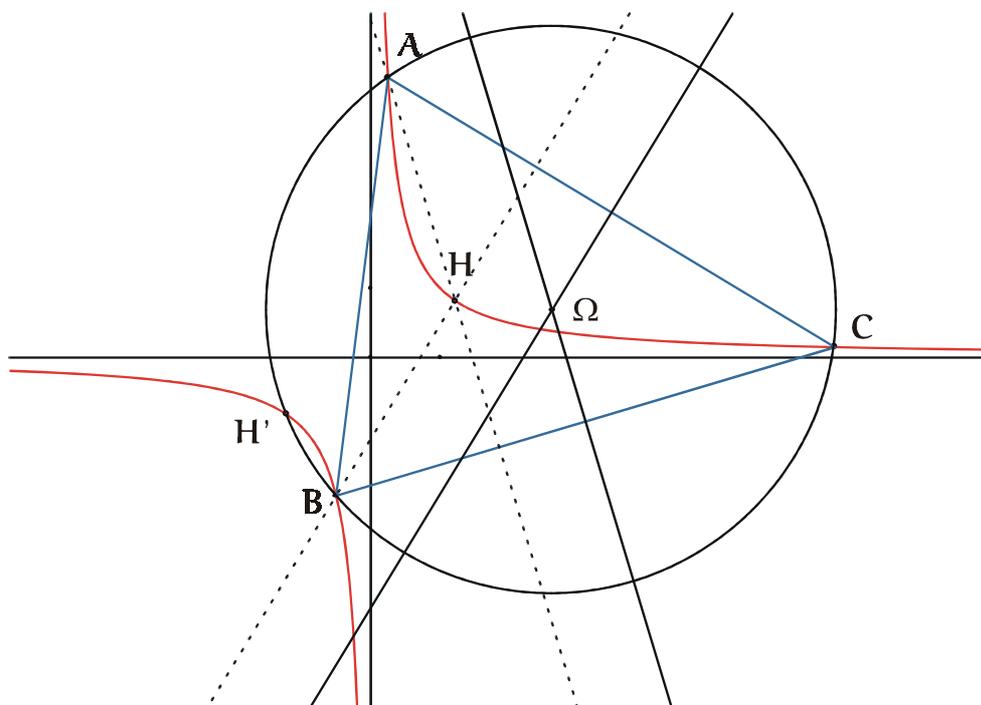
```

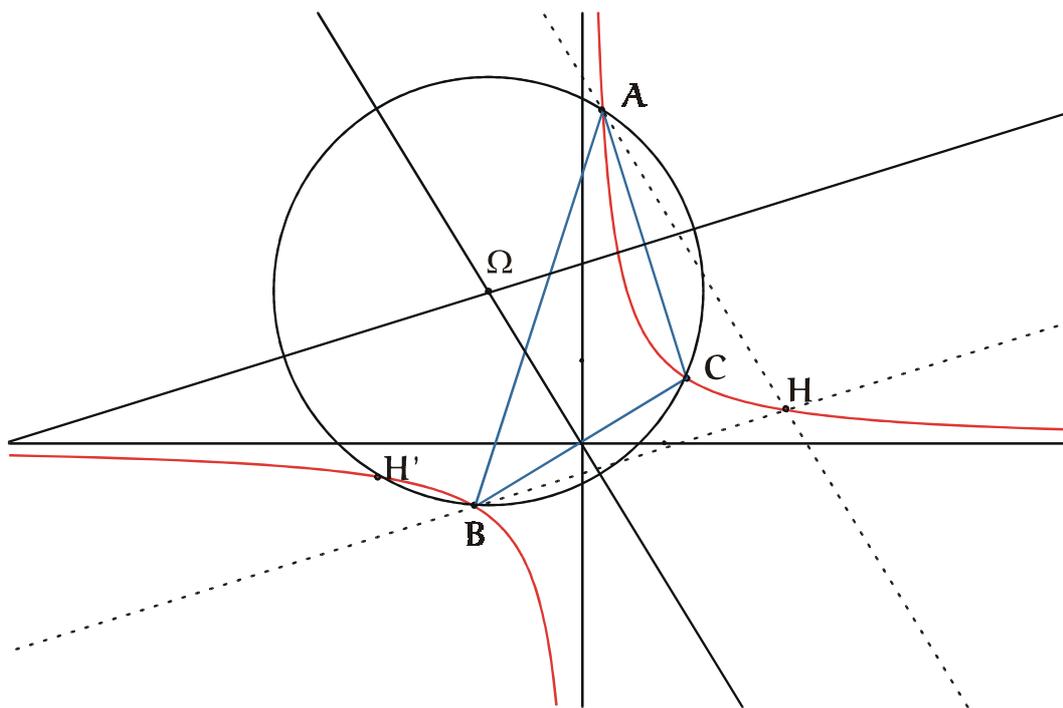
┌──────────┬──────────┬──────────┬──────────┬──────────┬──────────┐
│ F1  F2  F3  F4  F5  F6  │
│ ← Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up │
├──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──────────┤
│                               x = 21/8 and y = - 21/8
│ ■ [21/8 - 21/8] → o           [21/8 - 21/8]
│ ■ [1/4 4] → h                 [1/4 4]
│                               5·√26
│ ■ norm(a - o)                 ───
│                               8
│                               5·√26
│ ■ norm(o + h)                 ───
│                               8
│ norm(o+h)
├──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──────────┤
│ MAIN          RAD AUTO          FUNC 17/60

```

La question 7. ayant été traitée , passons à la question 8.

8. on obtient par exemple les deux configurations suivantes :





Il semble donc que :

**Théorème 2** Si on choisit trois points quelconques  $A, B$  et  $C$  sur  $(\mathcal{H}_1)$  alors l'orthocentre  $H$  du triangle  $ABC$  est situé sur  $(\mathcal{H}_1)$ . D'autre part la symétrique de  $H$  par rapport au centre de l'hyperbole  $(\mathcal{H}_1)$  est un point du cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .

9. Reprenons les calculs précédents en prenant  $A(x_1, \frac{1}{x_1}), B(x_2, \frac{1}{x_2})$  et  $C(x_3, \frac{1}{x_3})$  trois points quelconques distincts de  $(\mathcal{H}_1)$

Les calculs précédents s'écrivent alors

Stockage des points

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean	Up

$\blacksquare$  norm(o + h)  $\frac{5 \cdot \sqrt{26}}{8}$   
 $\blacksquare$   $\left[ x_1 \quad \frac{1}{x_1} \right] \rightarrow a$   $\left[ x_1 \quad \frac{1}{x_1} \right]$   
 $\blacksquare$   $\left[ x_2 \quad \frac{1}{x_2} \right] \rightarrow b$   $\left[ x_2 \quad \frac{1}{x_2} \right]$   
 $\blacksquare$   $\left[ x_3 \quad \frac{1}{x_3} \right] \rightarrow c$   $\left[ x_3 \quad \frac{1}{x_3} \right]$

**$\left[ x_3, 1/x_3 \right] \rightarrow c$**

MAIN RAD AUTO FUNC 20/60

Equation de la hauteur issue de A

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean	Up

$\blacksquare$  dotP(m - a, c - b) = 0  $\rightarrow$  eq1  
 $\frac{-(x_2 - x_3) \cdot (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x - x_1 \cdot y - x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3)}{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}$   
 $\blacksquare$   $\frac{eq1}{x_2 - x_3} \rightarrow eq1$   
 $\frac{-(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x - x_1 \cdot y - x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3 + 1)}{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} = 0$

**$eq1 / (x_2 - x_3) \rightarrow eq1$**

MAIN RAD AUTO FUNC 23/60

La division par  $x_2 - x_3$  vient du fait que le produit scalaire est nul si  $b = c$ .

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean	Up

$\blacksquare$  dotP(m - b, c - a) = 0  $\rightarrow$  eq2  
 $\frac{-(x_1 - x_3) \cdot (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x - x_2 \cdot y - x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3)}{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}$   
 $\blacksquare$   $\frac{eq2}{x_1 - x_3} \rightarrow eq2$   
 $\frac{-(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x - x_2 \cdot y - x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3 + 1)}{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} = 0$

**$eq2 / (x_1 - x_3) \rightarrow eq2$**

MAIN RAD AUTO FUNC 25/60

Coordonnées de l'orthocentre  $H$ .  
L'appartenance de ce point à l'hyperbole est évidente.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean	Up

$\blacksquare$   $\frac{eq2}{x_1 - x_3} \rightarrow eq2$   
 $\frac{-(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x - x_2 \cdot y - x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3 + 1)}{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} = 0$   
 $\blacksquare$  solve(eq1 and eq2, {x y})  
 $x = \frac{-1}{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}$  and  $y = -x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$

**$solve(eq1 \text{ and } eq2, \{x, y\})$**

MAIN RAD AUTO FUNC 26/60

Equations des médiatrices

$\frac{b+c}{2} + i$   
 $\frac{x2+x3}{2} \cdot \frac{x2+x3}{2 \cdot x2 \cdot x3}$   
 $\text{dotP}(m-i, c-b) = 0 \rightarrow \text{eq11}$   
 $-(x2-x3) \cdot (2 \cdot x2^2 \cdot x3^2 \cdot x - 2 \cdot x2 \cdot x3 \cdot y - (x2^2 + x3^2))$   
 $\frac{\text{eq11}}{x2-x3} \rightarrow \text{eq11}$   
**eq11/(x2-x3)→eq11**

$\frac{a+c}{2} + j$   
 $\frac{x1+x3}{2} \cdot \frac{x1+x3}{2 \cdot x1 \cdot x3}$   
 $\text{dotP}(m-j, c-a) = 0 \rightarrow \text{eq12}$   
 $-(x1-x3) \cdot (2 \cdot x1^2 \cdot x3^2 \cdot x - 2 \cdot x1 \cdot x3 \cdot y - (x1^2 + x3^2))$   
 $\frac{\text{eq12}}{x1-x3} \rightarrow \text{eq12}$   
**eq12/(x1-x3)→eq12**

$\frac{a+c}{2} + j$   
 $\frac{x1+x3}{2} \cdot \frac{x1+x3}{2 \cdot x1 \cdot x3}$   
 $\text{dotP}(m-j, c-a) = 0 \rightarrow \text{eq12}$   
 $-(x1-x3) \cdot (2 \cdot x1^2 \cdot x3^2 \cdot x - 2 \cdot x1 \cdot x3 \cdot y - (x1^2 + x3^2))$   
**eq12/(x1-x3)→eq12**

Recherche des coordonnées de  $\Omega$  centre du cercle circonscrit

$\frac{\text{eq12}}{x1-x3} \rightarrow \text{eq12}$   
 $-(2 \cdot x1^2 \cdot x3^2 \cdot x - 2 \cdot x1 \cdot x3 \cdot y - (x1^2 + x3^2)) \cdot (x1 - x3)$   
 $\text{solve}(\text{eq11 and eq12}, \{x, y\})$   
 $x = \frac{x1^2 \cdot x2 \cdot x3 + x1 \cdot x2 \cdot (x2 + x3) \cdot x3 + 1}{2 \cdot x1 \cdot x2 \cdot x3}$   
**solve(eq11 and eq12, {x, y})**

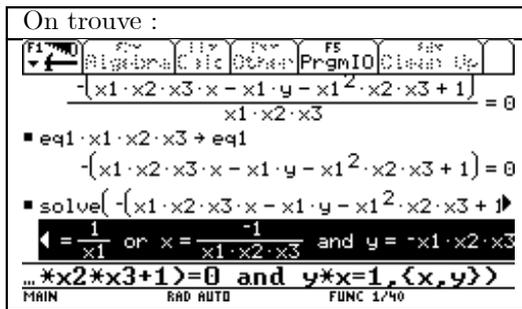
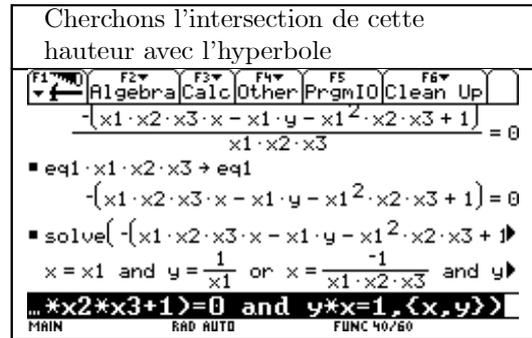
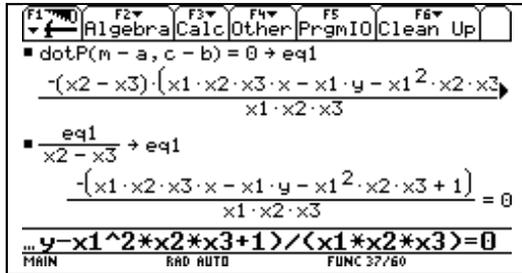
On désigne par  $hh$  le symétrique de  $H$  par rapport à  $S$

$\frac{1}{x1 \cdot x2 \cdot x3} \cdot x1 \cdot x2 \cdot x3 \rightarrow h1$   
 Error: Variable is locked, protected, ▶  
 $\frac{1}{x1 \cdot x2 \cdot x3} \cdot x1 \cdot x2 \cdot x3 \rightarrow hh$   
**[1/(x1\*x2\*x3), x1\*x2\*x3]→hh**

$AO^2 = Ohh^2$  donc  $hh$  appartient au cercle

$\frac{1}{x1 \cdot x2 \cdot x3} \cdot x1 \cdot x2 \cdot x3 \rightarrow h1$   
 Error: Variable is locked, protected, ▶  
 $\frac{1}{x1 \cdot x2 \cdot x3} \cdot x1 \cdot x2 \cdot x3 \rightarrow hh$   
 $(\text{norm}(o-a))^2 = (\text{norm}(o-hh))^2$  true  
**norm(o-a)^2=norm(o-hh)^2**

En fait, on peut conclure un peu plus rapidement pour l'appartenance de  $H$ . En Effet, reprenons le calcul au moment où nous avons trouvé la hauteur issue de  $A$ . Nous obtenons



Vu la symétrie des coordonnées du second point d'intersection, on a vite fait de conclure que ce point se trouve sur les trois hauteurs du triangle  $ABC$ . On en conclut donc que c'est l'orthocentre du triangle  $ABC$ .

## 2 Intersection d'un cercle et de l'hyperbole $\mathcal{H}$

1. et 2. Pour déterminer l'intersection de  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{C}_1$  il faut résoudre le système :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ x^2 + y^2 + \frac{7}{2}x + \frac{7}{2}y + \frac{9}{2} = 0 \end{cases}$$

qui se ramène à

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ x^4 + \frac{7}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{7}{2}x + 1 = 0 \end{cases}$$

Cette dernière équation admet  $-2$  et  $-\frac{1}{2}$  comme racines évidentes, on peut donc factoriser le polynôme par le produit  $(x + 2) \times (x + \frac{1}{2})$ , on obtient alors

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ (x + \frac{1}{2})(x + 2)(x^2 + x + 1) = 0 \end{cases}$$

On trouve donc deux points communs :  $A_1 \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$  et  $B_1 \left(-\frac{1}{2}, -2\right)$ , ce que confirme le dessin obtenu.

3. Résolvons celle-ci avec notre TI-92

Equation du cercle

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	

- NewProb Done
- [-2 -1] → a [-2 -1]
- [1/2 2] → b [1/2 2]
- [x y] → m [x y]
- dotP(m - a, m - b) = 0 → eqc

$$x^2 + \frac{3 \cdot x}{2} + y^2 - y - 3 = 0$$

**dotP(m-a, m-b)=0→eqc**

MAIN RAD AUTO FUNC 5/60

On remplace y par  $\frac{1}{x}$

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	

- eqc | y =  $\frac{1}{x}$  → eqc

$$x^2 + \frac{3 \cdot x}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 3 = 0$$

- eqc · x<sup>2</sup> → eqc

$$\frac{2 \cdot x^4 + 3 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 2}{2} = 0$$

**eqc\*x^2→eqc**

MAIN RAD AUTO FUNC 7/60

On résout

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	

$$x^2 + \frac{3 \cdot x}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 3 = 0$$

- eqc · x<sup>2</sup> → eqc

$$\frac{2 \cdot x^4 + 3 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 2}{2} = 0$$

- solve(eqc, x)

x = 1.17008648663 or x = 1/2 or x = -.688

**solve(eqc, x)**

MAIN RAD AUTO FUNC 8/60

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	

$$x^2 + \frac{3 \cdot x}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 3 = 0$$

- eqc · x<sup>2</sup> → eqc

$$\frac{2 \cdot x^4 + 3 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 2}{2} = 0$$

- solve(eqc, x)

x = -.688892182534 or x = -2.48119430409

**solve(eqc, x)**

MAIN RAD AUTO FUNC 1/8

Remarque : La calculatrice echoue si on lui pose le problème directement

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	

- solve(eqc, x)

x = -.688892182534 or x = -2.48119430409
- $x^2 + \frac{3 \cdot x}{2} + y^2 - y - 3 = 0$  → eqc
$$x^2 + \frac{3 \cdot x}{2} + y^2 - y - 3 = 0$$

- solve(eqc and y =  $\frac{1}{x}$ , {x y}) false

**solve(eqc and y=1/x, {x, y})**

MAIN RAD AUTO FUNC 10/60

4.

Equation d'un cercle  
(on suppose donné un diamètre)

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
■ solve(eqc and y = 1/x, (x y)) false
■ DelVar x1, x2, o1, o2 Done
■ [x1 o1] → a [x1 o1]
■ [x2 o2] → b [x2 o2]
■ dotP(m - a, m - b) = 0 → eqc
x^2 + (-x1 - x2) · x + y^2 + (-o1 - o2) · y + o1 · o2
dotP(m - a, m - b) = 0 → eqc
MAIN RAD AUTO FUNC 14/60
    
```

On remplace  $y$  par  $\frac{1}{x}$

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
x^2 + (-x1 - x2) · x + y^2 + (-o1 - o2) · y + o1 · o2
■ eqc | y = 1/x → eqc
x^2 + (-x1 - x2) · x + (-o1 - o2) / x + 1/x^2 + o1 · o2
■ eqc · x^2 → eqc
x^4 - (x1 + x2) · x^3 + (o1 · o2 + x1 · x2) · x^2 - (o1)
eqc · x^2 → eqc
MAIN RAD AUTO FUNC 16/60
    
```

On réduit au même dénominateur

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
x^2 + (-x1 - x2) · x + y^2 + (-o1 - o2) · y + o1 · o2
■ eqc | y = 1/x → eqc
x^2 + (-x1 - x2) · x + (-o1 - o2) / x + 1/x^2 + o1 · o2
■ eqc · x^2 → eqc
x^3 + (o1 · o2 + x1 · x2) · x^2 - (o1 + o2) · x + 1 = 0
eqc · x^2 → eqc
MAIN RAD AUTO FUNC 1/16
    
```

On a bien obtenu une expression polynomiale du quatrième degré.

5.

On développe le polynôme  $P$

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
■ NewProb Done
■ expand(a · (x - α) · (x - β) · (x - γ) · (x - δ), x) → Done
■ p(x)
a · x^4 + a · (-α - β - γ - δ) · x^3 + a · (α · β + γ + δ)
p(x)
MAIN RAD AUTO FUNC 3/60
    
```

On fait défiler les coefficients

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
■ NewProb Done
■ expand(a · (x - α) · (x - β) · (x - γ) · (x - δ), x) → Done
■ p(x)
a · x^4 + a · (α · (β + γ + δ) + β · γ + γ · δ) · x^3 + a
p(x)
MAIN RAD AUTO FUNC 1/3
    
```

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
■ NewProb Done
■ expand(a · (x - α) · (x - β) · (x - γ) · (x - δ), x) → Done
■ p(x)
a · x^4 + a · (-α · (β · (γ + δ) + γ · δ) - β · γ · δ) · x^3 + a · α
p(x)
MAIN RAD AUTO FUNC 1/3
    
```

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
■ NewProb Done
■ expand(a · (x - α) · (x - β) · (x - γ) · (x - δ), x) → Done
■ p(x)
a · x^4 + a · (-α · (β · (γ + δ) + γ · δ) - β · γ · δ) · x^3 + a · α · β · γ · δ
p(x)
MAIN RAD AUTO FUNC 1/3
    
```

On en conclut sans peine que :

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{-b}{a} \\
 S_2 &= \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = \frac{c}{a} \\
 S_3 &= \alpha\beta\gamma + \beta\gamma\delta + \gamma\delta\alpha + \delta\alpha\beta = \frac{-d}{a} \\
 S_4 &= \alpha\beta\gamma\delta = \frac{e}{a}
 \end{aligned}$$

6. On désigne par  $A\left(x_1, \frac{1}{x_1}\right), B\left(x_2, \frac{1}{x_2}\right)$  et  $C\left(x_3, \frac{1}{x_3}\right)$  trois points quelconques distincts de  $\mathcal{H}_1$  et par  $\mathcal{C}_1$  le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .

(a) Vu les hypothèses,  $A, B$  et  $C$  sont trois points distincts communs à  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{H}_1$ . Le polynôme  $P$  aux abscisses communes à ces deux courbes admet donc déjà trois solutions évidentes. Ce polynôme étant de degré 4, il a donc d'après les propriétés admises une quatrième solution dans  $\mathbb{R}$ . Il existe donc un quatrième point commun aux deux courbes. Notons le  $D$  pour l'instant. Les quatre points communs sont donc :

$$A\left(x_1, \frac{1}{x_1}\right), B\left(x_2, \frac{1}{x_2}\right), C\left(x_3, \frac{1}{x_3}\right) \text{ et } D\left(x_d, \frac{1}{x_d}\right)$$

(b) L'isobarycentre  $G$  de ces quatre points a pour coordonnées :

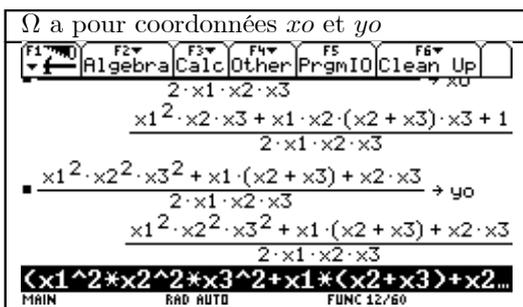
$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_d}{4} = \frac{S_1}{4}$$

$$y_G = \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_d}}{4}$$

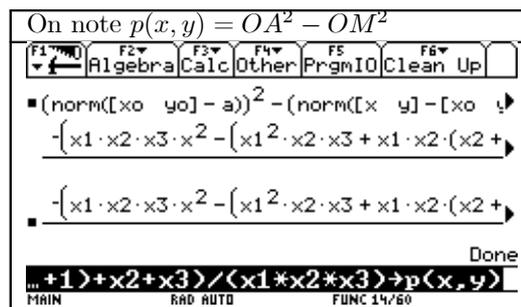
$$= \frac{x_2x_3x_d + x_1x_3x_d + x_2x_1x_d + x_2x_3x_1}{4x_1x_2x_3x_d} = \frac{S_3}{4S_4}$$

En adoptant les notations précédentes. La connaissance du polynôme, nous permettra de conclure. Recherchons donc le polynôme aux abscisses communes et en même temps le quatrième point commun : On reprend les calculs du centre du cercle circonscrit fait précédemment, pour arriver à

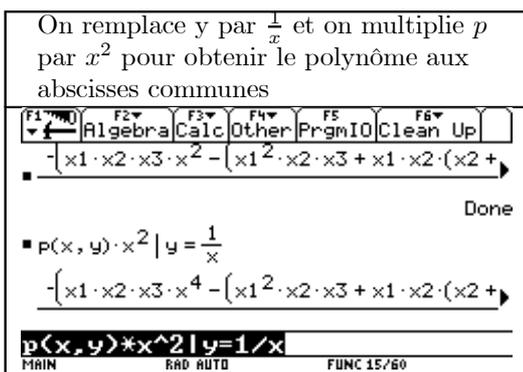
$\Omega$  a pour coordonnées  $x_0$  et  $y_0$



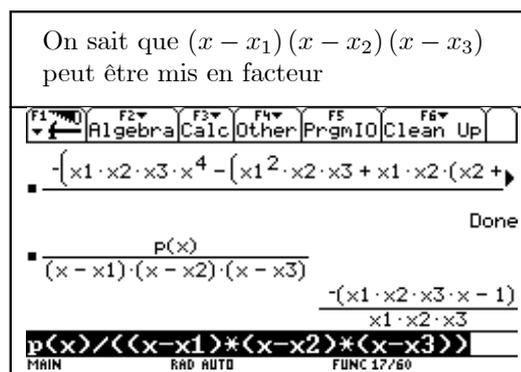
On note  $p(x, y) = OA^2 - OM^2$



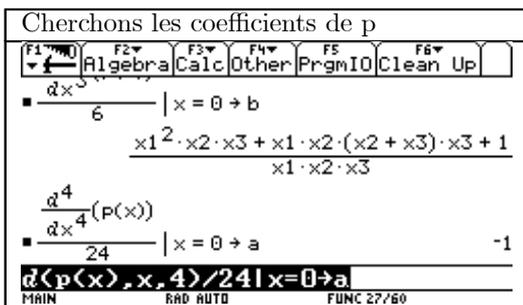
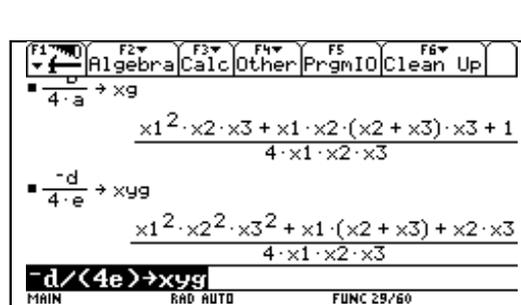
On remplace  $y$  par  $\frac{1}{x}$  et on multiplie  $p$  par  $x^2$  pour obtenir le polynôme aux abscisses communes



On sait que  $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$  peut être mis en facteur



Cherchons les coefficients de  $p$

La conclusion est évidente :

Le dernier point commun a pour abscisse  $\frac{1}{x_1 x_2 x_3}$ , c'est donc le symétrique de l'orthocentre par rapport à  $S$ .

La comparaison des écrans 1 et 6 de ce dernier tableau permet d'affirmer que  $G$  est le milieu de  $[\Omega, O]$

### 3 Triangles équilatéraux inscrits dans une hyperbole équilatère

$\Omega$  ayant pour abscisse  $x_0$ ,  $\Omega$  et  $\Omega'$  ont pour coordonnées respectives :  $\Omega(x_0, \frac{1}{x_0})$  et  $\Omega'(-x_0, -\frac{1}{x_0})$ .

ra désigne le carré du rayon du cercle

$(2 \cdot x_0)^2 + \left(\frac{2}{x_0}\right)^2 \rightarrow ra$   
 $4 \cdot x_0^2 + \frac{4}{x_0^2}$   
 $(x - x_0)^2 + \left(y - \frac{1}{x_0}\right)^2 - ra$   
 $x_0^2 \cdot x^2 - 2 \cdot x_0^3 \cdot x + x_0^2 \cdot y^2 - 2 \cdot x_0 \cdot y - 3 \cdot \left(\frac{1}{x_0}\right)$   
 $\frac{\dots}{x_0^2}$   
 **$(x-x_0)^2 + (y-1/x_0)^2 - ra$**

On remplace y par  $\frac{1}{x}$  et on simplifie

$x_0^2 \cdot P\left(x, \frac{1}{x}\right) \cdot x^2$   
 $x_0^2 \cdot x^4 - 2 \cdot x_0^3 \cdot x^3 - 3 \cdot (x_0^4 + 1) \cdot x^2 - 2 \cdot x_0$   
 $x_0^2 \cdot x^4 - 2 \cdot x_0^3 \cdot x^3 - 3 \cdot (x_0^4 + 1) \cdot x^2 - 2 \cdot x_0$   
 **$x_0^4 + 1) \cdot x^2 - 2 \cdot x_0$**

Pour obtenir le polynôme  $Q$  ( $Q(x) = 0$ ) est l'équation aux abscisses des points communs. La factorisation montre que  $-x_0$  est solution.

$x_0^2 \cdot P\left(x, \frac{1}{x}\right) \cdot x^2$   
 $x_0^2 \cdot x^4 - 2 \cdot x_0^3 \cdot x^3 - 3 \cdot (x_0^4 + 1) \cdot x^2 - 2 \cdot x_0$   
 $x_0^2 \cdot x^4 - 2 \cdot x_0^3 \cdot x^3 - 3 \cdot (x_0^4 + 1) \cdot x^2 - 2 \cdot x_0$   
**factor(q(x), x)**  
 $(x + x_0) \cdot (x_0^2 \cdot x^3 - 3 \cdot x_0^3 \cdot x^2 - 3 \cdot x + x_0)$   
**factor(q(x), x)**

Notons  $-x_0, x_1, x_2$  et  $x_3$  les quatre racines de  $Q$

$-x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = \frac{2 \cdot x_0}{x_0^2}$   
 $-x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 2 \cdot x_0$   
 $-x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 2 \cdot x_0 \rightarrow eq1$   
 $-x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 2 \cdot x_0$   
 $eq1 + x_0 \rightarrow eq1$   
 $x_1 + x_2 + x_3 = 3 \cdot x_0$   
 $\frac{eq1}{3}$   
**eq1/3**  
 $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = x_0$

En exprimant la somme des racines ou en utilisant plus simplement la question 6.b). on trouve sans difficulté les coordonnées de  $G$

$\frac{-o_0 + o_1 + o_2 + o_3}{4} = \frac{o_0}{2} \rightarrow eq2$   
 $\frac{-(o_0 - o_1 - o_2 - o_3)}{4} = \frac{o_0}{2}$   
 $eq2 + \frac{o_0}{4} \rightarrow eq2$   
 $\frac{o_1 + o_2 + o_3}{4} = \frac{3 \cdot o_0}{4}$   
 $eq2 \cdot 4$   
 $o_1 + o_2 + o_3 = 3 \cdot o_0$   
**eq2\*4**

Pour Conclure que :  
 $G = \Omega$  donc le triangle est équilatéral

Si  $-x_0$  est égal à  $x_1$  ou  $x_2$  ou  $x_3$ , cela entraine

$\frac{q(x)}{x + x_0}$   
 $x_0^2 \cdot x^3 - 3 \cdot x_0^3 \cdot x^2 - 3 \cdot x + x_0$   
 $x_0^2 \cdot x^3 - 3 \cdot x_0^3 \cdot x^2 - 3 \cdot x + x_0 \rightarrow r(x)$   
 $r(-x_0)$   
 $4 \cdot x_0 - 4 \cdot x_0^5$   
 $solve(4 \cdot x_0 - 4 \cdot x_0^5 = 0, x_0)$   
 $x_0 = 1$  or  $x_0 = 0$  or  $x_0 = -1$   
**solve(4\*x\_0-4\*x\_0^5=0, x\_0)**

CQFD pour le point  $\Omega$   
( La valeur 0 étant éliminée d'office)

### 4 Triangles rectangles inscrits dans une hyperbole équilatère

On désigne par  $A(x_1, \frac{1}{x_1}), B(x_2, \frac{1}{x_2})$  et  $C(x_3, \frac{1}{x_3})$  trois points quelconques distincts de  $\mathcal{H}_1$  et par  $\mathcal{C}_1$  le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .

1. Si  $ABC$  est rectangle en  $A$  alors  $H = A$ . On a vu que le symétrique de  $H$  est sur le cercle  $\mathcal{C}_1$ , ce cercle passe donc par deux points symétriques.
2. La CNS est que  $A = H$ , ce qui se traduit par

$$x_1 = -\frac{1}{x_1 x_2 x_3} \iff x_1^2 x_2 x_3 + 1 = 0$$

**Remarque :** On peut également obtenir cette condition en écrivant que le produit scalaire  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$

3. (a) Si  $R$  désigne le rayon du cercle  $\mathcal{C}_1$ , on sait que  $w = O\Omega^2 - R^2$ . Mais si  $\mathcal{C}_1$  passe par  $A$  et son symétrique par rapport à  $O$ , alors le point  $\Omega$  est sur la médiatrice de ces deux points. En particulier  $(OA) \perp (O\Omega)$ , d'après Pythagore, on a  $OA^2 + O\Omega^2 = R^2$ . On en déduit que

$$w = -OA^2 = -\left(x_1^2 + \frac{1}{x_1^2}\right) = -\frac{x_1^4 + 1}{x_1^2}$$

b. et c.

cc est l'équation de  $\mathcal{C}_1$

Done

$cc\left(x_1, \frac{1}{x_1}\right)$   $x_1 \cdot u + \frac{v}{x_1}$

$-x_1^2 \cdot u + v$   $-x_1^2 \cdot u$

$-x_1^2 \cdot u + v$

On exprime que  $B \in \mathcal{C}_1$   
On factorise la condition trouvée

$cc\left(x_2, \frac{1}{x_2}\right)$   $x_1 \cdot u + \frac{v}{x_1}$

$-x_1^2 \cdot u + v$   $-x_1^2 \cdot u$

$factor\left(cc\left(x_2, \frac{1}{x_2}\right)\right)$

$(x_1 + x_2) \cdot (x_1 - x_2) \cdot (x_1^2 \cdot x_2 \cdot u + x_1^2 \cdot x_2^2 - 1)$

$x_1^2 \cdot x_2^2$

$solve(ans(1)=0, \{u\})$

On résout en  $u$

$(x_1 + x_2) \cdot (x_1 - x_2) \cdot (x_1^2 \cdot x_2 \cdot u + x_1^2 \cdot x_2^2 - 1)$

$x_1^2 \cdot x_2^2$

$solve\left(\frac{-(x_1 + x_2) \cdot (x_1 - x_2) \cdot (x_1^2 \cdot x_2 \cdot u + x_1^2 \cdot x_2^2 - 1)}{x_1^2 \cdot x_2^2}\right)$

$u = \frac{-(x_1^2 \cdot x_2^2 - 1)}{x_1^2 \cdot x_2}$  or  $\frac{(x_1 + x_2) \cdot (x_1 - x_2)}{x_1^2 \cdot x_2^2}$

$solve(ans(1)=0, \{u\})$

Puis on écrit que  $C \in \mathcal{C}_1$   
On factorise la condition trouvée

$\frac{-(x_1^2 \cdot x_2^2 - 1)}{x_1^2 \cdot x_2} \rightarrow u$   $\frac{-(x_1^2 \cdot x_2^2 - 1)}{x_1^2 \cdot x_2}$

$factor\left(cc\left(x_3, \frac{1}{x_3}\right)\right)$

$(x_1 + x_3) \cdot (x_1 - x_3) \cdot (x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3 + 1) \cdot (x_2 - x_3)$

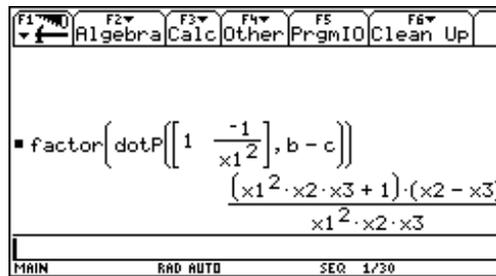
$x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3^2$

On retrouve la CNS pour que  $ABC$  soit rectangle en  $A$  car  $x_1 \neq -x_3$ .

**Remarque :** Si le symétrique de  $A$  coïncide avec  $B$ , le triangle n'est pas rectangle. En revanche le cercle  $\mathcal{C}_1$  coupe  $\mathcal{H}_1$  en un quatrième point noté  $D$ . Les triangles  $DAC$  et  $DBC$  sont alors rectangles.

4. Montrer que le triangle est rectangle en  $A$  si et seulement si la tangente en  $A$  à l'hyperbole  $\mathcal{H}_1$  est perpendiculaire au côté  $BC$ .

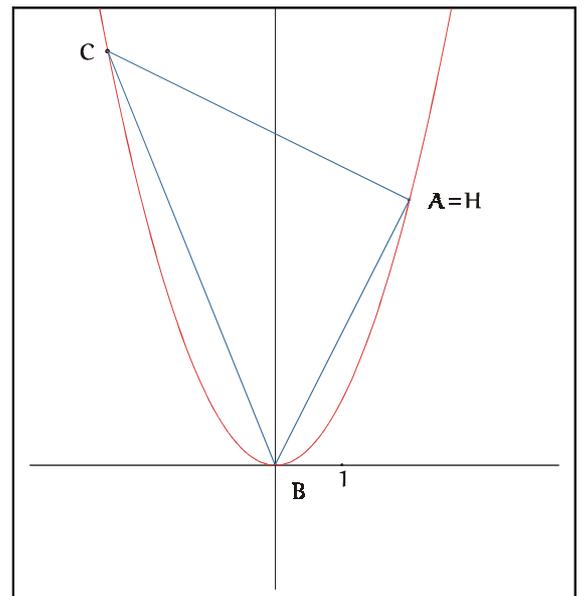
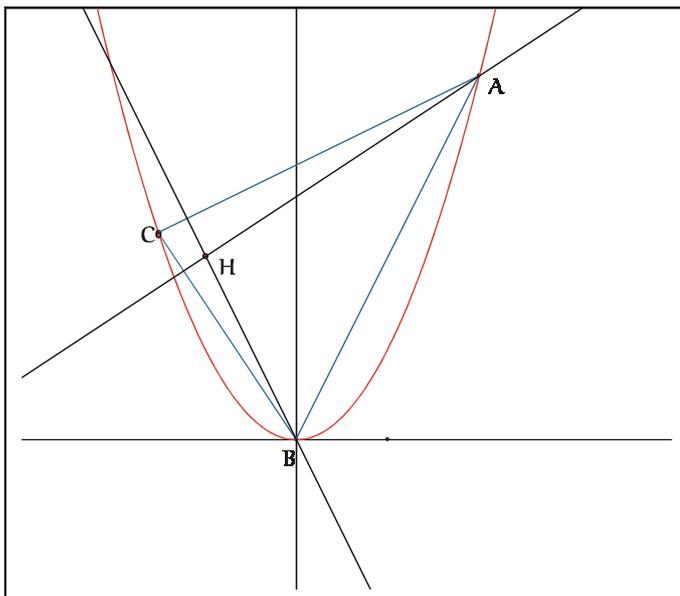
Le vecteur directeur de la tangente en  $A$  est  $\left(1, -\frac{1}{x_1^2}\right)$ . On calcule le produit scalaire



et on retrouve la CNS.

## 5 Triangles inscrits dans une parabole

- On constate que l'orthocentre de  $ABC$  n'est pas sur la parabole  $\mathcal{P}$  dans le premier cas. Dans le second cas, le triangle est rectangle en  $A$ , ainsi l'orthocentre  $H$  est sur  $\mathcal{P}$  (car confondu avec un des sommets). En y réfléchissant un peu, il est évident que  $H$  sera sur  $\mathcal{P}$  dès que le triangle est rectangle. Le problème intéressant est donc celui de la réciproque.



2.

On reprend la méthode précédente.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
<ul style="list-style-type: none"> <li>[2 4] → a [2 4]</li> <li>[0 0] → b [0 0]</li> <li>[-3/2 9/4] → c [-3/2 9/4]</li> <li>dotP(m-a, c-b) = 0 → eq1</li> </ul> $\frac{-3 \cdot x}{2} + \frac{9 \cdot y}{4} - 6 = 0$ <ul style="list-style-type: none"> <li>dotP(m-b, c-a) = 0 → eq2</li> </ul> $\frac{-7 \cdot x}{2} - \frac{7 \cdot y}{4} = 0$					
<b>dotP(m-b, c-a)=0→eq2</b>					
MAIN	RAD AUTO	SEQ	5/30		

H n'appartient pas à la parabole P.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
<ul style="list-style-type: none"> <li>[-3/2 9/4] → c [-3/2 9/4]</li> <li>dotP(m-a, c-b) = 0 → eq1</li> </ul> $\frac{-3 \cdot x}{2} + \frac{9 \cdot y}{4} - 6 = 0$ <ul style="list-style-type: none"> <li>dotP(m-b, c-a) = 0 → eq2</li> </ul> $\frac{-7 \cdot x}{2} - \frac{7 \cdot y}{4} = 0$					
solve(eq1 and eq2, {x y})					
x = -1 and y = 2					
MAIN	RAD AUTO	SEQ	6/30		

Second cas, H = A appartient à la parabole P

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
<ul style="list-style-type: none"> <li>[2 4] → a [2 4]</li> <li>[0 0] → b [0 0]</li> <li>[-5/2 25/4] → c [-5/2 25/4]</li> <li>dotP(m-a, c-b) = 0 → eq1</li> </ul> $\frac{-5 \cdot x}{2} + \frac{25 \cdot y}{4} - 20 = 0$ <ul style="list-style-type: none"> <li>dotP(m-b, c-a) = 0 → eq2</li> </ul> $\frac{9 \cdot y}{4} - \frac{9 \cdot x}{2} = 0$					
<b>dotP(m-b, c-a)=0→eq2</b>					
MAIN	RAD AUTO	FUNC	45/60		

3.

Plus généralement,

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
<ul style="list-style-type: none"> <li>solve(eq1 and eq2, {x y})</li> </ul> $x = 2 \text{ and } y = 4$ <ul style="list-style-type: none"> <li>[x1 x1^2] → c [x1 x1^2]</li> <li>dotP(m-a, c-b) = 0 → eq1</li> </ul> $x1 \cdot (x + x1 \cdot y - 2 \cdot (2 \cdot x1 + 1)) = 0$ <ul style="list-style-type: none"> <li>dotP(m-b, c-a) = 0 → eq2</li> </ul> $(x1 - 2) \cdot x + (x1^2 - 4) \cdot y = 0$					
<b>dotP(m-b, c-a)=0→eq2</b>					
MAIN	RAD AUTO	FUNC	49/60		

on trouve pour H

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
<ul style="list-style-type: none"> <li>[x1 x1^2] → c [x1 x1^2]</li> <li>dotP(m-a, c-b) = 0 → eq1</li> </ul> $x1 \cdot (x + x1 \cdot y - 2 \cdot (2 \cdot x1 + 1)) = 0$ <ul style="list-style-type: none"> <li>dotP(m-b, c-a) = 0 → eq2</li> </ul> $(x1 - 2) \cdot x + (x1^2 - 4) \cdot y = 0$					
solve(eq1 and eq2, {x y})					
x = (x1 + 2) \cdot (2 \cdot x1 + 1) and y = -(2 \cdot x1 + 1)					
<b>solve(eq1 and eq2, {x, y})</b>					
MAIN	RAD AUTO	FUNC	50/60		

On ne trouve que trois positions pour C.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$(x1 - 2) \cdot x + (x1^2 - 4) \cdot y = 0$ <ul style="list-style-type: none"> <li>solve(eq1 and eq2, {x y})</li> </ul> $x = (x1 + 2) \cdot (2 \cdot x1 + 1) \text{ and } y = -(2 \cdot x1 + 1)$ <ul style="list-style-type: none"> <li>(x1 + 2) \cdot (2 \cdot x1 + 1) → x : -(2 \cdot x1 + 1) → y</li> </ul> $-(2 \cdot x1 + 1)$ <ul style="list-style-type: none"> <li>solve(y = x^2, x1)</li> </ul> $x1 = -1/2 \text{ or } x1 = -1 \text{ or } x1 = -5/2$					
<b>solve(y=x^2, x1)</b>					
MAIN	RAD AUTO	FUNC	52/60		

Calculons alors les coordonnées de H pour les deux autres valeurs possibles pour x1

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$x = (x1 + 2) \cdot (2 \cdot x1 + 1) \text{ and } y = -(2 \cdot x1 + 1)$ <ul style="list-style-type: none"> <li>(x1 + 2) \cdot (2 \cdot x1 + 1) → x : -(2 \cdot x1 + 1) → y</li> </ul> $-(2 \cdot x1 + 1)$ <ul style="list-style-type: none"> <li>solve(y = x^2, x1)</li> </ul> $x1 = -1/2 \text{ or } x1 = -1 \text{ or } x1 = -5/2$ <ul style="list-style-type: none"> <li>x   x1 = -1/2</li> <li>x   x1 = -1</li> </ul>					
<b>x   x1 = -1</b>					
MAIN	RAD AUTO	FUNC	2/54		

**Conclusion :** Les seuls triangles  $ABC$  où  $B$  et  $A$  sont donnés pour lesquels l'orthocentre est sur la parabole sont des triangles rectangles !

4. et 5. Etudions cela d'un peu plus près

Soit trois points quelconques de  $\mathcal{P}$

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
<ul style="list-style-type: none"> <li>■ NewProb Done</li> <li>■ DelVar x1, x2, x3 Done</li> <li>■ [x1 x1^2] → a [x1 x1^2]</li> <li>■ [x2 x2^2] → b [x2 x2^2]</li> <li>■ [x3 x3^2] → c [x3 x3^2]</li> <li>■ [x3 x3^2] → c [x3 x3^2]</li> </ul>					
<b>[[x3, x3^2]] → c</b>					
MAIN RAD AUTO FUNC 6/60					

Cherchons les coordonnées de  $H$

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
<ul style="list-style-type: none"> <li>■ [x3 x3^2] → c [x3 x3^2]</li> <li>■ DelVar x, y Done</li> <li>■ [x y] → m [x y]</li> <li>■ dotP(m - a, b - c) = 0 → eq1</li> <li>(x2 - x3) · x + (x2^2 - x3^2) · y - x1^2 · (x2^2 - x3^2) →</li> <li>■ dotP(m - c, b - a) = 0 → eq2</li> <li>-(x1 - x2) · x - (x1^2 - x2^2) · y + (x1^2 · x3 + x1 →</li> </ul>					
<b>dotP(m - c, b - a) = 0 → eq2</b>					
MAIN RAD AUTO FUNC 10/60					

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
<ul style="list-style-type: none"> <li>■ solve(eq1 and eq2, {x y})</li> <li>x = x1^2 · (x2 + x3) + x1 · (x2^2 + 2 · x2 · x3 + x3^2) →</li> <li>■ x1^2 · (x2 + x3) + x1 · (x2^2 + 2 · x2 · x3 + x3^2 + 1) →</li> <li>x1^2 · (x2 + x3) + x1 · (x2^2 + 2 · x2 · x3 + x3^2 + 1) →</li> <li>■ -(x1 · (x2 + x3) + x2 · x3 + 1) → yh</li> <li>-(x1 · (x2 + x3) + x2 · x3 + 1)</li> </ul>					
<b>-(x1 · (x2 + x3) + x2 · x3 + 1) → yh</b>					
MAIN RAD AUTO FUNC 13/60					

Ecrivons la relation  $yh - xh^2$   
 puis celles exprimant que le triangle est rectangle en  $A, B$  et  $C$

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
<ul style="list-style-type: none"> <li>■ yh - xh^2</li> <li>-x1^4 · (x2 + x3)^2 - 2 · x1^3 · (x2 + x3) · (x2^2 + 2 →</li> <li>■ dotP(a - b, a - c)</li> <li>x1^4 + x1^2 · (-x2^2 - x3^2 + 1) + x1 · (-x2 - x3) →</li> <li>■ dotP(a - b, a - c)</li> <li>(x1 - x2) · (x1 - x3)</li> </ul>					
<b>P(a - b, a - c) / ((x1 - x2) * (x1 - x3))</b>					
MAIN RAD AUTO FUNC 3/16					

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
<ul style="list-style-type: none"> <li>■ dotP(c - b, a - c)</li> <li>(x3 - x2) · (x1 - x3)</li> <li>x1 · (x2 + x3) + x2 · x3 + x3^2 + 1</li> <li>■ x1 · (x2 + x3) + x2 · x3 + x3^2 + 4 → eqb</li> <li>4</li> <li>x1 · (x2 + x3) + x2 · x3 + x3^2 + 4</li> </ul>					
<b>(x1 · (x2 + x3) + x2 · x3 + x3^2 + 4) / 4 → eqb</b>					
MAIN RAD AUTO FUNC 15/60					

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
<ul style="list-style-type: none"> <li>■ x1^2 + x1 · (x2 + x3) + x2 · x3 + 1 → eqa</li> <li>x1^2 + x1 · (x2 + x3) + x2 · x3 + 1</li> <li>■ x1 · (x2 + x3) + x2^2 + x2 · x3 + 1 → eqb</li> <li>x1 · (x2 + x3) + x2^2 + x2 · x3 + 1</li> <li>■ x1 · (x2 + x3) + x2 · x3 + x3^2 + 1 → eqc</li> <li>x1 · (x2 + x3) + x2 · x3 + x3^2 + 1</li> </ul>					
<b>x1 · (x2 + x3) + x2 · x3 + x3^2 + 1 → eqc</b>					
MAIN RAD AUTO FUNC 3/21					

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
<ul style="list-style-type: none"> <li>■ x1 · (x2 + x3) + x2 · x3 + x3^2 + 1 → eqc</li> <li>x1 · (x2 + x3) + x2 · x3 + x3^2 + 1</li> <li>■ yh - xh^2 → eqh</li> <li>-x1^4 · (x2 + x3)^2 - 2 · x1^3 · (x2 + x3) · (x2^2 + 2 →</li> <li>■ eqa · eqb · eqc</li> <li>eqh</li> </ul>					
<b>eqa · eqb · eqc / eqh</b>					
MAIN RAD AUTO FUNC 23/60					

La dernière relation permet donc d'affirmer que :

$$H \in \mathcal{P} \iff ABC \text{ est rectangle}$$