Autour des triangles inscrits sur une hyperbole équilatère

M.Gouy G.Huvent A.Ladureau

10 février 2003

Dans tout le texte qui suit, ABC désignant un triangle, Ω désignera le centre du cercle $\mathcal{C}_1$ circonscrit au triangle et H son orthocentre.

1 Triangles inscrits dans une hyperbole équilatère

1. Construire l'hyperbole $\mathcal{H}_1$ d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ dans un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ (l'unité sera de 2 cm)
2. Placer les points $A\left(2, \frac{1}{2}\right)$, $B\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$ et $C\left(4, \frac{1}{4}\right)$. Construire l'orthocentre du triangle ABC.
   Que constatez-vous ?
3. Déterminer par un calcul à la main une équation de la hauteur ΔA du triangle ABC passant par A.
4. Faire de même avec la hauteur ΔB du triangle ABC passant par B.
   En déduire les coordonnées de H puis vérifier ou infirmer la conjecture émise à la question 2
5. Déterminer par un calcul à la main les coordonnées du centre Ω du cercle circonscrit $\mathcal{C}_1$ au triangle ABC.
6. Tracer $\mathcal{C}_1$ puis le symétrique de H par rapport à O. Que constatez-vous ? Prouvez-le.
7. Reprendre les questions 4, 5 et 6 en faisant les calculs à l'aide d'un logiciel de calcul formel.
8. A l'aide d'un logiciel de géométrie, refaire la figure en prenant cette fois trois points quelconques sur $\mathcal{H}_1$.
   Le résultat reste-t-il valable si l'on déplace les points A, B et C ?
9. On désigne par $A\left(x_1, \dfrac{1}{x_1}\right)$, $B\left(x_2, \dfrac{1}{x_2}\right)$ et $C\left(x_3, \dfrac{1}{x_3}\right)$ trois points quelconques distincts de $\mathcal{H}_1$.
   (a) Déterminer à l'aide d'un logiciel de calcul formel, une équation de la hauteur ΔA du triangle ABC passant par A puis une équation de la hauteur ΔB issue de B. Conclure.
   (b) Déterminer l'intersection de ΔA et $\mathcal{H}_1$. Comment sans calculs supplémentaires peut-on retrouver le résultat précédent ?
   (c) Démontrer que le symétrique de H par rapport au point O appartient au cercle circonscrit du triangle ABC.

2 Intersection d'un cercle et de l'hyperbole $\mathcal{H}$

1. Construire l'hyperbole $\mathcal{H}_1$ d'équation $y = \frac{1}{x}$dans un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ (unité : 2 cm)
2. Construire le cercle $\mathcal{C}_1$ d'équation $x^2 + y^2 + \frac{7}{2}x + \frac{7}{2}y + \frac{9}{2} = 0$.
   Déteminer graphiquement puis algébriquement les points communs à $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{C}_1$.
3. Refaire le même travail avec $\mathcal{C}_2$ cercle de diamètre $[A, B]$ où A et B sont les points de coordonnées respectives $A\left(-1, -1\right)$ et $B\left(\frac{1}{2}, 2\right)$
4. Dans le cas d'un cercle quelconque, montrer à l'aide d'un logiciel de calcul formel que l'équation aux abscisses des points communs aux deux courbes se ramène à une équation polynomiale de degré 4.

Remarque 1 ***Pour la suite, on admettra les résultats suivants :***
Une telle équation :
Ne peut avoir qu'au plus quatre solutions dans $\mathbb{R}$.
A exactement quatre solutions si elle en posséde au moins trois (Attention, une même solution peut être comptée deux fois ou plus).
Dans le cas où un polynome P de degré 4 a quatre solutions dans $\mathbb{R}$ alors, on peut écrire :

$$\begin{aligned} P(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c = a(x-\alpha) \times (x-\beta) \times (x-\gamma) \times (x-\delta) \\ & \quad \textit{où } \alpha, \beta, \gamma \textit{ et } \delta \textit{ sont les quatre racines de } P \end{aligned}$$

5. A l'aide d'un logiciel de calcul formel, développer la seconde expression de P et en déduire la valeur en fonction des coefficients de P des expressions suivantes :

$$\begin{aligned} S_1 &= \alpha + \beta + \gamma + \delta \\ S_2 &= \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta \\ S_3 &= \alpha\beta\gamma + \beta\gamma\delta + \gamma\delta\alpha + \delta\alpha\beta \\ S_4 &= \alpha\beta\gamma\delta \end{aligned}$$

6. On désigne par $A\left(x_1, \frac{1}{x1}\right), B\left(x_2, \frac{1}{x2}\right)$ et $C\left(x_3, \frac{1}{x3}\right)$ trois points quelconques distincts de $\mathcal{H}_1$ et par $\mathcal{C}_1$ le cercle circonscrit au triangle ABC.
   (a) Montrer que $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{C}_1$ ont quatre points en commun dont trois au moins sont distincts deux à deux (On notera D le dernier point et x_D son abscisse).
   (b) En s'aidant de la question 5, montrer que l'isobarycentre G des points A, B, C et D est le milieu de $[\Omega, O]$.
   (c) Montrer que D est le symétrique de l'orthocentre H du triangle ABC par rapport à O.

3 Triangles équilatéraux inscrits dans une hyperbole équilatère

1. Soit Ω un point de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{C}_1$ un cercle de centre Ω vérifiant :
   – $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{C}_1$ ont au moins trois points distincts deux à deux en commun.
   – Le symétrique Ω'de Ω par rapport au centre S de l'hyperbole appartient à $\mathcal{C}_1$
   D'après la partie 3, on a vu qu'il y a quatre points communs entre ces deux courbes, notons A, B et C les trois points s'ajoutant à Ω'.On remarquera alors que $\mathcal{C}_1$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.
   (a) Faire un dessin correspondant aux hypothèses. Tracer le triangle ABC, que peut-on constater ?
   (b) On se propose de démontrer ce résultat.
      i. Notons x_0, l'abscisse de Ω. Déterminer alors les coordonnées de Ω et Ω'.
      ii. En remarquant que $[\Omega, \Omega']$ est un rayon de $\mathcal{C}_1$, déterminer une équation de $\mathcal{C}_1$.
      iii. En déduire l'équation aux abscisses des points communs aux deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{H}_1$.
      iv. Vérifier que $-x_0$ est bien solution de cette équation. On note x_1, x_2 et x_3 les trois autres solutions ou encore les abscisses des points A,B et C.
      v. A l'aide de la question 6 b) déterminer en fonction de x_0, les coordonnées de G centre de gravité du triangle ABC. Conclure.
   (c) Montrer que le cercle et l'hyperbole n'ont que trois points distincts en commun si, et seulement si, Ω a pour abscisse 1 ou -1.
2. Soit trois points A, B et C appartenant à $\mathcal{H}_1$ tel que le triangle ABC soit équilatéral.
   Démontrer que le centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC appartient à $\mathcal{H}_1$ et qu'il passe par le symétrique du point Ω par rapport à O.
3. Déduire des questions précédentes les triangles équilatéraux ABC inscrits dans $\mathcal{H}_1$ dont le sommet A a pour abscisse 2.

4 Triangles rectangles inscrits dans une hyperbole équilatère

On désigne par $A\left(x_1, \frac{1}{x1}\right), B\left(x_2, \frac{1}{x2}\right)$ et $C\left(x_3, \frac{1}{x3}\right)$ trois points quelconques distincts de $\mathcal{H}_1$ et par $\mathcal{C}_1$ le cercle circonscrit au triangle ABC.

1. En utilisant la question **2** 6.c), montrer que si ABC est rectangle (en A par exemple), le cercle $\mathcal{C}_1$ passe par deux points symétriques par rapport au centre de l'hyperbole
2. Donner une CNS sur x_1, x_2 et x_3 pour que ABC soit rectangle en A
3. On se propose d'examiner la réciproque du résultat obtenu à la question 1. Soient A, B et C trois points quelconques deux à deux distincts de $\mathcal{H}_1$. On suppose que $\mathcal{C}_1$ passe par le symétrique de A par rapport au centre de l'hyperbole et que ce symétrique est distinct des points B et C. L'équation de $\mathcal{C}_1$ est de la forme $x^2 + y^2 - 2ux - 2vy + w$
   (a) Par des considèrations géométriques simples, exprimer w en fonction de x_1.
   (b) En écrivant à l'aide d'un logiciel de calcul formel, que $\mathcal{C}_1$ passe par A, exprimer v en fonction de u.
   Puis en exprimant que $\mathcal{C}_1$ passe par B, déterminer u et v.
   (c) En exprimant que $\mathcal{C}_1$ passe par C, en déduire que le triangle est rectangle en A.
4. Montrer que le triangle est rectangle en A si et seulement si la tangente en A à l'hyperbole $\mathcal{H}_1$ est perpendiculaire au côté BC.

5 Triangles inscrits dans une parabole

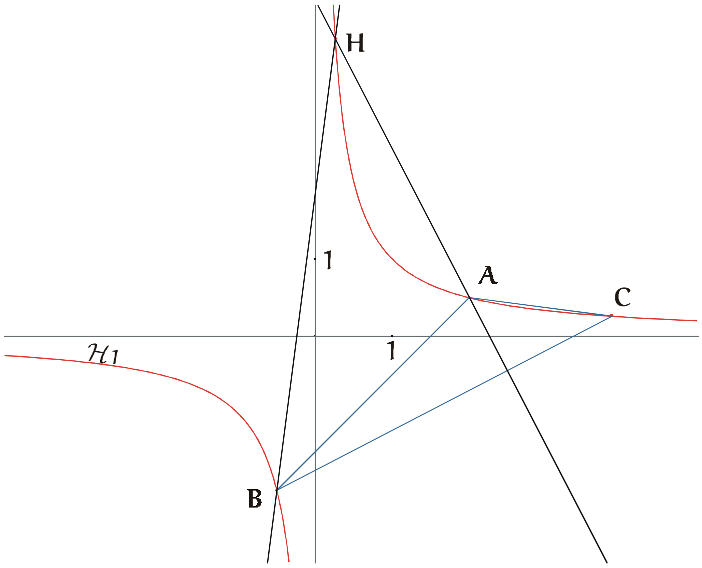
On se propose de reprendre la première partie en remplaçant l'hyperbole $\mathcal{H}_1$ par la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$. L'objectif est donc d'étudier l'orthocentre d'un triangle ABC inscrit dans $\mathcal{P}$.

1. Placer les points $A(2,4)$, $B(0,0)$ et $C\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$, puis construire l'orthocentre du triangle ABC. Que constatez-vous ?
   Faire la même chose lorsque $C\left(-\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)$.
2. Calculer les coordonnées de l'orthocentre pour les deux cas précédents.
3. A et B étant donnés comme dans la question 1., pour quels points $C\left(x_1, x_1^2\right)$ de $\mathcal{P}$ l'orthocentre H est-il aussi sur $\mathcal{P}$?
   (Ce calcul sera fait à l'aide d'un logiciel de calcul formel).
4. A l'aide d'un logiciel de géométrie, constater le phénomène suivant : soient A, B et C trois points distincts deux à deux de la parabole $\mathcal{P}$, l'orthocentre du triangle ABC est sur $\mathcal{P}$ si et seulement si ABC est rectangle.
5. On se propose d'en faire une démonstration à l'aide d'un logiciel de calcul formel, pour cela :
   (a) Définir trois points quelconques A, B et C de la parabole d'abscisses respectives x_1, x_2 et x_3.
   (b) Calculer les coordonnées de H en fonction de ces trois réels.
   (c) Déterminer la condition sur ces trois réels pour que le point H appartienne à $\mathcal{P}$.
   (d) A, B et C étant distincts deux à deux, écrire la condition traduisant que le triangle ABC est rectangle en A. Faire de même pour les points B et C.
   (e) En se rappelant qu'un produit de facteurs est nul, si et seulement si, un au moins des facteurs est nul, démonter la propriété énoncée à la question 5.

Solution

1 Triangles inscrits dans une hyperbole équilatère

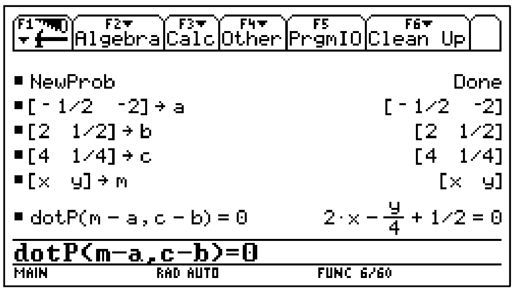
1. et 2.



3. et 4. Recherche des coordonnées de H. Soit $M\,(x,y)$ un point quelconque du plan

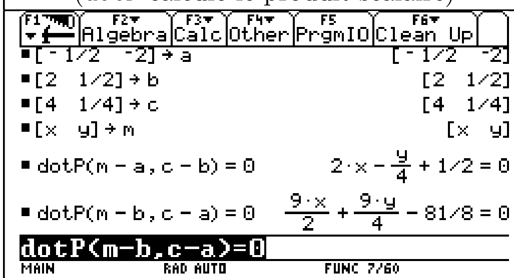
$$\begin{aligned} M \in \Delta A &\iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ &\iff \left(x+\tfrac{1}{2}\right)\times 2 + (y+2)\times\left(-\frac{1}{4}\right) = 0 \\ &\iff 2x - \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

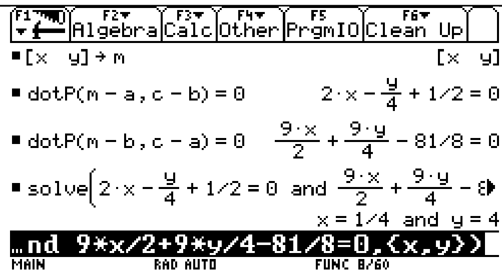
Equation qu'on peut retrouver sur une TI-92, par exemple, comme suit :



On peut alors chercher de même une équation de la hauteur issue de B puis les coordonnées de H

Equations des hauteurs (`dotP` calcule le produit scalaire)	Coordonnées de H



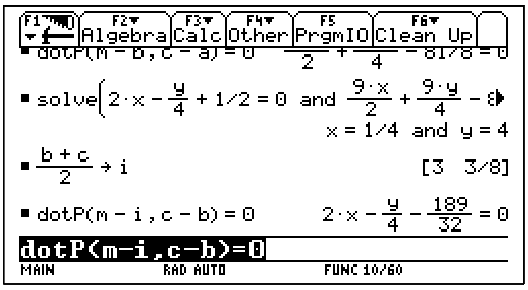


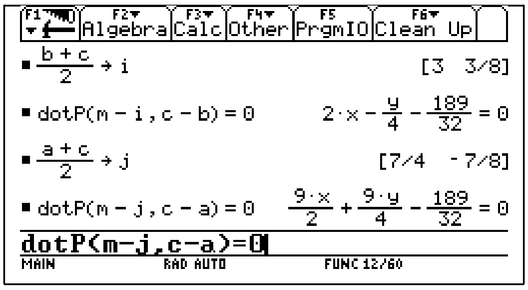
On en conclut sans difficulté que le point H est sur l'hyperbole $(\mathcal{H}_1)$

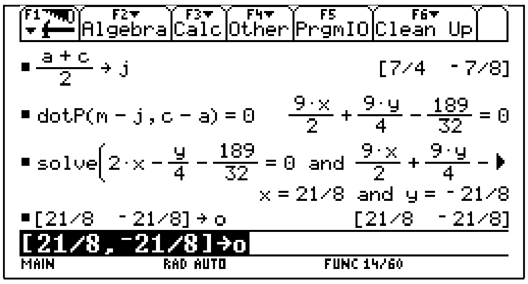
5. Soit $M\,(x, y)$ un point quelconque du plan

$$\begin{aligned} M \in Med[BC] & \iff \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{BC} = 0 \text{ où } I \text{ est le milieu de } [B, C] \\ & \iff (x-3)\times(2) + \left(y - \frac{3}{8}\right)\times\left(-\frac{1}{4}\right) = 0 \\ & \iff 2x - \tfrac{1}{4}y - \tfrac{189}{32} = 0 \end{aligned}$$

Ce que l'on peut retrouver facilement sur la TI-92 comme suit :

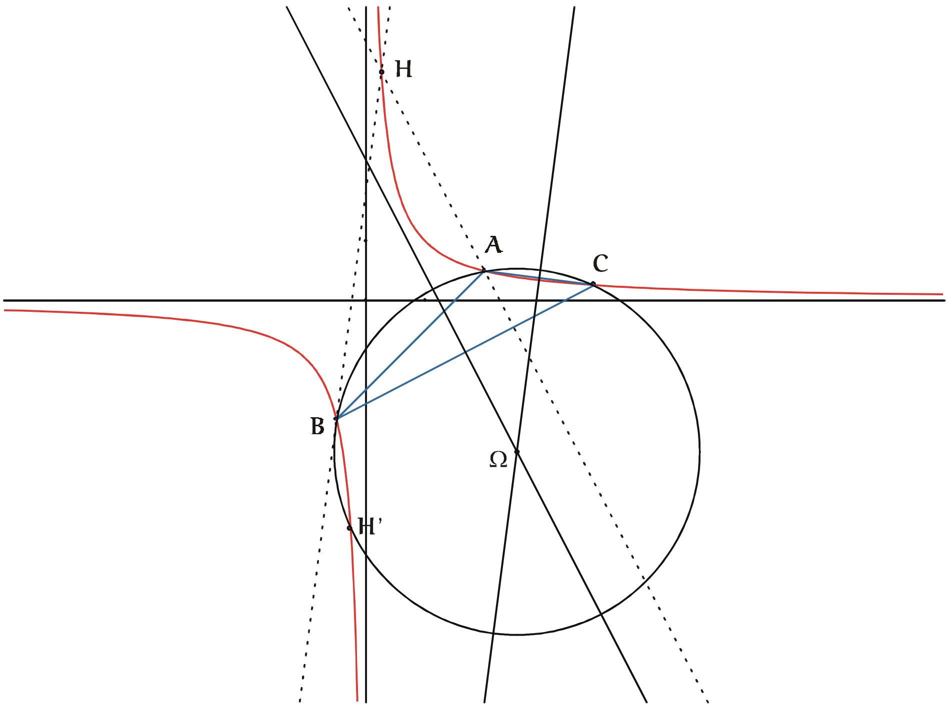






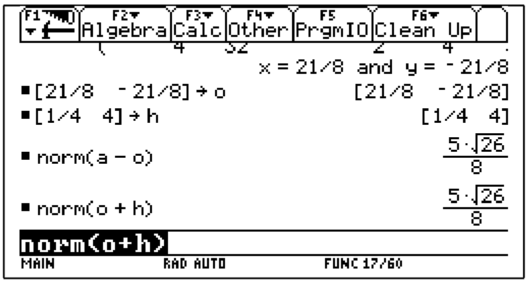
La détermination d'une seconde médiatrice et des coordonnées du centre Ω du cercle circonscrit[1] étant alors évidente.

6.



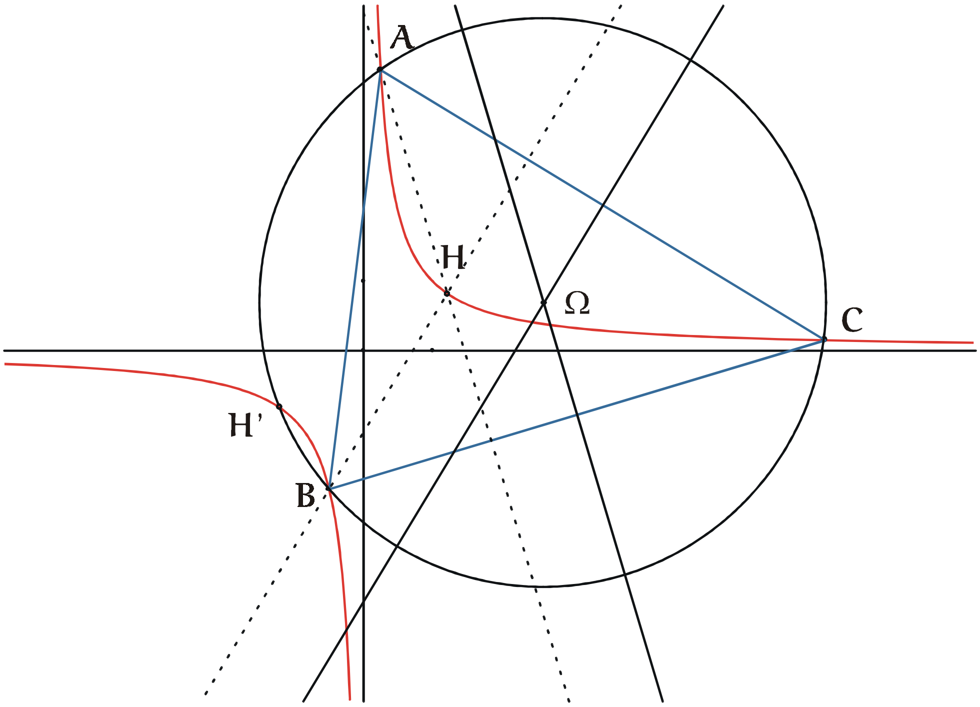
[1] Les coordonnées du point Ω sont stockés dans la variable o (pour *oméga*) de la calculatrice.

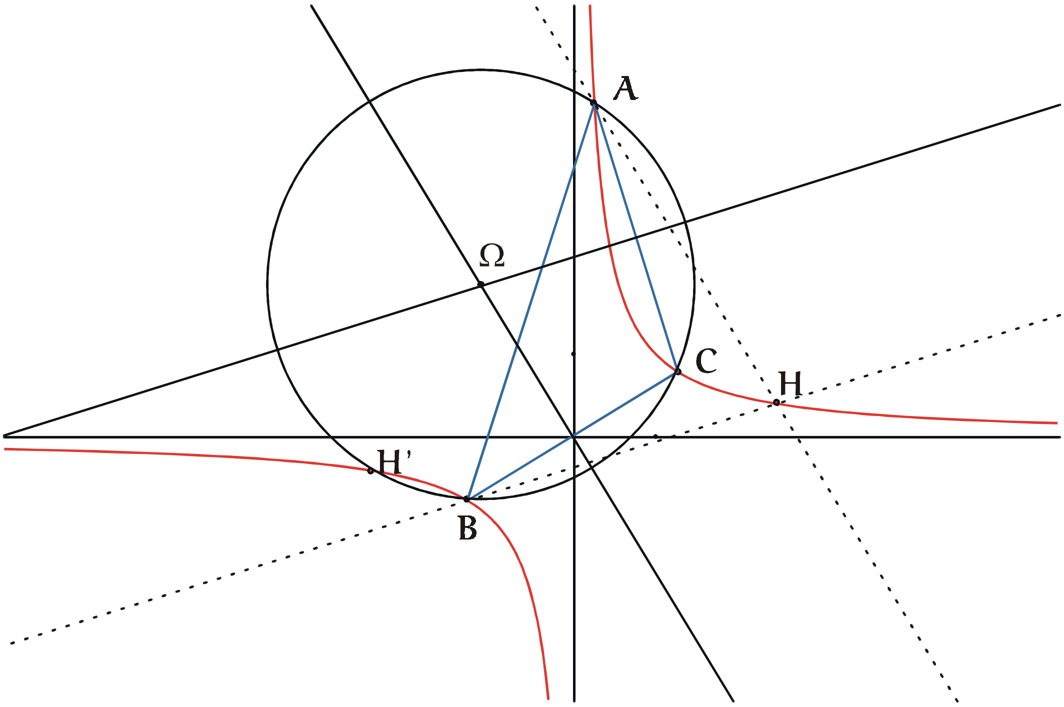
Il semble que H' soit un point du cercle circonscrit au triangle ABC, calculons ΩA et $\Omega H'$ pour le démontrer :



La question 7. ayant été traitée , passons à la question 8.

8. on obtient par exemple les deux configurations suivantes :



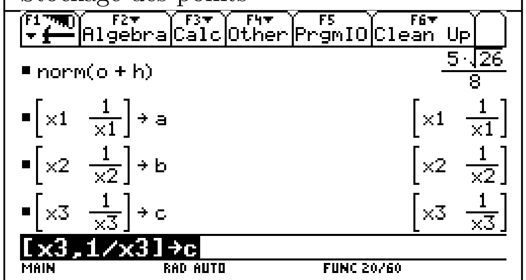


Il semble donc que :

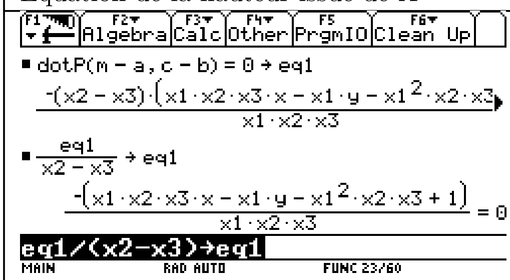
Théorème 2 *Si on choisit trois points quelconques A, B et C sur $(\mathcal{H}_1)$ alors l'orthocentre H du triangle ABC est situé sur $(\mathcal{H}_1)$. D'autre part le symétrique de H par rapport au centre de l'hyperbole $(\mathcal{H}_1)$ est un point du cercle circonscrit au triangle ABC.*

9. Reprenons les calculs précédents en prenant $A\left(x_1, \frac{1}{x1}\right), B\left(x_2, \frac{1}{x2}\right)$ et $C\left(x_3, \frac{1}{x3}\right)$ trois points quelconques distincts de $(\mathcal{H}_1)$
Les calculs précédents s'écrivent alors

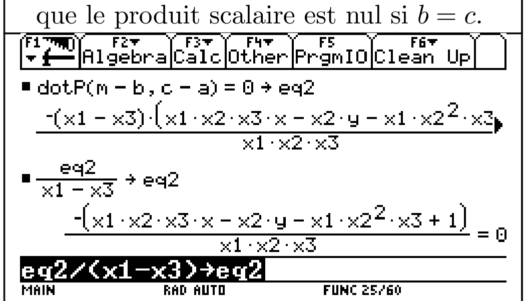
Stockage des points



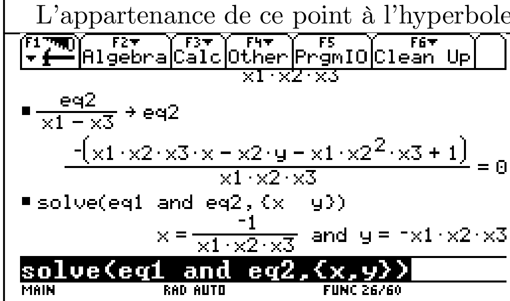
Equation de la hauteur issue de A



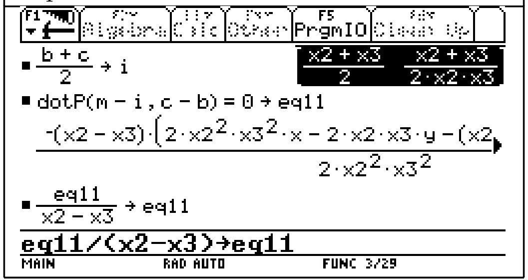
La division par $x_2 - x_3$ vient du fait que le produit scalaire est nul si $b = c$.

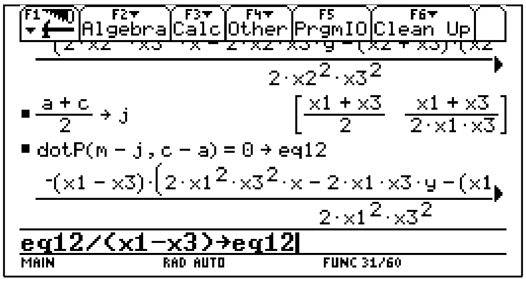


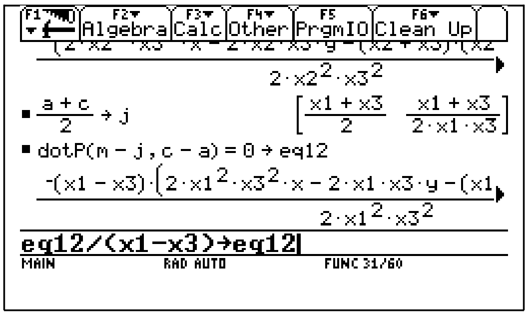
Coordonnées de l'orthocentre H.
L'appartenance de ce point à l'hyperbole est évidente.



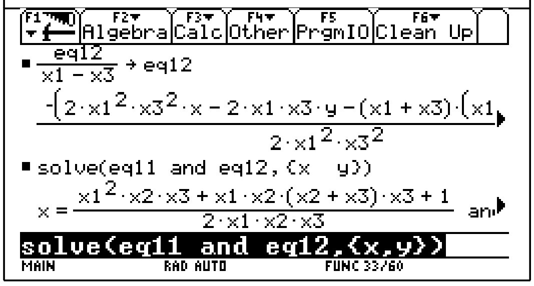
Equations des médiatrices



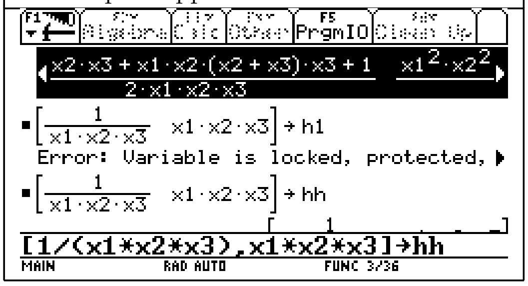




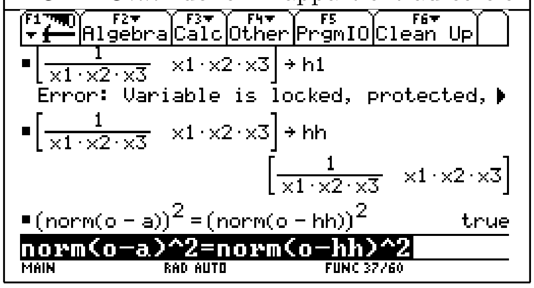
Recherche des coordonnées de Ω centre du cercle circonscrit



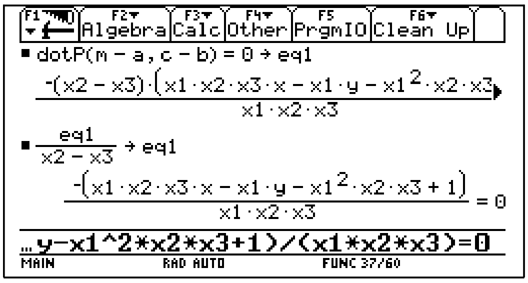
On désigne par hh le symétrique de H par rapport à S



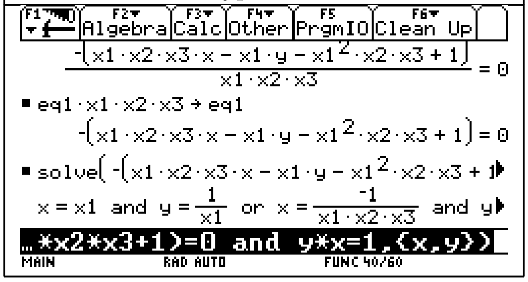
$AO^2 = Ohh^2$ donc hh appartient au cercle



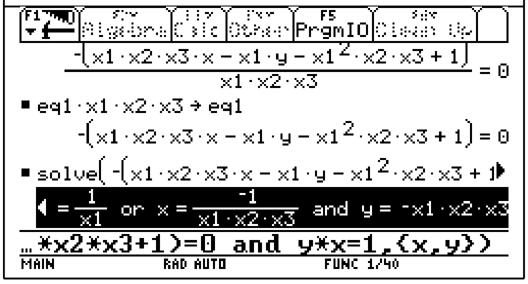
En fait, on peut conclure un peu plus rapidement pour l'appartenance de H. En Effet, reprenons le calcul au moment où nous avons trouvé la hauteur issue de A. Nous obtenons



Cherchons l'intersection de cette hauteur avec l'hyperbole



On trouve :



Vu la symétrie des coordonnées du second point d'intersection, on a vite fait de conclure que ce point se trouve sur les trois hauteurs du triangle ABC. On en conclut donc que c'est l'orthocentre du triangle ABC.

2 Intersection d'un cercle et de l'hyperbole $\mathcal{H}$

1. et 2. Pour déterminer l'intersection de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{C}_1$ il faut résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & \dfrac{1}{x} \\ x^2+y^2+\dfrac{7}{2}x+\dfrac{7}{2}y+\dfrac{9}{2} & = & 0 \end{array}\right.$$

qui se ramène à

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & \dfrac{1}{x} \\ x^4+\dfrac{7}{2}x^3+\dfrac{9}{2}x^2+\dfrac{7}{2}x+1 & = & 0 \end{array}\right.$$

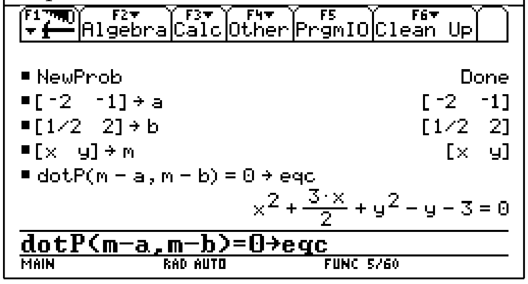
Cette denière équation admet -2 et $-\dfrac{1}{2}$ comme racines évidentes, on peut donc factoriser le polynôme par le produit $(x+2)\times\left(x+\frac{1}{2}\right)$, on obtient alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & \dfrac{1}{x} \\ \left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x+2)\left(x^2+x+1\right) & = & 0 \end{array}\right.$$

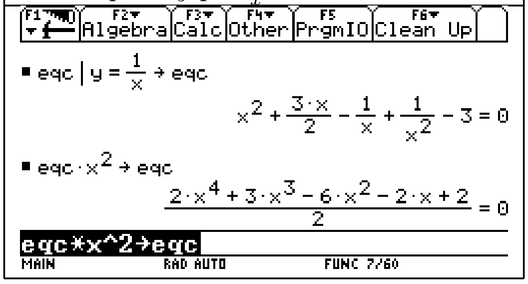
On trouve donc deux points communs : $A_1\left(-2,-\dfrac{1}{2}\right)$ et $B_1\left(-\dfrac{1}{2},-2\right)$, ce que confirme le dessin obtenu.

3. Résolvons celle-ci avec notre TI-92

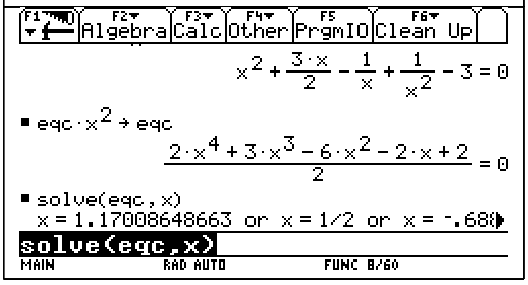
Equation du cercle

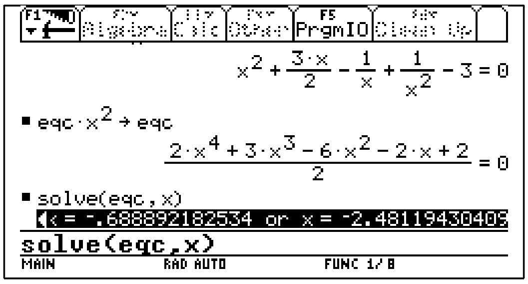


On remplace y par $\frac{1}{x}$

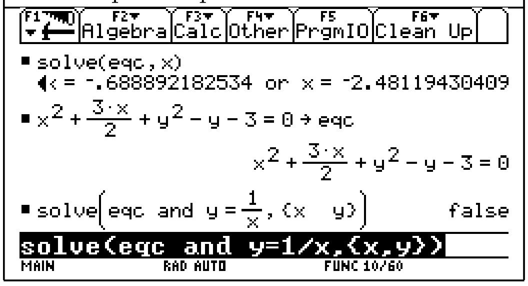


On résout



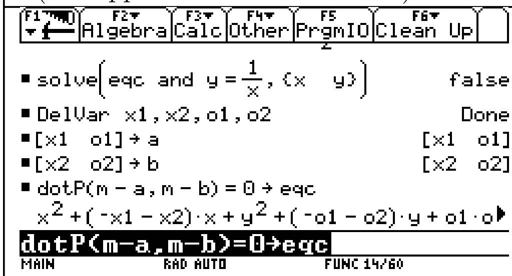


Remarque : La calculatrice echoue si on lui pose le problème directement

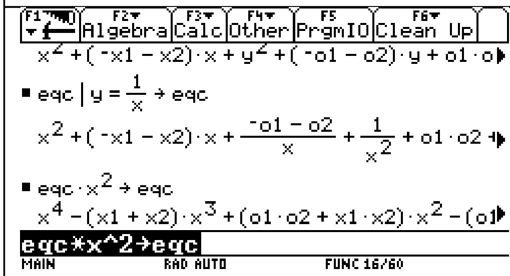


4.

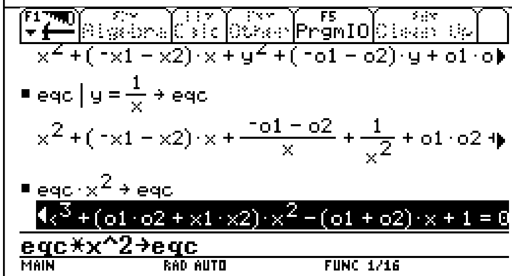
Equation d'un cercle
(on suppose donné un diamètre)



On remplace y par $\frac{1}{x}$



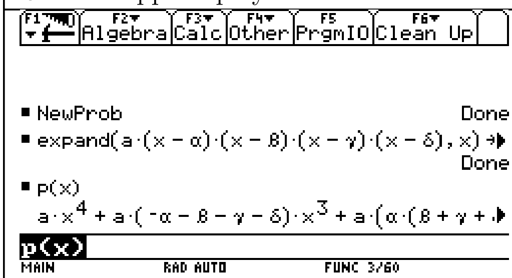
On réduit au même dénominateur



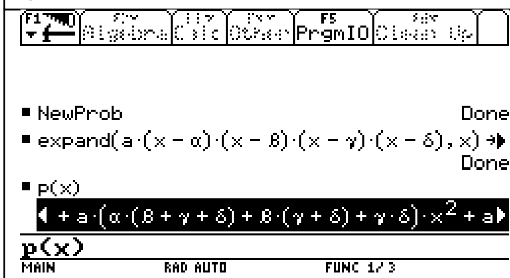
On a bien obtenu une expression polynomiale du quatrième degré.

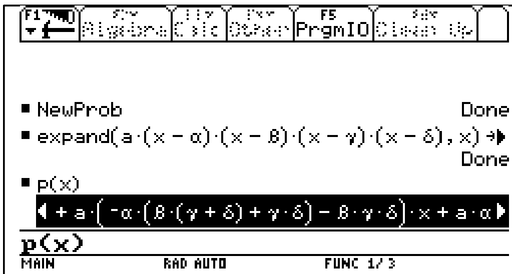
5.

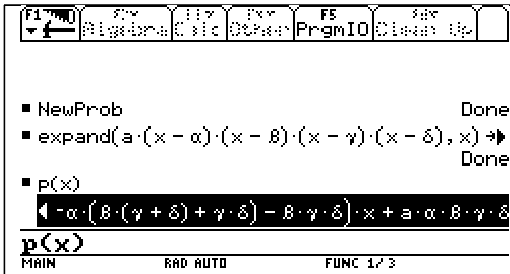
On développe le polynôme P



On fait défiler les coefficients







On en conclut sans peine que :

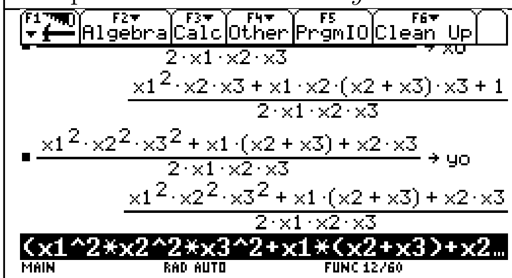
$$
\begin{aligned}
S_1 &= \alpha+\beta+\gamma+\delta = \frac{-b}{a} \\
S_2 &= \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta = \frac{c}{a} \\
S_3 &= \alpha\beta\gamma+\beta\gamma\delta+\gamma\delta\alpha+\delta\alpha\beta = \frac{-d}{a} \\
S_3 &= \alpha\beta\gamma\delta = \frac{e}{a}
\end{aligned}
$$

6. On désigne par $A\left(x_1, \dfrac{1}{x_1}\right), B\left(x_2, \dfrac{1}{x_2}\right)$ et $C\left(x_3, \dfrac{1}{x_3}\right)$ trois points quelconques distincts de $\mathcal{H}_1$ et par $\mathcal{C}_1$ le cercle circonscrit au triangle ABC.
   (a) Vu les hypothèses, A, B et C sont trois points distincts communs à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{H}_1$. Le polynôme P aux abscisses communes à ces deux courbes admet donc déjà trois solutions évidentes. Ce polynôme étant de degré 4, il a donc d'après les propriétés admises une quatrième solution dans $\mathbb{R}$. Il existe donc un quatrième point commun aux deux courbes. Notons le D pour l'instant. Les quatre points communs sont donc : $A\left(x_1, \dfrac{1}{x_1}\right), B\left(x_2, \dfrac{1}{x_2}\right), C\left(x_3, \dfrac{1}{x_3}\right)$ et $D\left(x_d, \dfrac{1}{x_d}\right)$
   (b) L'isobarycentre G de ces quatre points a pour coordonnées :

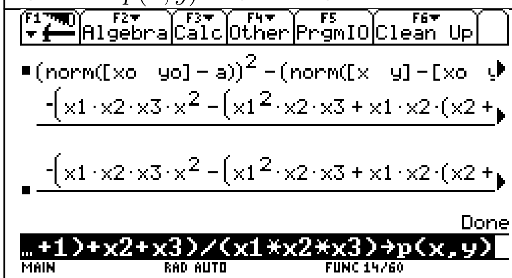
$$\begin{aligned}
x_G &= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_d}{4} = \frac{S_1}{4} \\
y_G &= \frac{\frac{1}{x1} + \frac{1}{x2} + \frac{1}{x3} + \frac{1}{xd}}{4} \\
&= \frac{x_2x_3x_d + x_1x_3x_d + x_2x_1x_d + x_2x_3x_1}{4x_1x_2x_3x_d} = \frac{S_3}{4S_4}
\end{aligned}$$

En adoptant les notations précédentes. La connaissance du polynôme, nous permettra de conclure.
Recherchons donc le polynôme aux abcisses communes et en même temps le quatrième point commun :
On reprend les calculs du centre du cercle circonscrit fait précédemment, pour arriver à

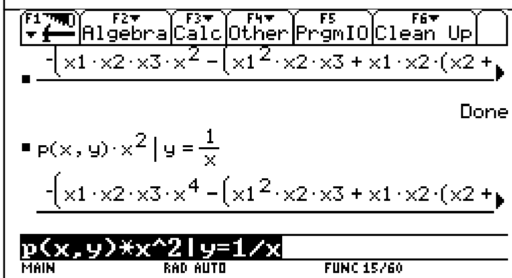
Ω a pour coordonnées xo et yo



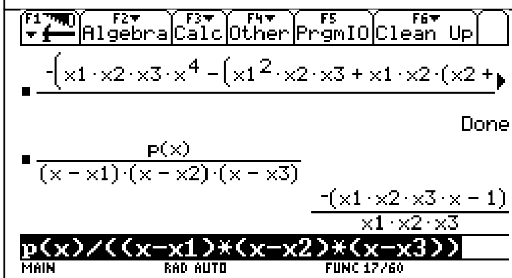
On note $p(x,y) = OA^2 - OM^2$



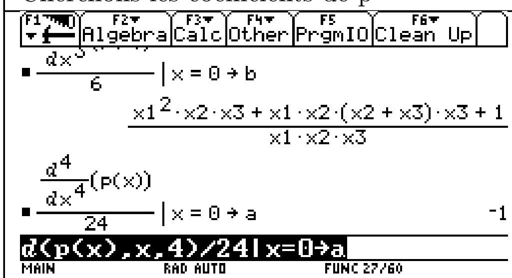
On remplace y par $\frac{1}{x}$ et on multiplie p par x^2 pour obtenir le polynôme aux abscisses communes

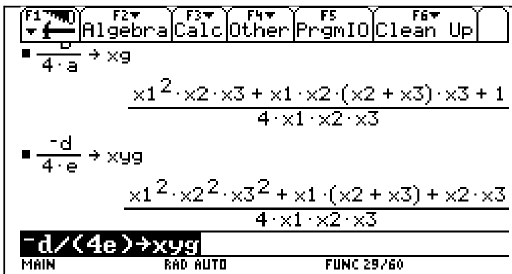


On sait que $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ peut être mis en facteur



Cherchons les coefficients de p





La conclusion est évidente :

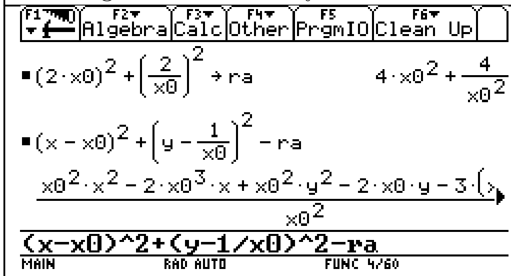
Le dernier point commun a pour abscisse $\dfrac{1}{x_1x_2x_3}$, c'est donc le symétrique de l'orthocentre par rapport à S.

La comparaison des écrans 1 et 6 de ce dernier tableau permet d'affirmer que G est le milieu de $[\Omega, O]$

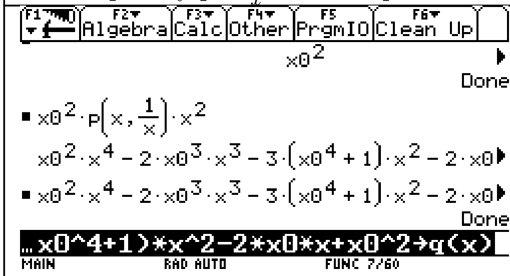
3 Triangles équilatéraux inscrits dans une hyperbole équilatère

Ω ayant pour abscisse x_0, Ω et Ω' ont pour coordonnées respectives : $\Omega\left(x_0, \frac{1}{x0}\right)$ et $\Omega'\left(-x0, -\frac{1}{x0}\right)$.

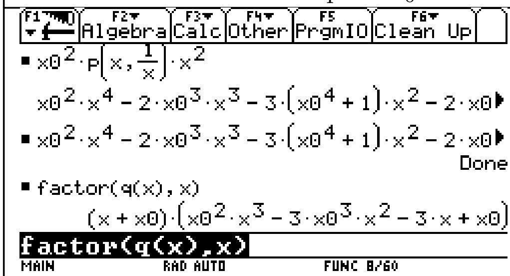
ra désigne le carré du rayon du cercle



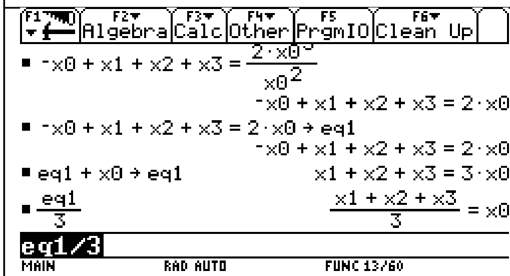
On remplace y par $\frac{1}{x}$ et on simplifie



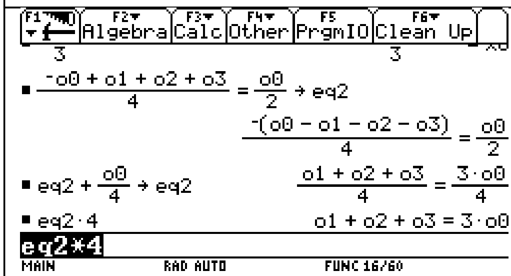
Pour obtenir le polynôme Q ($Q(x) = 0$) est l'équation aux abscisses des points communs. La factorisation montre que $-x_0$ est solution.



Notons $-x_0, x_1, x_2$ et x_3 les quatre racines de Q

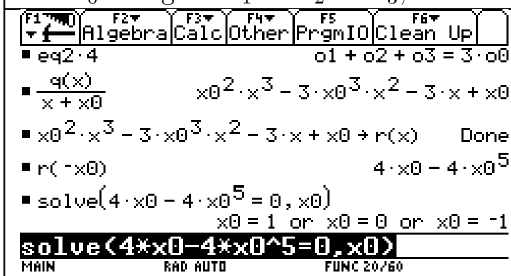


En exprimant la somme des racines ou en utilisant plus simplement la question 6.b). on trouve sans difficulté les coordonnées de G



Pour Conclure que :
$G = \Omega$ donc le triangle est équilatéral

Si $-x_0$ est égal à x_1 ou x_2 ou x_3, cela entraine



CQFD pour le point Ω
(La valeur 0 étant éliminée d'office)

4 Triangles rectangles inscrits dans une hyperbole équilatère

On désigne par $A\left(x_1, \frac{1}{x1}\right), B\left(x_2, \frac{1}{x2}\right)$ et $C\left(x_3, \frac{1}{x3}\right)$ trois points quelconques distincts de $\mathcal{H}_1$ et par $\mathcal{C}_1$ le cercle circonscrit au triangle ABC.

1. Si ABC est rectangle en A alors $H = A$. On a vu que le symétrique de H est sur le cercle $\mathcal{C}_1$, ce cercle passe donc par deux points symétriques.
2. La CNS est que $A = H$, ce qui se traduit par

$$x_1 = -\frac{1}{x_1 x_2 x_3} \Longleftrightarrow x_1^2 x_2 x_3 + 1 = 0$$

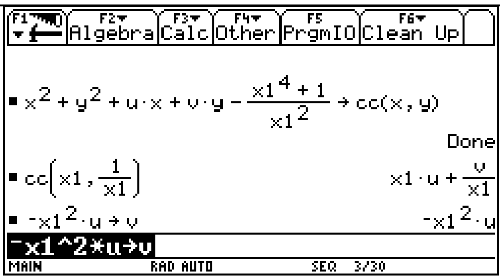
Remarque : On peut également obtenir cette condition en écrivant que le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

3. (a) Si R désigne le rayon du cercle $\mathcal{C}_1$, on sait que $w = O\Omega^2 - R^2$. Mais si $\mathcal{C}_1$ passe par A et son symétrique par rapport à O, alors le point Ω est sur la médiatrice de ces deux points. En particulier $(OA) \perp (O\Omega)$, d'après Pythagore, on a $OA^2 + O\Omega^2 = R^2$. On en déduit que

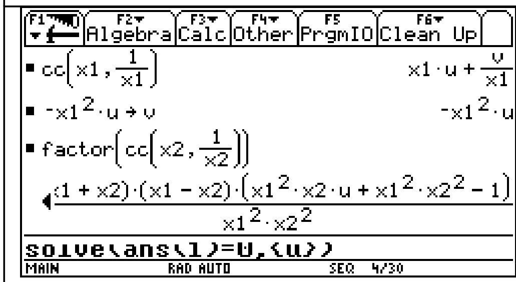
$$w = -OA^2 = -\left(x_1^2 + \frac{1}{x_1^2}\right) = -\frac{x_1^4 + 1}{x_l^2}$$

b. et c.

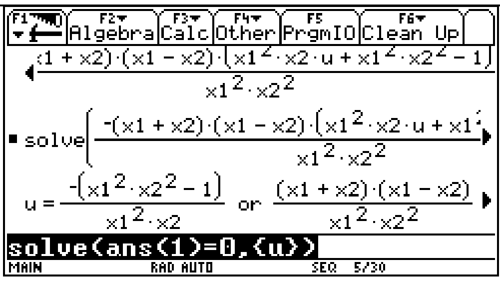
cc est l'équation de $\mathcal{C}_1$



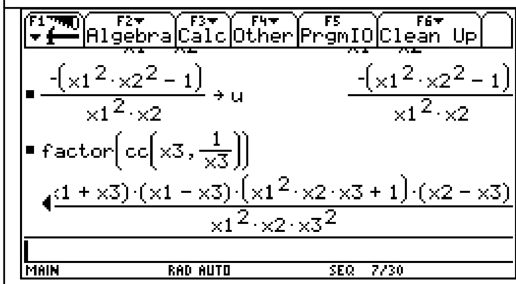
On exprime que $B \in \mathcal{C}_1$
On factorise la condition trouveé



On résout en u



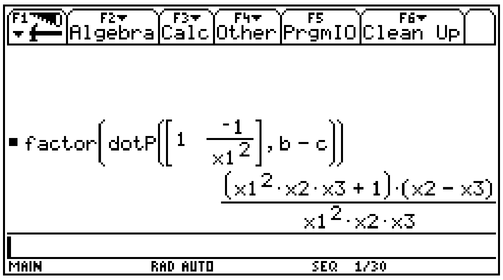
Puis on écrit que $C \in \mathcal{C}_1$
On factorise la condition trouveé



On retrouve la CNS pour que ABC soit rectangle en A car $x_1 \neq -x_3$.
Remarque : Si le symétrique de A coïncide avec B, le triangle n'est pas rectangle. En revanche le cercle $\mathcal{C}_1$ coupe $\mathcal{H}_1$ en un quatrième point noté D. Les triangles DAC et DBC sont alors rectangles.

4. Montrer que le triangle est rectangle en A si et seulement si la tangente en A à l'hyperbole $\mathcal{H}_1$ est perpendiculaire au côté BC.

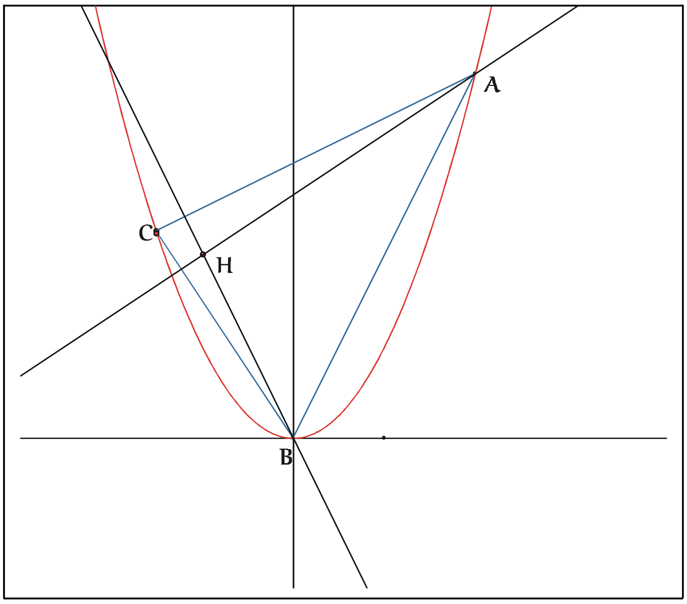
Le vecteur directeur de la tangente en A est $\left(1, -\frac{1}{x_1^2}\right)$. On calcule le produit scalaire

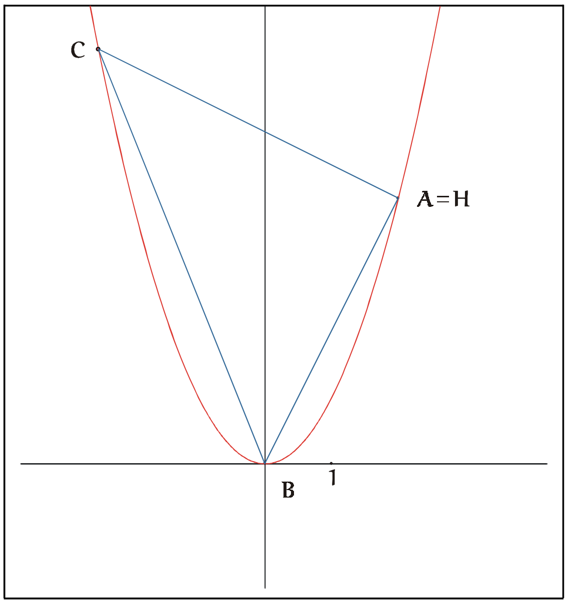


et on retrouve la CNS.

5 Triangles inscrits dans une parabole

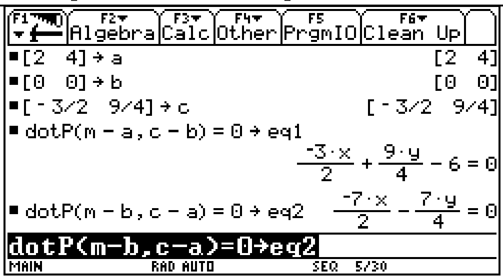
1. On constate que l'orthocentre de ABC n'est pas sur la parabole $\mathcal{P}$ dans le premier cas. Dans le second cas, le triangle est rectangle en A, ainsi l'orthocentre H est sur $\mathcal{P}$ (car confondu avec un des sommets). En y réflechissant un peu, il est évident que H sera sur $\mathcal{P}$ dès que le triangle est rectangle. Le problème intéressant est donc celui de la réciproque.



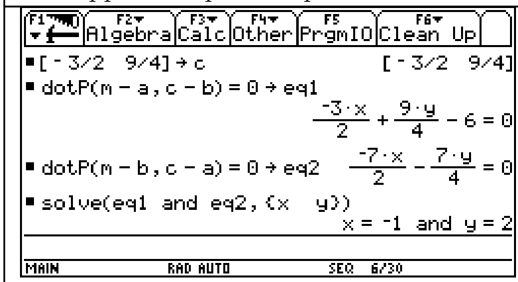


2.

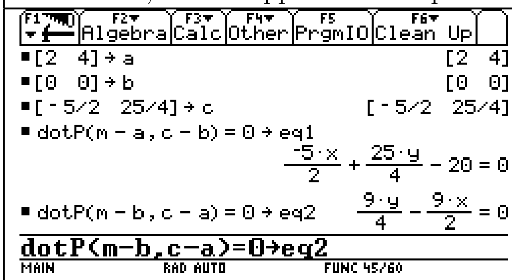
On reprend la méthode précédente.



H n'appartient pas à la parabole $\mathcal{P}$.

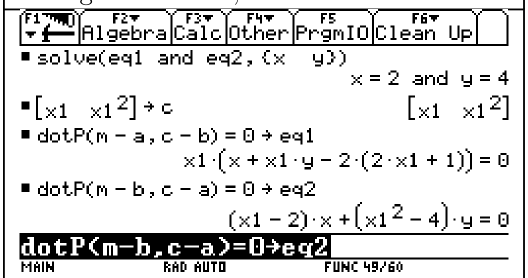


Second cas, $H = A$ appartient à la parabole $\mathcal{P}$

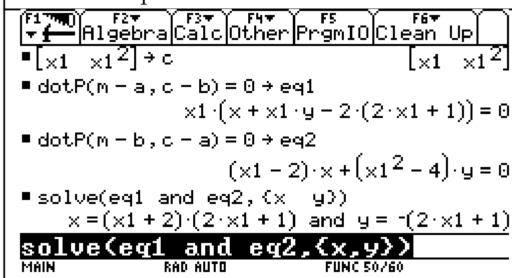


3.

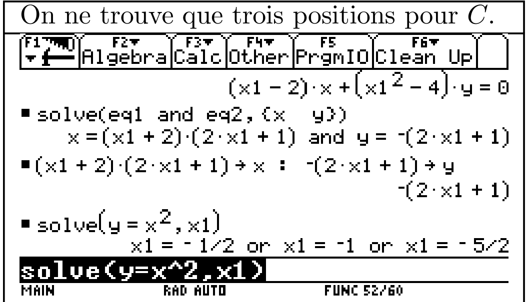
Plus généralement,



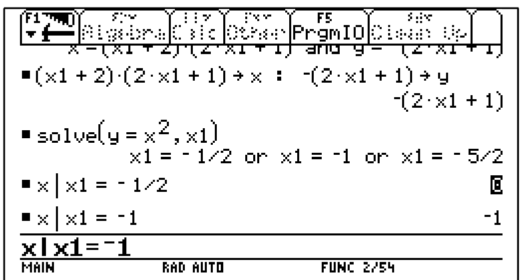
on trouve pour H



On ne trouve que trois positions pour C.



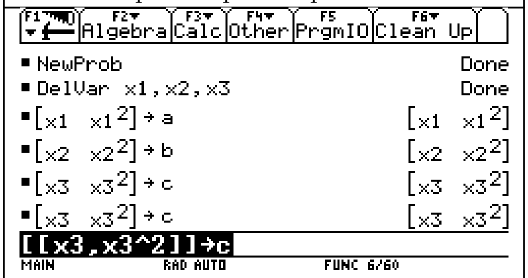
Calculons alors les coordonnées de H pour les deux autres valeurs possibles pour x_1



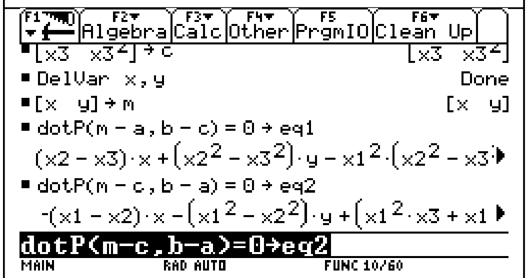
Conclusion : Les seuls triangles ABC où B et A sont donnés pour lesquels l'orthocentre est sur la parabole sont des triangles rectangles !

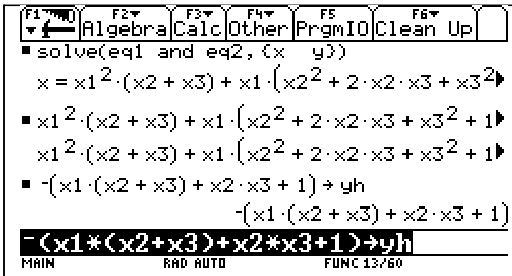
4. et 5. Etudions cela d'un peu plus près

Soit trois points quelconques de $\mathcal{P}$

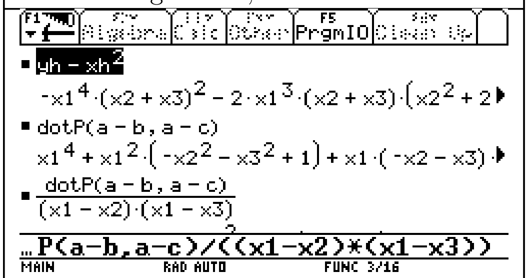


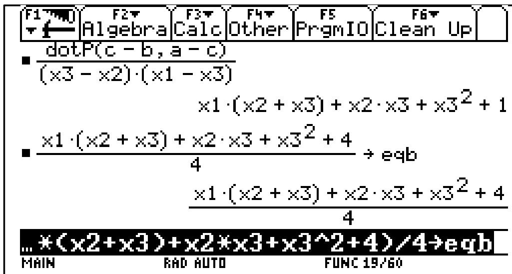
Cherchons les coordonnées de H

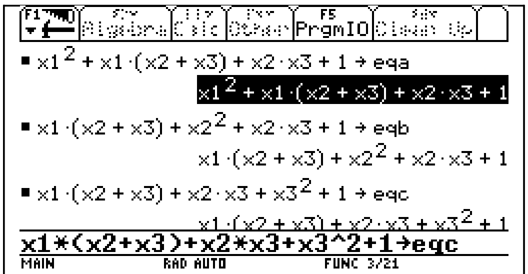


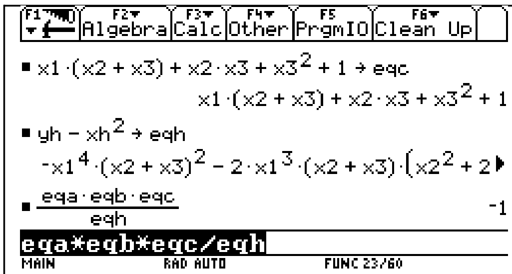


Ecrivons la relation $yh - xh^2$
puis celles exprimant que le triangle
est rectangle en A, B et C









La dernière relation permet donc d'affirmer que :

$$H \in \mathcal{P} \iff ABC \text{ est rectangle}$$