Electromagnétisme et formes différentielles, vers la relativité restreinte

Thierry Lévy

http://dma.ens.fr/culturemath

Les équations de Maxwell sont un excellent exemple de l'intégration de mathématiques « pures » en physique.

Cette intégration permet, du côté de la physique, de donner des modèles plus satisfaisants, et de découvrir de nouveaux horizons inexplicables par les théories antérieures, et du côté des mathématiques de mettre en valeur des objets peu connus, et d'ouvrir plus largement leur champ aux recherches grâce aux questions provenant de la physique.

Le but de cet article est d'illustrer un objet mathématique fortement liée aux équations de Maxwell dont l'étude des symétries permet de constater que la notion de vecteur n'est adaptée ni pour modéliser le champ électrique ni le champ magnétique. Ceci va nous pousser à définir la notion de forme différentielle, avec laquelle nous pourrons reformuler les équations de manière plus compacte et plus satisfaisante.

D'autre part, une conséquence connue dès le XIX° siècle des équations de Maxwell est que la vitesse de la lumière ne dépend pas du repère choisi, ce qui entre en contradiction flagrante avec les lois de la mécanique Newtonienne.

Nous allons voir en conclusion comment la relativité restreinte parvient à généraliser la mécanique newtonienne en tenant compte de ce paradoxe, en considérant l'espace-temps comme un seul objet dont la géométrie est compatible avec les symétries des équations de Maxwell.

Table des matières

1 Les équations de Maxwell « à l'ancienne »

1.1 Forces et vecteurs

En mécanique classique, celle qu'on utilise pour résoudre la plupart des problèmes qui se posent à l'échelle macroscopique, on décrit les interactions entre différents objets, ou différents systèmes physiques, par des *forces* qu'ils exercent les uns sur les autres. La notion de force est facilement accessible à l'intuition, car elle est associée à des perceptions tactiles et musculaires qui sont communes à la plupart d'entre nous[1]. En particulier, notre expérience nous apprend que des forces peuvent avoir des intensités diverses et peuvent s'exercer dans des directions variées. Par ailleurs, l'action d'un système sur un autre ne saurait en général se résumer à une seule force. Pour rompre un bout de pain, des mains doivent exercer des forces différentes, c'est-à-dire d'intensité et de direction différentes, en différents points de ce bout de pain. Des forces identiques en tout point permettraient tout au plus de le déplacer, pas de le déformer.

D'autres grandeurs physiques que les forces sont caractérisées par une direction et une intensité, par exemple, la vitesse d'un objet par rapport à un système de référence dont on considère qu'il est au repos. Il pourrait être tentant d'identifier force et vitesse et de prendre pour principe de la dynamique que la vitesse d'un corps est égale (ou tout au moins proportionnelle) à la force qui s'exerce sur lui. Ainsi, les Grecs pensaient que, lorsqu'aucune force ne s'exerçait plus sur un corps, celui-ci cessait de se déplacer. Avec une autre notion de force que celle de la physique moderne, ce principe serait peut-être vrai, mais depuis les travaux de Galilée et de Newton, nous savons qu'il est plus correct de dire que lorsqu'un corps n'est plus soumis à aucune force, sa vitesse ne varie plus.

[1] Il faut cependant veiller à ne pas l'assimiler à la notion d'énergie dont notre intuition est aussi liée aux sensations d'effort et de fatigue. Il faut en particulier se rappeler qu'il n'est pas nécessaire de dépenser d'énergie pour exercer une force. Par exemple, j'exerce actuellement une force sur la chaise sur laquelle je suis assis, sans dépenser pour cela la moindre énergie. En revanche, si ma chaise venait à s'effondrer sous mon poids, le force que j'exerce dessus effectuerait un travail, et mon corps perdrait une quantité d'énergie équivalente, sous forme d'énergie potentielle de gravitation.

Newton a même énoncé une loi plus précise qui relie la variation de la vitesse d'un corps ponctuel au cours du temps à la force qui lui est appliquée[2].

S'il est possible d'identifier une force avec une variation de vitesse, cela signifie que cette dernière peut aussi être caractérisée par une direction et une intensité. L'intensité d'une accélération nous est sans doute assez familière depuis qu'il existe des moyens de locomotion puissants, en revanche sa direction nous l'est moins.

Pour pouvoir faire des calculs avec des quantités qui ont une direction et une intensité, on les représente par des *vecteurs*. Par exemple, le vecteur qui représente une force exercée en un point est un triplet de nombres $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$. Ce triplet indique une direction : dans le repère dont l'origine est le point d'application de la force et dont les axes sont parallèles à ceux d'un repère de référence choisi une fois pour toutes, les nombres F_x, F_y, F_z sont les coordonnées d'un point. La direction d'application de la force est alors celle de la demi-droite issue du point d'application et passant par ce point. Quant à l'intensité de la force, c'est la longueur du vecteur $\vec{F}$, ou encore sa norme, qui vaut $\|\vec{F}\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$.

De même, la vitesse d'un solide ponctuel dans un référentiel est représentée par un vecteur $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. La direction du mouvement de vitesse $\vec{v}$ est celle de la demi-droite issue de l'origine du repère de référence et passant par le point de coordonnées (v_x, v_y, v_z)[3]. L'intensité de la vitesse, ce que le langage courant désigne par vitesse, est la norme de $\vec{v}$, c'est-à-dire $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

Supposons maintenant que la vitesse du solide que nous étudions évolue au cours du temps. À chaque instant t, le solide a une certaine vitesse $\vec{v}(t)$. Les composantes de ce vecteur sont maintenant trois fonctions du temps, $v_x(t), v_y(t), v_z(t)$. Pour mesurer la variation de la vitesse au cours du temps, on utilise le calcul différentiel, et on considère le vecteur $\vec{a}(t)$ défini par $\vec{a}(t) = (\dot{v}_x(t), \dot{v}_y(t), \dot{v}_z(t))$, où le point placé au dessus d'une fonction de t indique qu'on l'a dérivée par rapport à t. Le vecteur $\vec{a}$ s'appelle l'accélération du mobile et la loi de Newton énonce la relation

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F} \tag{1}$$

entre la force $\vec{F}$ que son environnement exerce sur un solide ponctuel et son accélération $\vec{a}$ dans un référentiel bien choisi. La constante de proportionnalité m qui apparaît est une caractéristique du solide considéré et s'appelle sa *masse inertielle*.

En général, la force que l'environnement exerce sur un solide n'est pas constante au cours du temps. Même si on considère que le solide ponctuel ne modifie pas son environenment en s'y déplaçant, la force qu'il subit peut dépendre de la position qu'il occupe et du moment auquel il l'occupe. Ainsi, les composantes du vecteur $\vec{F}$ dépendent d'une variable t de temps et de trois variables x, y, z d'espace. Si l'on note $(r_x(t), r_y(t), r_z(t))$ les coordonnées du solide

[2] Un solide ponctuel est un objet dont on néglige les déformations possibles et les mouvements de rotation autour de son centre de gravité. Une fois les lois de la dynamique établies pour de tels corps idéaux, on peut déduire les lois pour des solides réels, étendus et déformables, en considérant ceux-ci comme des ensembles d'un grand nombre de solides ponctuels

[3] Il n'y a pas dans ce cas de notion de point d'application. Il n'y a pas besoin d'attacher le repère dans lequel on travaille au solide ponctuel.

à l'instant t, l'équation (1) se réécrit

$$\vec{a}(t) = \frac{1}{m}\vec{F}(r_x, r_y, r_z, t). \tag{2}$$

Elle décrit l'évolution d'un solide ponctuel de masse m dans le *champ de forces* $\vec{F}(x, y, z, t)$, c'est-à-dire un environnement mouvant qui exerce sur un solide situé au point (x, y, z) à l'instant t la force $\vec{F}(x, y, z, t)$[4]

Presque toute la physique qui gouverne notre vie quotidienne découle de la loi (2), à ceci près qu'il faut être capable de déterminer la force qu'un environnement exerce sur un solide ou plus généralement le champ de forces qu'il détermine sur un solide donné[5].

Dans ses travaux, Newton a étudié en détail l'une des manières dont des corps peuvent exercer des forces les uns sur les autres, à savoir l'interaction gravitationnelle. Il a déterminé la force gravitationnelle qu'exercent l'un sur l'autre deux corps massifs, en fonction de leur masse[6] et de la distance qui les sépare. L'importance de cette force gravitationnelle dans notre vie quotidienne est énorme, mais presque pour une unique raison, qui est que tout ce qui nous entoure est attiré par l'objet extrêmement massif sur lequel nous vivons, la Terre. Il faut ajouter à cela les phénomènes astronomiques comme l'alternance du jour et de la nuit, les saisons, les phases de lune, les marées. Depuis que la conquête spatiale a pris son essor, d'autres aspects de notre vie dépendent aussi indirectement de la gravitation, en l'occurence ceux qui sont liés à la présence de satellites artificiels en orbite autour de la Terre. Cependant, aucune des interactions entre les objets qui nous entourent autres que la Terre n'est de nature gravitationnelle.

L'autre interaction qui joue un très grand rôle dans notre environnement est l'interaction électromagnétique. À la différence de l'interaction gravitationnelle, elle peut être attractive ou répulsive et certains constituants de la matière, comme les neutrons, n'y sont pas soumis. Mais surtout, elle engendre des forces dont l'intensité est de l'ordre de un milliard de milliards de milliards de milliards de fois plus grande que celle des forces gravitationnelles. Nous allons examiner comment depuis la deuxième moitié du XIXᵉ siècle on décrit cette interaction. Nous verrons comment cela conduit à adopter d'autres représentations mathématiques que les vecteurs et, d'un point de vue plus fondamental, comment l'électromagnétisme a ouvert la voie à un des deux bouleversement majeurs de la physique du XXᵉ siècle.

[4]Cette formulation pourrait laisser penser que le champ de forces est indépendant du solide qui y est soumis. C'est inexact dans la mesure où des solides différents placés dans des environnements identiques peuvent tout à fait subir des forces différentes. Par exemple, un clou et un bout de bois placés successivement au même endroit à proximité d'un aimant ne subissent pas la même force.

[5]Ceci est toutefois de moins en moins vrai, tant l'importance de la physique quantique ne cesse d'augmenter dans notre vie de tous les jours : informatique, télécommunications, médecine...

[6]Il s'agit ici de la *masse gravitationnelle* des corps, qui est a priori distincte de leur masse inertielle, que nous avons rencontrée plus haut. Le fait que les masses inertielles et gravitationnelles soit identiques (ce qui signifie qu'un corps est plus difficile à mettre en mouvement qu'un autre dans l'exacte proportion où il est plus sensible à l'interaction gravitationnelle) est l'un des fondements de la théorie de la relativité générale.

1.2 Champ électrique, magnétique et équations de Maxwell

Du point de vue de l'électromagnétisme, la matière est soit neutre (c'est le cas des neutrons, constituants du noyau des atomes), soit chargée positivement (comme le sont les protons, autres constituants du noyau atomique), soit chargée négativement (comme le sont les électrons, qui se déplacent autour du noyau).

La charge électrique d'une particule indique la façon dont elle elle est susceptible d'interagir avec d'autres particules par le biais de l'interaction électromagnétique, de même que sa masse (gravitationnelle, voir la note 6) indique la façon dont elle est susceptible de prendre part à une interaction gravitationnelle. La règle la plus élémentaire est que deux particules de même charge se repoussent alors que deux particules de charge opposée s'attirent[7].

À toute particule est donc attribuée une charge électrique, en général notée q, qui est l'exact analogue électromagnétique de sa masse, à ceci près que q peut être positive, négative, ou nulle. Pour décrire les interactions électromagnétiques, il faut commencer par choisir un repère de référence, par exemple un repère attaché aux murs de la pièce où on se trouve. Toues les positions, vitesses, accélérations seront mesurées dans ce repère, ou référentiel. La description classique de l'électromagnétisme, synthétisée par les équations de Maxwell, formulées alentour 1865, a en effet ceci de particulier qu'elle distingue l'interaction d'une particule chargée avec d'autres particules selon que celles-ci sont au repos ou en mouvement.

Avant de commenter plus ce point, il faut préciser que nous allons étudier l'influence subie par une particule chargée qui évolue dans un environnement *qu'elle ne modifie pas par sa présence*. Cette hypothèse est irréaliste, d'après le principe élémentaire d'action-réaction, mais nécessaire dans un premier temps pour permettre d'élaborer un formalisme efficace. Une fois ce formalisme établi, il est facile en principe (sinon en fait vu la complexité des calculs) de tenir compte de l'interaction de toutes les particules en présence.

L'environnement que nous considérons est donc constitué de matière chargée répartie dans l'espace, d'une façon qui peut évoluer au cours du temps. Nous voulons prédire quelle force cet environnement exercera sur une particule de charge donnée q placée à un instant t à la position $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$. Pour décrire la répartition de la charge électrique dans l'espace, nous allons définir deux quantités, l'une scalaire[8], que nous noterons ρ et qui s'appelle la *densité de charge*, l'autre vectorielle, que nous noterons $\vec{j}$ et qui s'appelle *densité de courant*.

La densité de charge $\rho(x, y, z, t)$ à l'instant t et au point (x, y, z) peut être définie comme le quotient de la somme des charges des particules situées à l'instant t dans un très petit cube autour du point (x, y, z) par le volume de ce

[7] Le choix des signes $+$ et $-$ est tout-à-fait arbitraire. En revanche, si deux particules de même charge s'attiraient et deux particules de charges opposées se repoussaient, le monde serait bien différent. Il tendrait à s'y former un amas de toute la matière chargée positivement et un amas de la matière chargée négativement, les deux s'éloignant l'un de l'autre. Le fait qu'une charge positive et une charge négative égales s'attirent tend à les réunir, ce qui permet à leurs effets de presque se compenser lorsqu'on en est assez loin pour ne plus distinguer leurs positions. Grâce à cet effet, la matière qui nous entoure est neutre à l'échelle macroscopique. Lorsqu'elle cesse temporairement de l'être, par exemple par temps d'orage, les conséquences peuvent être spectaculaires.

[8] *Scalaire* s'oppose à *vectorielle*. Une grandeur scalaire est caractérisée en chaque point de l'espace par un seul nombre réel.

petit cube. C'est l'analogue électrique de la masse volumique dont le maniement nous est peut-être plus familier.

La densité de courant décrit le mouvement de la matière chargée. Par exemple, la première composante de $\vec{j}(x, y, z, t)$, que nous noterons $j_x(x, y, z, t)$ est égale au rapport de la somme des charges qui traversent une très petite surface carrée perpendiculaire à l'axe Ox pendant une unité de temps par l'aire de cette petite surface. Il faut ici préciser ce qu'on entend par “traverser”. En effet, on compte positivement les charges positives qui traversent la petite surface dans le sens des x croissants, négativement les charges positives qui passent dans le sens des x décroissants, et vice-versa pour les charges négatives.

Les densités de charge et de courant sont liées, mais pas aussi simplement qu'on pourrait le croire. Il est par exemple possible que la densité de courant soit non nulle alors que la densité de charge n'évolue pas au cours du temps. Pour prendre une analogie hydraulique, il est possible qu'un fluide soit animé d'un mouvement sans pour autant que l'espace qu'il occupe soit modifié, par exemple lorsque de l'eau coule régulièrement d'un robinet. Le pendant électrique de cet exemple serait celui d'un barre cylindrique extrêmement longue et chargée uniformément qui se déplacerait parallèlement à son axe.

À partir des densités de charge et de courant, les équations de Maxwell déterminent deux champs de vecteurs, notés $\vec{E}$ et $\vec{B}$, qu'on appelle respectivement champs électrique et magnétique. Le champ électrique rend compte d'une interaction qu'on qualifie parfois d'électrostatique pour insister sur le fait qu'elle ne dépend pas du fait que la charge soit en mouvement ou au repos. En simplifiant, on peut dire que c'est elle qui est responsable du fait que des charges de signe opposés s'attirent et des charges de même signe se repoussent. Le champ magnétique, en revanche, rend compte d'une interaction qui n'a lieu qu'entre paires de particules animées d'un mouvement. Si l'une de deux particules est au repos, il n'y a pas d'interaction magnétique entre elles.

Il est temps d'indiquer à quelle force est soumise une particule de charge q située en un point de l'espace où l'environnement crée un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$. Cette force dépend, comme nous l'avons suggéré, de la vitesse $\vec{v}$ dont est animée cette particule. Elle est donnée par la loi de Lorentz :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}). \tag{3}$$

Définition 1.1 *Le signe $\wedge$ qui apparaît dans cette équation désigne le produit vectoriel de deux vecteurs. Si $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ et $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ sont deux vecteurs, leur produit vectoriel est défini par*

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}.$$

Géométriquement, $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est l'unique vecteur perpendiculaire à la fois à $\vec{a}$ et $\vec{b}$, de longueur égale à l'aire du parallélogramme formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et tel que le trièdre $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b})$ soit direct.

On constate en particulier sur la définition ci-dessus que, si l'un de deux vecteurs est nul, alors leur produit vectoriel est nul. Ainsi, si la vitesse d'une particule est nulle, la force électromagnétique qui s'exerce sur elle ne dépend pas du champ magnétique.

Il y a cependant quelque chose de très curieux dans cette description de l'électromagnétisme. En effet, le fait que deux particules soient ou non en mouvement dépend du référentiel qu'on choisit pour faire les calculs. Si deux particules sont animées de mouvements parallèles, comme deux voyageurs assis dans un meme train, elles sont, suivant le référentiel qu'on considère, soit toutes deux au repos, soit toutes deux en mouvement. Dans le second cas, elles interagissent magnétiquement, mais pas dans le premier. Ceci nous suggère que la séparation des interactions électromagnétiques en interactions électrostatique et magnétique est plus floue qu'il n'y paraissait au premier abord. Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ne traduisent pas deux classes de phénomènes bien distinctes, mais plutôt deux aspects intimement mêlés d'une seule réalité. C'est ce point que nous allons développer dans ce qui suit. Par ailleurs, nous reviendrons sur l'importance des changements de référentiel et quelques conséquences surprenantes du principe de relativité qu'avait formulé Galilée au XVII$^{\text{e}}$ siècle.

Pour finir ce paragraphe déjà long, nous allons énoncer les équations de Maxwell[9], qui permettent de calculer les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ connaissant les densités de charge ρ et de courant $\vec{j}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \rho && (4) \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} && (5) \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 && (6) \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} && (7) \end{aligned}$$

La simple écriture de ces équations appelle plusieurs remarques. Tout d'abord, il nous faut définir les opérateurs div et $\overrightarrow{\operatorname{rot}}$, qu'on appelle respectivement *divergence* et *rotationnel*.

Définition 1.2 (Divergence) *Soit $\vec{A}(x,y,z)$ un champ de vecteurs, c'est-à-dire la donnée d'un vecteur en chaque point de l'espace. Alors la divergence de $\vec{A}$, notée* div $\vec{A}$ *est le champ scalaire, c'est-à-dire la fonction définie par la relation*

$$\operatorname{div} \vec{A}(x,y,z) = \frac{\partial A_x}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial A_y}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial A_z}{\partial z}(x,y,z). \qquad (8)$$

Un bon moyen de se faire une idée de ce qu'est la divergence de $\vec{A}$ est d'imaginer un banc de petits poissons qui, quand ils se trouvent en un point (x,y,z), nagent avec la vitesse $\vec{A}(x,y,z)$. Si nous suivons la trajectoire d'un poisson en particulier, nous verrons sa vitesse changer au cours du temps : à chaque fois

[9] Nous allons le faire sans y inclure les constantes ϵ_0 et μ_0 qui y apparaissent usuellement. Nous nous intéresserons en effet plus à la structure de ces équations, qui reste inchangée lorsqu'on enlève ces constantes, qu'à leurs solutions explicites. Nous ne faisons en fait pas d'entorse à la physique en oubliant ces constantes, car il est possible de choisir un système d'unités de mesure tel qu'elles soient toutes deux égales à 1.

qu'il se trouve en un endroit, il adopte comme vitesse la valeur du champ $\vec{A}$ en cet endroit. Ce faisant, il se déplace légèrement, et doit, d'après l'unique règle à laquelle il est soumis, prendre pour vitesse la valeur de $\vec{A}$ au nouveau point où il se trouve, légèrement différente de la précédente. On dit que le mouvement individuel d'un poisson dans ces conditions est une courbe intégrale *du champ $\vec{A}$.*

Si nous observons maintenant le banc d'une façon plus globale, nous constatons que la densité des poissons, leur nombre par unité de volume, n'est pas constant. Ils ont tendance à se concentrer à certains endroits, et en revanche d'autres endroits ont tendance à être désertés. La divergence de $\vec{A}$ est exactement la quantité qui mesure cette tendance : les poissons se concentrent aux endroits où la divergence de $\vec{A}$ est négative et désertent les endroits où elle est positive. Là où la divergence de $\vec{A}$ est nulle, la densité des poissons reste constante.

Cet exemple a bien entendu ses limites, et il est probable que si vous essayez de le pousser un peu dans ses retranchements, vous aboutirez à une absurdité. Voici un autre moyen, moins imagé mais moins hasardeux, de vous faire une idée de ce qu'est la divergence : un exemple très simple d'un champ dont la divergence n'est pas nulle, et même constante. Considérez $\vec{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Alors, la définition de la divergence vous permet aisément de vérifier que $\operatorname{div} \vec{A} = 3$ *en tout point. Si vous considérez $\vec{B} = -\vec{A}$, vous trouverez que* $\operatorname{div} \vec{B} = -3$ *en tout point.*

Enfin, si le champ $\vec{A}$ est constant, c'est-à-dire le même en tout point, sa divergence est bien entendu nulle. Un autre exemple, moins simple, de champ de divergence nulle est le suivant :

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Remarquez que ce champ n'est pas défini au point $(0, 0, 0)$.

Définition 1.3 (Rotationnel) *Soit $\vec{A}(x, y, z)$ un champ de vecteurs, c'est-à-dire la donnée d'un vecteur en chaque point de l'espace. Alors le* rotationnel *de $\vec{A}$, noté* $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{A}$ *est le champ de vecteurs défini par la relation*

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Reprenons l'exemple du banc de poissons que nous avons utilisé pour comprendre la divergence. Comme son nom l'indique, le rotationnel de $\vec{A}$ a quelque chose à voir avec une rotation. En effet, il exprime dans quelle mesure, lorsqu'on regarde un assez petit secteur du banc de poissons, celui-ci tourne au cours du temps. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{A}$ *en un point est dirigé selon l'axe de la rotation que subit le banc de poissons en ce point au cours de son mouvement, et il est de longueur proportionnelle à la vitesse de cette rotation.*

Ici encore, un exemple est sans doute un moyen plus sûr de se représenter le rotationnel d'un champ. Si $\vec{A}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$*, alors* $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ *en tout point de l'espace.*

Revenons maintenant aux équations de Maxwell. Deux choses apparaissent lorsqu'on les observe. Tout d'abord, il semble y avoir une certaine symétrie entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$. Par exemple, dans le vide, c'est-à-dire lorsque $\rho = 0$ et $\vec{j} = 0$, les équations restent presque les mêmes, à un signe près, si l'on échange $\vec{E}$ et $\vec{B}$. Nous allons voir qu'il est possible d'exploiter cette quasi-symétrie pour réécrire les équations de façon beaucoup plus concise.

La deuxième remarque que l'on peut faire est que les quatre équations ne sont pas de même nature. Les équations (5) et (6) ne font pas intervenir la distribution de la charge électrique dans l'espace, elles expriment des relations structurelles entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$. En revanche, les équations (4) et (7) sont celles où intervient explicitement l'environnement. Nous retrouverons bientôt cette séparation en deux fois deux équations.

Notre objectif dans ce qui suit est de montrer qu'il est possible d'exprimer les équations de Maxwell sous une forme bien plus condensée que la forme traditionnelle, et qu'on gagne beaucoup à le faire. Pour cela, nous allons commencer par nous interroger sur la nature géométrique des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

1.3 Un problème de symétrie

Certains d'entre vous se souviennent peut-être de la curieuse tradition qui consiste à écrire le champ magnétique avec une flèche courbe au-dessus de la lettre B. On dit en général que $\vec{B}$ n'est pas vraiment un vecteur, mais plutôt un *pseudo-vecteur*. Nous allons essayer de découvrir ce que cela signifie.

Une des expériences fondamentales de magnétisme consiste à faire circuler un courant continu dans une bobine de fil conducteur et d'observer par différents moyens le champ magnétique que cela produit. Pour représenter le champ magnétique de façon graphique, on peut dessiner sa valeur en plusieurs points et ses *lignes de champ*, c'est-à-dire les courbes qui ont la propriété d'être tangentes en tout point au vecteur $\vec{B}$. Ceci n'est qu'une représentation partielle, il n'est de toute façon pas possible de dessiner complètement un champ de vecteurs. Le résultat de cette expérience est représenté à la figure 1.

Nous allons maintenant comparer cette première expérience à une seconde, où nous remplaçons notre bobine par son image dans un miroir. Cela signifie que nous allons placer un miroir à côté de la table où nous avons réalisé la première expérience, et réaliser sur la table à côté le montage que nous voyons dans le miroir. Si l'axe de la bobine est parallèle au plan du miroir, cela revient à prendre une bobine semblable, mais parcourue par un courant en sens inverse (voir fig. 2).

Or, ce nouveau montage produit un nouveau champ magnétique que nous pouvons comparer avec l'image dans le miroir du champ magnétique produit par le premier montage. *Ce ne sont pas les mêmes.* Plus précisément, le champ

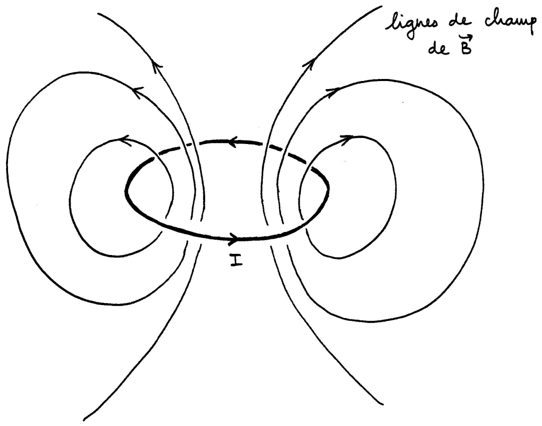

FIG. 1 –

réel observé dans le second montage est *l'opposé* de l'image dans le miroir du champ produit par le premier montage.

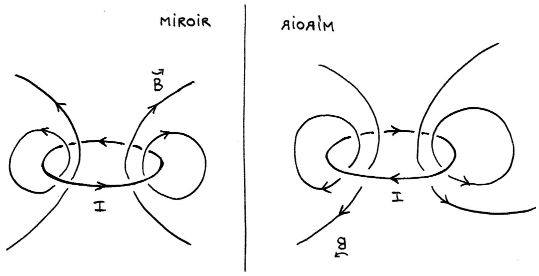

FIG. 2 –

Autrement dit, quand on transforme la distribution des charges et des courants dans l'espace selon une certaine règle (par exemple une symétrie), le champ magnétique ne se transforme pas comme un vecteur devrait le faire, selon cette même règle.

Qu'en est-il du champ électrique ? Pour le savoir, faisons une expérience analogue. Entre deux grandes plaques conductrices planes placées en vis-à-vis et reliées aux deux bornes d'une pile, s'établit un champ électrique, à peu près orthogonal aux plaques (voir fig. 3).

Nous allons transformer cette expérience non par une symétrie mais par une dilatation de tout l'espace. Reproduisons cette expérience en prenant un montage exactement deux fois plus gros, en particulier des plaques deux fois plus grandes et deux fois plus écartées. Alors, le nouveau champ électrique, au lieu d'être deux fois plus grand que l'ancien, est *deux fois plus petit* ! (voir fig. 4)

Quels sont ces objets curieux qui rapetissent lorsqu'on applique à l'espace entier une dilatation ? Ou qui voient leur tête et leurs pieds inversés lorsqu'ils se regardent dans un miroir ?

Nous allons voir au paragraphe suivant que ce sont des *formes différentielles*. Avant de rentrer dans les détails, examinons un instant encore le cas du champ électrique.

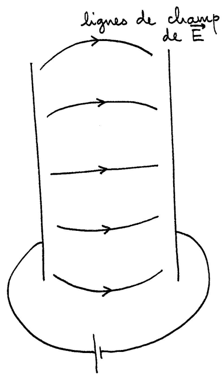

FIG. 3 –

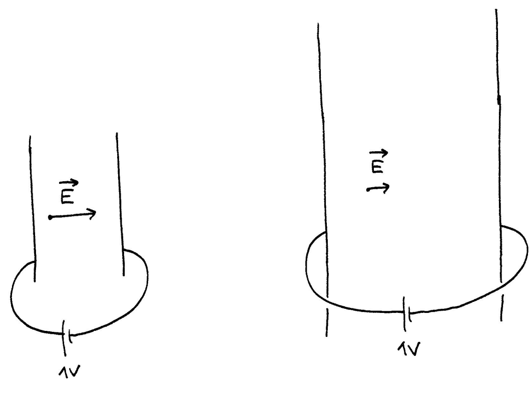

FIG. 4 –

Supposons que dans la première expérience (fig. 3) nous dessinions un vecteur $\vec{v}$ en un certain point (x, y, z) de l'espace. Le champ électrique qui règne en ce point est $\vec{E}(x, y, z)$. L'image de $\vec{v}$ dans la seconde expérience est le vecteur $\vec{v}_{dil} = 2\vec{v}$, situé au point $(2x, 2y, 2z)$, où il règne maintenant un champ électrique $\vec{E}_{dil}(2x, 2y, 2z) = \frac{1}{2}\vec{E}(x, y, z)$. Si nous faisons le produit scalaire de $\vec{v}_{dil} \cdot \vec{E}_{dil}$ au point où se trouve $\vec{v}_{dil}$, c'est-à-dire en $(2x, 2y, 2z)$, on trouve exactement $\vec{v} \cdot \vec{E}(x, y, z)$. (voir fig. 5)

L'opération qui est préservée par la dilatation est donc celle qui consiste à prendre en n'importe quel point de l'espace le produit scalaire du "champ électrique" avec un vecteur de notre choix, mais qui se transforme normalement sous l'effet de la dilatation, c'est-à-dire en étant lui aussi dilaté. Cette opération revient, comme nous allons maintenant le voir, à identifier $\vec{E}$ avec une 1-forme différentielle.

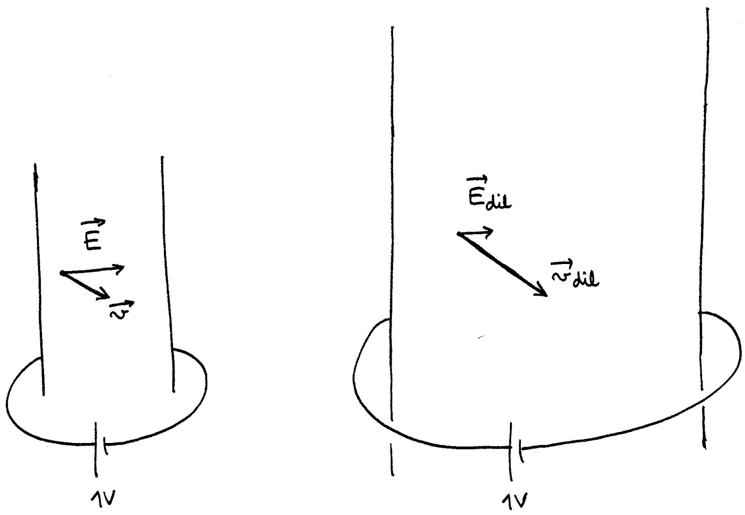

Fig. 5 –

2 Le bon modèle : les formes différentielles

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, la notion de vecteur modélise mal les phénomènes électromagnétiques, car les transformations de l'espace n'ont pas sur les vecteurs le même effet que celui constaté expérimentalement sur les champs électrique et magnétique.

Nous allons définir dans cette section les notions de forme linéaire, puis de forme linéaire alternée, et enfin de forme différentielle, ainsi que les outils adéquats qui vont nous permettre, dans la suite du texte d'une part de modéliser le champ électromagnétique d'une manière qui reflète sa symétrie réelle, et d'autre part d'exprimer les équations de Maxwell d'une manière plus élégante, au prix d'un saut d'abstraction.

Nous allons nous cantonner au cas de l'espace à 3 dimensions (espace usuel sans compter le temps) ou 4 dimensions (c'est à dire en ajoutant la dimension "temps" à l'espace usuel), en le munissant de son produit scalaire usuel et d'une orientation.

Cela dit, tout ce que nous dirons ici peut-être généralisé sans mal à une dimension (finie) quelconque.

2.1 Vecteurs et formes linéaires : la dualité

Dans ce paragraphe, nous nous exprimons d'emblée en dimension 4, mais tout ce que nous définissons est valable pour la dimension 3 (il suffit de ne pas considérer tout ce qui a rapport à "t"). Nous noterons toujours dans la suite du texte x, y et z les coordonnées spatiales et t la coordonnée temporelle.

Définition 2.1 *Une* forme linéaire f *sur* $\mathbb{R}^4$ *est une application linéaire de* $\mathbb{R}^4$ *dans* $\mathbb{R}$.

C'est à dire qu'elle vérifie pour tous $u, v \in \mathbb{R}^4$,

$$f(u+v) = f(u) + f(v)$$

et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $u \in \mathbb{R}^4$,

$$f(\lambda.u) = \lambda.f(u).$$

Exemple fondamental : l'application

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t, x, y, z) & \longmapsto & x \end{array} \right.$$

est une forme linéaire. Vérifiez !

Bien entendu, il en va de même en associant à un élément de $\mathbb{R}^4$ une autre de ses coordonnées.

Notation 2.2 *On note dx la forme linéaire vue ci-dessus, et dt, dy, dz les formes linéaires correspondant aux autres coordonnées.*

Ainsi, si l'on considère $u = (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$, on a $dt(u) = 1,\ dx(u) = 2,\ dy(u) = 3$ et $dz(u) = 4$.

Remarque 2.3 *Il est important de remarquer que cette notation dépend de la base qu'on a choisie au début. On dit que ces formes linéaires fondamentales ne sont pas* canoniques.

On peut alors prouver la proposition suivante, qui nous montre que l'exemple fondamental mérite bien ce qualificatif :

Propriété 2.4 *Si f est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^4$, alors il existe un unique quadruplet de réels (a, b, c, d) tel que, pour tout $u \in \mathbb{R}^4$, on a :*

$$f(u) = a.dt(u) + b.dx(u) + c.dy(u) + d.dz(u).$$

Ainsi, toutes les formes linéaires se déduisent de nos formes fondamentales.

Remarque 2.5 *En termes d'algèbre linéaire,* (dt, dx, dy, dz) *est donc une* base *de l'espace vectoriel des formes linéaires sur* $\mathbb{R}^4$*, on dit que c'est la* base duale *de la base canonique* (e_0, e_1, e_2, e_3) *de* $\mathbb{R}^4$*.*

On peut donc établir, grâce à la Propriété précédente, une correspondance, appelée *dualité*, entre les vecteurs (i.e. les éléments de $\mathbb{R}^4$) et les formes linéaires, puisqu'on peut associer à tout élément (a, b, c, d) de $\mathbb{R}^4$ la forme $a.dt + b.dx + c.dy + d.dz$, et réciproquement.

Ainsi, tout ce qui peut s'exprimer en termes de vecteurs peut s'exprimer en termes de formes linéaires. Nous allons constater que la géométrie des formes linéaires est plus adaptée que celle des vecteurs pour décrire le champ électrique.

2.2 Les formes linéaires et le champ électrique en un point donné

La manière dont nous avons modélisé jusque là le champ électrique en un point donné consistait à le représenter par un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Nous allons voir qu'il est préférable de le représenter par une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.

Rappelons-nous l'expérience décrite par les figures 3 et 4 : lorsqu'on *dilate l'espace d'un facteur* 2, le champ électrique en un point donné est *divisé* par 2.

Or « dilater l'espace $\mathbb{R}^3$ d'un facteur 2 », correspond, en termes mathématiques, à remplacer notre base initiale de $\mathbb{R}^3$ par la base formée par les doubles des vecteurs de cette base initiale. Que se passe-t-il au niveau des coordonnées si on fait ce changement de base ? Elles sont divisées par 2 !

Pour s'en convaincre, regardons ce qui se passe en dimension 1 : on a un seul vecteur de base $\vec{\imath}$, que l'on remplace par le vecteur $\vec{\jmath} = 2.\vec{\imath}$. Si l'on considère un vecteur $\vec{u}$ valant $a.\vec{\imath} = \frac{a}{2}.\vec{\jmath}$, alors dans la base $(\vec{\imath})$, sa coordonnée est a, alors que dans la base $(\vec{\jmath})$, sa nouvelle coordonnée sera donc $\frac{a}{2}$.

La conséquence pour les formes linéaires est donc que nos formes fondamentales dx, dy et dz sont toutes divisées par 2. En effet, considérons par exemple l'élément $\vec{u} = (1, 2, 3)$ de $\mathbb{R}^3$, ses coordonnées après dilatation seront $(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$. On aura alors (par exemple) $dy(\vec{u}) = 1$ dans la nouvelle base alors qu'il valait 2 dans l'ancienne.

Ainsi, les formes linéaires, dont on a vu la dualité avec les vecteurs, ont la faculté de représenter une grande vectorielle du point de vue du calcul, mais qui, géométriquement, correspond aux propriétés du champ électrique observées expérimentalement, résolvant donc le paradoxe observé dans le paragraphe **1.3**.

C'est pour cette raison que nous allons représenter le champ électrique en un point donné non pas par un vecteur $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ mais par une forme linéaire $E = E_x.dx + E_y.dy + E_Z.dz$.

Nous allons introduire une généralisation des formes linéaires qui va nous permettre d'exprimer le champ magnétique.

2.3 Les $k-$formes linéaires

Considérons notre espace E (égal à $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$) muni de son repère et de son orientation.

Définition 2.6 *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Une $k-$*forme linéaire *de E est une application $f : E^k \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, si $(u_1, \ldots, u_k) \in E^k$, $v \in E$, $i \in \mathbb{N}$et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{cases} f(u_1, \ldots, u_{i-1}, \mathbf{u_i} + \mathbf{v}, u_{i+1}, \ldots u_k) & = & f(u_1, \ldots, u_{i-1}, \mathbf{u_i}, u_{i+1}, \ldots u_k) \\ & + & f(u_1, \ldots, u_{i-1}, \mathbf{v}, u_{i+1}, \ldots u_k) \\ & & \\ et & & \\ & & \\ f(u_1, \ldots, u_{i-1}, \lambda.\mathbf{u_i}, u_{i+1}, \ldots u_k) & = & \lambda.f(u_1, \ldots, u_{i-1}, \mathbf{u_i}, u_{i+1}, \ldots u_k) \end{cases}$$

Exemples 2.7

(0) Les formes linéaires vues au paragraphe précédent sont bien entendu les $1-$formes linéaires.

(i) Le produit scalaire usuel de E est une $2-$forme linéaire.

(ii) Si $E = \mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^4$) le déterminant d'une famille de 3 (resp. 4) vecteurs est une $3-$forme linéaire (resp. une $4-$forme linéaire),

(iii) Soient ϕ et ψ deux formes linéaires. Notons $\phi \otimes \psi$ l'application

$$\begin{cases} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \longmapsto & \phi(u).\psi(v) \end{cases}$$

Alors $\phi \otimes \psi$ est une $2-$forme linéaire sur E.

Parmi les $k-$formes linéaires, celles qui nous intéresseront sont celles pour lesquelles on peut changer l'ordre des éléments sans trop changer le résultat.

Définition 2.8 *Soit f une $k-$forme linéaire.*

– *f est dite* symétrique *si, pour tous les les i et j tels que $i < j \leq k$, on a*

$$f(u_1, \ldots, u_{i-1}, \mathbf{u_j}, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, \mathbf{u_i}, u_{j+1}, \ldots, u_k) = f(u_1, \ldots, u_k)$$

– *f est dite* alternée *si, pour tous les i et j tels que $i < j \leq k$, on a*

$$f(u_1, \ldots, u_{i-1}, \mathbf{u_j}, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, \mathbf{u_i}, u_{j+1}, \ldots, u_k) = -f(u_1, \ldots, u_k)$$

Exemples 2.9 *Reprenons les exemples précédents :*

(0) Evidemment, toutes les $1-$ formes sont symétriques !

(i) Le produit scalaire est une $2-$forme symétrique.

(ii) Le déterminant est une forme alternée.

(iii) $\phi \otimes \psi$ n'est ni alternée ni symétrique, sauf ϕ ou ψ est nulle. En revanche $\phi \otimes \psi + \psi \otimes \phi$ est une $2-$forme symétrique et la forme $\phi \otimes \psi - \psi \otimes \phi$ notée $\phi \wedge \psi$, est une $2-$forme alternée.

A partir de maintenant, nous ne nous intéresserons qu'aux formes alternées.

2.4 Le produit extérieur

Le produit extérieur est le ciment qui permet de construire des $(p+k)-$forme alternée à partir d'une $k-$forme et d'une $p-$forme. Ce qui nous servira par la suite est qu'il permet de construire toute $k-$forme à partir de k $1-$formes linéaires.

Nous en donnons à titre indicatif une définition générale faisant appel à la notion de *groupe symétrique.* Si cet objet ne vous est pas familier, ne vous inquiétez pas ! Nous n'allons pas utiliser cette définition générale dans la suite du texte, et les cas particuliers utiles sont signalés peu après. Vous pouvez également consulter le texte *Introduction à la théorie des groupes, 1°partie* dans Culture*MATH* pour en savoir plus.

Définition-Propriété 2.10 *Soient ϕ une $k-$forme alternée et ψ une $p-$forme alternée. Définissons leur* produit extérieur *$\phi \wedge \psi$, qui est une $(k+p)-$forme linéaire :*

$$\phi \wedge \psi(u_1, \ldots, u_{k+p}) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k + p} \varepsilon(\sigma).\phi(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(k)}) \times \psi(u_{\sigma(k+1)}, \ldots, u_{\sigma(k+p)}).$$

où $\mathfrak{S}_k$ est le groupe des permutations de $\{1, \ldots, k\}$, et $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ.

$\phi \wedge \psi$ est alors une $(k+p)-$forme alternée.

Remarque 2.11 *Le symbole utilisé pour le produit extérieur est le même que celui utilisé traditionnellement pour le produit vectoriel. On peut montrer que ce dernier est en fait (à dualité près) un produit extérieur de $1-$formes. Le produit extérieur est une généralisation abstraite de cette notion adaptée uniquement à la dimension 3.*

Donnons quelques propriétés avant les exemples.

Propriétés 2.12 *On a :*
(i) $\phi \wedge \phi = 0$.

(ii) $\phi \wedge \psi = -\psi \wedge \phi$.

(iii) $(\phi_1 + \phi_2) \wedge \psi = \phi_1 \wedge \psi + \phi_2 \wedge \psi$.

(iv) *Si* $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda.\phi) \wedge \psi = \lambda.(\phi \wedge \psi)$.

(v) $(\phi \wedge \psi) \wedge \eta = \phi \wedge (\psi \wedge \eta)$ *(associativité).*

Cette dernière propriété permet de définir le produit extérieur d'un nombre quelconque de formes alternées. Par exemple, on peut vérifier que le produit extérieur de k $1-$formes $\phi_1, \dots \phi_k$ est :

$$\phi_1 \wedge \phi_2 \cdots \wedge \phi_k(u_1, \dots, u_k) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma).\phi_1(u_{\sigma(1)}) \times \phi_2(u_{\sigma(2)}) \times \cdots \times \phi_k(u_{\sigma(k)}).$$

Exemples 2.13 *Comme nous allons le voir juste après, ces exemples sont les seuls dont nous aurons besoin dans la suite du texte.*

Produit extérieur de 2 $1-$formes $\phi_1 \wedge \phi_2(u_1, u_2) = \phi_1(u_1).\phi_2(u_2) - \phi_1(u_2).\phi_2(u_2)$.

Produit extérieur de 3 $1-$formes $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3(u_1, u_2, u_3) = \phi_1(u_1).\phi_2(u_2).\phi(u_3) - \phi_1(u_2).\phi_2(u_1).\phi(u_3) + \phi_1(u_2).\phi_2(u_3).\phi(u_1) - \phi_1(u_1).\phi_2(u_3).\phi(u_2) + \phi_1(u_3).\phi_2(u_1).\phi(u_2) - \phi_1(u_3).\phi_2(u_2).\phi(u_1)$.

Dorénavant nous nous intéresserons essentiellement aux produits de 2 ou de 3 $1-$formes.

Pourquoi une telle restriction ? la propriété suivante va nous montrer qu'en fait on obtient *toutes* les formes alternées par produits extérieur de $1-$formes.

Propriété 2.14 *Toute $k-$forme alternée peut s'écrire* de manière unique *comme combinaison linéaire de produits extérieurs de k $1-$formes fondamentales.*

Exemples 2.15

(i) Dans $\mathbb{R}^3$, toutes les $3-$formes sont proportionnelles à $dx \wedge dy \wedge dz$.

D'une manière générale soient ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 des $1-$formes, telles que $\phi_i = a_i.dx + b_i.dy + c_i.dz$, alors, en utilisant les **Propriétés 2.12**, on peut vérifier (faites-le !) que

$$\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3 = (a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3 + b_1c_2a_3 - b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3).dx \wedge dy \wedge dz.$$

(ii) Dans $\mathbb{R}^4$, toute $2-$forme alternée F est de la forme $F_x.dy \wedge dz + F_y.dz \wedge dx + F_z.dx \wedge dy$ où F_x, F_y et F_z sont des réels.

Ainsi, dans $\mathbb{R}^3$ on peut constater une correspondance entre vecteurs et $2-$formes alternées :

$$(F_x, F_y, F_z) \leftrightarrow F_x.dy \wedge dz + F_y.dz \wedge dx + F_z.dx \wedge dy$$

Nous nous en servirons dans le paragraphe prochain.

(iii) Dans $\mathbb{R}^4$, une $3-$forme alternée F s'écrit sous la forme

$$F = F_t.dx \wedge dy \wedge dz + F_x.dy \wedge dz \wedge dt + F_y.dz \wedge dt \wedge dx + F_z.dt \wedge dx \wedge dy.$$

où F_t, F_x, F_y et F_z sont des réels.

(iv) Dans $\mathbb{R}^4$, toute $2-$forme alternée F s'écrit sous la forme

$$F_{y,z}.dy \wedge dz + F_{z,x}.dz \wedge dx + F_{x,y}.dx \wedge dy + F_{t,z}.dt \wedge dz + F_{t,x}.dt \wedge dx + F_{t,y}.dt \wedge dy$$

Remarque 2.16 *D'une manière générale, on peut constater que la proposition précédente nous permet de déterminer la* dimension *de l'espace des $k-$formes alternées sur $\mathbb{R}^n$. Une base de cette espace est en effet formée par les différents choix possibles de k 1-formes parmi les n possibilités, la dimension est donc C_n^k, ce qu'on peut vérifier sur les exemples.*

2.5 Les $2-$formes linéaires alternées et le champ magnétique en un point donné

Comme nous l'avons vu précédemment, l'image dans un miroir d'un champ magnétique en un point est l'opposé de celle qu'on s'attend à voir lorsqu'on modélise le phénomène par un vecteur $\vec{B}$.

Or, que signifie mathématiquement le fait de « faire une expérience dans un miroir » ? Cela signifie tout simplement de faire subir une *symétrie planaire (ou réflexion)* à l'espace.

Si notre repère orthonormé direct est $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, considérons que le miroir de l'expérience de la figure 2 est le plan $(O, \vec{\jmath}, \vec{k})$, et que la bobine est située dans le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, avec un courant tournant dans le sens positif. Alors, suivant les lois usuelles, le champ magnétique sera $||B||.\vec{k}$.

En revanche, si on effectue la réflexion par rapport à $(O, \vec{\jmath}, \vec{k})$, la bobine est toujours dans le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, mais le courant tourne cette fois dans le sens négatif et le champ magnétique sera $-||B||.\vec{k}$.

Or le vecteur $\vec{k}$ étant parallèle au plan, son image par la réflexion est lui-même, ce qui nous montre que modéliser le champ magnétique par des vecteurs est insuffisant.

Ainsi, pour bien modéliser le champ magnétique, il faudrait un objet mathématique qui ressemble à un vecteur de $\mathbb{R}^3$ colinéaire à $\vec{k}$, mais qui se transforme en son opposé lorsqu'on effectue la symétrie par rapport à $(O, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On va voir que le bon objet est la $2-$forme alternée.

Comme on l'a vu dans l'exemple 2.15 *(ii)*, il y a une correspondance entre un vecteur $B_z.\vec{k}$ de $\mathbb{R}^3$ et la $2-$forme $B = B_z.dx \wedge dy$.

Que se passe-t-il lorsque l'on fait la réflexion par rapport au plan $(O, \vec{\jmath}, \vec{k})$? Cela correspond simplement à remplacer notre repère par le repère $(O, -\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Dans ce nouveau repère, si on note x', y', et z' les coordonnées, on va avoir

$$dx' = -dx, dy' = dy \text{ } et \text{ } dz' = dz$$

notre $2-$forme B est alors transformée en

$$B' = B_z.dx' \wedge dy' = -B_z.dx \wedge dy = -B$$

On a donc bien l'effet voulu, sans perdre pour autant la correspondance avec la notation vectoriel antérieure.

Ce que nous venons de montrer sur un exemple particulier est en fait valable pour toutes les réflexions et toutes les $2-$formes alternées (on peut le montrer par le calcul). C'est pourquoi la science moderne modélise le champ magnétique en un point de l'espace par une $2-$forme alternée $B = B_x.dy \wedge dz + B_y.dz \wedge dx + B_z.dx \wedge dy$ et non plus par un vecteur $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$.

2.6 Champs électrique et magnétique dans l'espace entier : formes différentielles

Tout ce que nous avons vu jusqu'ici concerne les champs électrique et magnétique *en un point.* Or les objets que nous étudions sont intéressants à étudier dans l'espace entier (ou une portion d'espace).

En effet, il est clair que les champs électrique et magnétique engendrés par un phénomène dépendent de l'endroit où ils sont mesurés, à l'instar, par exemple de la vitesse en un point d'un fluide. Pour modéliser ce dernier exemple, on a recours aux *champs de vecteurs* : en chaque point de l'espace, on associe un vecteur, d'une manière *suffisamment régulière* (continue, différenriable, analytique...)

Nous allons donc naturellement faire de même

Définition 2.17 *une $k-$*forme différentielle *de l'espace est une application (continue, différentiable, analytique,...) qui à tout point associe une $k-$forme alternée.*

Dans la pratique, une $1-$forme différentielle E sur $\mathbb{R}^3$ est donc la donnée de 3 fonctions de R^3 dans $\mathbb{R}$ B_x, B_y et B_z. E associe alors au point $M \in \mathbb{R}^3$ la $1-$forme :

$$E(M) = B_x(M).dx + B_y(M).dy + B_z(M).dz.$$

Nous laissons au lecteur le soin de voir ce que cela donne pour une $2-$forme.

Ainsi, le champ électrique *dans l'espace entier (ou une portion de l'espace)* sera modélisé par une $1-$forme différentielle, et le champ magnétique par une $2-$forme différentielle.

Notation 2.18 *Jusqu'ici on n'a parlé que de $k-$formes avec $k \geq 1$. Désormais, nous parlerons de $0-$forme pour désigner simplement les appications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. De plus, on étend le produit extérieur de la manière la plus simple possible : si f est une $0-$forme différentielle et ϕ une $k-$forme différentielle, alors $f \wedge \phi := f \times \phi$.*

Cette notation nous servira, dans le prochain paragraphe, à éviter des cas particuliers inutiles.

Pour finir avec cette section, nous allons présenter dans les deux paragraphes suivants deux outils dont nous allons nous servir pour réexprimer les équations de Maxwell en termes de formes différentielles.

2.7 La différentielle extérieure

L'emploi du terme « forme différentielle » peut sembler étrange dans un contexte ou l'on a essentiellement fait de l'algèbre, et un peu de géométrie.En fait, il est très naturel. Rappelons ce qu'est la différentielle d'une fonstion à plusieurs variables.

Définition 2.19 *Soit* f *une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On dit qu'elle est* différentiable *en $a \in \mathbb{R}^3$ s'il existe une $1-$forme notée df_a telle que*

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + ||h||.\epsilon(h)$$

telle $\epsilon(h)$ est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et tend vers 0 quand h tend vers 0.

df_a est alors appelée différentielle *de f en a.*

Nous n'utiliserons par la suite cette notion que pour $n = 3$ ou 4

Remarque 2.20 *Cette définition est bien entendu une généralisation de la notion de dérivée d'une fonction à une seule variable, ou plus précisément de* développement limité *à l'ordre 1.*

Comme on l'a déjà vu, df_a est forcément combinaison linéaire des formes fondamentales dx, dy et dz. La proposition suivante fait le lien entre ce fait et la remarque précédente.

Propriété 2.21 *Si f est une fonction différentiable en a, alors*

$$df_a = \frac{\partial f}{\partial x}(a).dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a).dy + \frac{\partial f}{\partial z}(a).dz$$

La notation $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ désignant la dérivée partielle de f par rapport à la variable x (c'est à dire qu'on calcule la dérivée en une seule variable x, considérant les autres variables comme des constantes).

Exemples 2.22

(0) Une application linéaire est différentiable et est sa propredifférentielle.

(1) $f(x, y, z) = xyz^2$. Les dérivées partielles de f sont

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz^2,\ \frac{\partial f}{\partial y} = xz^2 \ et\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2xyz.$$

En $a = (1, 2, 3)$, sa différentielle est alors $df_a = 18.dx + 9.dy + 12.dz$.

(ii) La fonction précédente est-elle différentiable en 0 ?

On a donc un opérateur d qui, à partir d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ fabrique une $1-$forme différentielle (puisque la différentielle dépend du point où elle est calculée).

On peut en fait généraliser ceci en un opérateur d qui, à partir d'une $k-$forme différentielle, fabrique une $(k+1)-$forme différentielle.

Plutôt que d'en donner une définition abstraite et indépendante des coordonnées (ce qui est possible mais hors du propos de ce texte), nous allons donner deux règles de calcul, et des exemples.

Règle n°1 Si ϕ est une $k-$forme différentielle ($k \geq 0$), alors

$$d(d\phi) = 0.$$

Règle n°2 Si ϕ_1 est une $k-$forme différentielle ($k \geq 0$) et ϕ_2 est une forme différentielle (quelque soit son degré), alors

$$d(\phi_1 \wedge \phi_2) = d\phi_1 \wedge \phi_2 + (-1)^k.\phi_1 \wedge d\phi_2.$$

Exemples 2.23

(0) $ddx = 0$.

(i) $d(dx \wedge dy) = 0 + 0 = 0$.

(ii) Considérons la $1-$forme différentielle $F(x, y, z, t).dx$ sur $\mathbb{R}^4$, on a alors :

$$\begin{aligned} d\left(F(x, y, z,).dx\right) &= \left[\tfrac{\partial F}{\partial x}.dx + \tfrac{\partial F}{\partial y}.dy + \tfrac{\partial F}{\partial z}.dz + \tfrac{\partial F}{\partial t}.dt\right] \wedge dx + 0 \\ &= 0 + \tfrac{\partial F}{\partial y}.dy \wedge dx + \tfrac{\partial F}{\partial z}.dz \wedge dx + \tfrac{\partial F}{\partial t}.dt \wedge dx \end{aligned}$$

(iii) Considérons la $1-$forme différentielle $E = E_x.dx + E_y.dy + E_z.dz$ et le champ de vecteurs $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ (ce sont les mêmes fonctions coordonnées). On a alors (vérifiez !) :

$$\begin{aligned} dE &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right).dy \wedge dz + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right).dz \wedge dx + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right).dx \wedge dy \\ &= (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{E})_x.dy \wedge dz + (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{E})_y.dz \wedge dy + (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{E})_z.dz \wedge dx. \end{aligned}$$

Où $(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{E})_x$, $(Rot\ \vec{E})_y$ et $(Rot\ \vec{E})_z$ sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{E}$.

(iv) Soient la $2-$forme différentielle $B = B_x.dy \wedge dz + B_y.dz \wedge dx + B_z.dx \wedge dy$ et le champ de vecteurs $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$. On a alors (faites le calcul !)

$$dB = div(\vec{B}).dx \wedge dy \wedge dz.$$

Ces deux derniers exemples vont nous servir dans la section **3** pour exprimer les équations de Maxwell dans le langage des formes différentielles.

2.8 Opérateur de Hodge

Considérons $\mathbb{R}^4$ orienté et muni de son produit scalaire usuel. Soit (e_0, e_1, e_2, e_3) sa base canonique et soit (dt, dx, dy, dz) la base duale correspondante. L'opérateur de Hodge, noté provisoirement $*_R$, établit, pour chaque $k = 0, 1, 2$, une correspondance bijective linéaire entre k-formes alternées et $4-k$-formes alternées sur $\mathbb{R}^4$. Insistons sur le fait que cet opérateur dépend du produit scalaire que nous considérons sur $\mathbb{R}^4$.

Puisque c'est un opérateur linéaire, il suffit de le définir sur une base de l'espace des formes alternées. Plutôt qu'une définition formelle, nous allons expliquer un algorithme très simple qui permet de calculer l'image d'une forme par cet opérateur.

Calculons par exemple $*_R(dx \wedge dz)$. Pour cela, écrivons dt, dx, dy, dz dans cet ordre, qui correspond à une orientation positive de $\mathbb{R}^4$. Faisons alors venir dx et dz tout à gauche de l'expression, en comptant un signe moins à chaque fois que nous permutons deux symboles. Ceci nous donne successivement :

$$\begin{array}{cc} & dt\ dx\ dy\ dz \\ (-) & dx\ dt\ dy\ dz \\ & dx\ dt\ dz\ dy \\ (-) & dx\ dz\ dt\ dy \end{array}$$

Nous avons effectué trois permutations et le signe est $-$. Nous lisons alors $*_R(dx \wedge dz)$ à droite de $dx\ dz$ dans la dernière ligne, avec le signe que nous avons trouvé : c'est $-dt \wedge dy$.

Pour vous entraîner, vous pouvez vérifier que, $*_R(dt \wedge dy) = -dx \wedge dz$, $*_R dx = -dt \wedge dy \wedge dz$, $*_R 1 = dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz$.

Remplaçons maintenant le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^4$ par la *forme quadratique* $-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$. Il peut être utile de penser à cette forme quadratique comme à une façon inhabituelle de mesurer les longueurs.

En effet, le carré de la distance usuelle dans $\mathbb{R}^4$ s'exprime naturellement sous la forme $dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ (c'est le théorème de Pythagore, généralisé à la dimension 4).

Avec la nouvelle "distance" que nous proposons, certaines longueurs peuvent être négatives, ou encore il peut arriver que la longueur d'un vecteur soit nulle alors que ce vecteur n'est pas nul. Comme nous l'avons annoncé au début de ce paragraphe, considérer ce nouveau "produit scalaire" modifie l'opérateur de Hodge. Fort heureusement, le nouvel opérateur, que nous noterons simplement $*$, se déduit très simplement de l'opérateur $*_R$ que nous venons d'apprendre à calculer. En effet, il suffit d'ajouter un signe moins à chaque fois que l'on calcule l'image d'une forme où dt intervient. Par exemple, on a maintenant $*(dt \wedge dy) = dx \wedge dz$, mais on a toujours $*dx = -dt \wedge dy \wedge dz$.

Nous avons désormais réuni suffisamment d'outils pour réécrire les équations de Maxwell en termes de formes différentielles.

3 Equations de Maxwell « modernes »

3.1 Une formulation concise

Pour exprimer les équations de Maxwell de façon concise, nous allons, à partir des composantes des vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, construire deux formes différentielles. Ces formes différentielles sont définies sur l'espace-temps $\mathbb{R}^4$, dont les coordonnées sont (t, x, y, z), selon les formules

$$E = E_x dx + E_y dy + E_z dz,$$

$$B = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy.$$

Ainsi, E est une 1-forme et B une 2-forme. Combinons-les dans une 2-forme F appelée *champ électromagnétique*, définie par

$$F = B - dt \wedge E.$$

Si vous décomposez la 2-forme F comme combinaison linéaire des six formes $dt \wedge dx$, $dt \wedge dy, \ldots$ qui forment une base de l'espace des 2-formes alternées sur $\mathbb{R}^4$, vous verrez réapparaître six coefficients qui ne sont autres que les composantes des vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$. Nous n'avons fait que coder ces six nombres par un objet qui n'est plus un couple de vecteurs, mais une 2-forme différentielle.

La différentielle extérieure dF de F est une 3-forme qu'il est facile de calculer. On trouve, en arrangeant convenablement les termes :

$$\begin{aligned} dF &= (\operatorname{div} \vec{B})\, dx \wedge dy \wedge dz + (\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B})_x\, dt \wedge dy \wedge dz + \\ & \quad +(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B})_y\, dt \wedge dz \wedge dx + (\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B})_z\, dt \wedge dx \wedge dy. \end{aligned}$$

On vérifie ainsi en un coup d'œil que la paire d'équations (5), (6) est satisfaite par $\vec{E}$ et $\vec{B}$ si et seulement si le champ électromagnétique F qu'on vient de définir satisfait la condition $dF = 0$.

Pour réécrire les deux autres équations de Maxwell, nous allons introduire une 1-forme de courant, notée J, définie par

$$J = -\rho dt + j_x dx + j_y dy + j_z dz.$$

Alors, si vous faites le calcul de $*F$ puis de $d(*F)$ d'une part, de $*J$ d'autre part, vous aurez le plaisir de constater que la paire d'équations (4), (7) est équivalente à la relation $d(*F) = *J$.

Finalement, en termes de la 2-forme champ électromagnétique F, les équations de Maxwell s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{lcl} dF & = & 0 \\ d(*F) & = & *J. \end{array} \right. \tag{10}$$

3.2 Une formulation instructive

La formulation (10) des équations de Maxwell a de nombreuses qualités. La première est peut-être d'ordre esthétique. Le fait qu'il soit possible de formuler une loi physique aussi importante en si peu de lettres est sans doute le signe d'une adéquation profonde entre le phénomène et son modèle mathématique.

Plus prosaïquement, une expression aussi condensée d'une relation entre différents objets permet de voir très clairement quelles structures mathématiques sont en jeu. À part 0 et =, ces équations font intervenir les symboles F, J, d et $*$, issus du monde des formes différentielles. Les trois premiers, F, J et d, ne dépendent que de la structure *différentiable* de $\mathbb{R}^4$, de ce qui, dans l'ensemble des structures attachées à $\mathbb{R}^4$, fait qu'on peut dériver ou différentier des fonctions définies au voisinage d'un point. Par exemple, la structure linéaire de $\mathbb{R}^4$ ne joue pas un rôle essentiel pour ce qui nous intéresse : le fait qu'on puisse ajouter ou soustraire des points de $\mathbb{R}^4$ n'intervient pas dans la formulation de l'électromagnétisme.

Le quatrième symbole, $*$, représente l'opérateur de Hodge, qui lui dépend d'une structure supplémentaire : la donnée d'une forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$, que nous avons choisie égale à $-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$. Comme nous l'avons dit au moment où nous avons défini l'opéateur de Hodge, cette forme quadratique définit une sorte de structure mérique sur $\mathbb{R}^4$, elle permet de mesurer des longueurs. Cette strucure pseudo-métrique s'appelle la strutcture *lorentzienne*. Le principe que nous allons maintenant disctuer est le suivant.

Théorème 3.1 *Les équations de Maxwell sont invariantes par toutes les transformations bijectives de $\mathbb{R}^4$ qui préservent sa structure différentiable et sa structure lorentzienne.*

Quelques explications tout d'abord. Nous dirons qu'une application bijective $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ préserve la structure différentiable de $\mathbb{R}^4$ si elle est elle-même indéfiniment différentiable (on dit, de classe C^∞), ainsi que sa transformation réciproque. Nous dirons de plus qu'elle préserve la structure lorentzienne de $\mathbb{R}^4$ si un vecteur et son image par T ont toujours la même longueur lorentzienne.

La signification du théorème est alors la suivante. Considérons une certaine distribution de charge et de courant, qui détermine une 1-forme de courant J. Cette distribution crée un champ électromagnétique dans l'espace, qui est la solution des équations de Maxwell (10) pour ce J particulier. Considérons maintenant une transformation T comme ci-dessus. Construisons la distribution de charges et de courant qui est l'image par T de notre distribution initiale. Cette nouvelle distribution correspond à une nouvelle 1-forme J_T. Alors nous pouvons d'une part considérer la solution des équations de Maxwell pour la forme courant J_T, et d'autre part considérer l'image par T du champ électromagnétique créé par la distribution initiale. Le théorème grantit que nous obtiendrons deux fois la même 2-forme, que nous notons F_T.

Cette propriété d'invariance des équations de Maxwell, qui devient presque évidente lorsqu'on les écrit sous la forme (10), se trouvait bien cachée dans leur forme classique. Elle y était pourtant présente, et cela a causé bien des soucis aux physiciens de la fin du XIX$^{\text{e}}$ siècle, pour une raison apparemment banale qui est que les équations de Maxwell permettent de prédire la vitesse de la lumière.

3.3 Une formulation aux conséquences dérangeantes

Depuis le XVII$^{\text{e}}$ siècle, les physiciens tiennent pour acquis le *principe de relativité de Galilée* qui stipule que les lois de la physique sont les mêmes dans deux référentiels en translation uniforme l'un par rapport à l'autre. De façon imagée, si un voyageur se réveille dans un wagon sans fenêtres et parfaitement isolé de l'extérieur, il n'a *aucun moyen* de déterminer si le train est à l'arrêt ou en mouvement à une vitesse constante. Bien sûr, si le train freine ou accélère, le voyageur le sentira. Mais il s'agit ici de translation *uniforme*, et elle, aucune expérience ne permet de la détecter.

À la fin du XIX$^{\text{e}}$ siècle, les physiciens se trouvaient face au problème suivant : comment est-il possible que les lois de la physique soient toujours les mêmes dans deux référentiels en translation uniforme l'un par rapport à l'autre, alors qu'une de ces lois prédit que la vitesse de la lumière doit avoir une certaine valeur, disons V ? En effet, imginons un rayon lumineux qui se propage en ligne droite le long d'une route au bord de laquelle se trouve un piéton arrêté et sur laquelle une voiture roule à vitesse constante v, dans la même direction que le rayon lumineux.

Faisons aussi l'hypothèse que les équations de Maxwell sont correctes dans le référentiel du piéton, donc aussi dans celui du conducteur. Puisque le piéton et le conducteur peuvent tous deux appliquer les équations de Maxwell, ils peuvent tous deux arriver à la conclusion qu'ils doivent voir passer le rayon lumineux à la vitesse V. D'un autre côté, le conducteur, puisqu'il se déplace dans la même direction que le rayon lumineux, devrait le voir passer plus lentement que le piéton : il devrait le voir passer devant lui à la vitesse $V - v$. La contradiction se trouve dans l'égalité impossible

$$V = V - v.$$

Il fallait donc apparemment soit renoncer aux équations de Maxwell, soit renoncer au principe de relativité de Galilée. La théorie de l'*éther*, très en vogue à l'époque, tendit à faire préférer la seconde solution. En effet, l'analogie entre les ondes électromagnétiques au moyen desquelles on se représentait la lumière et les ondes sonores par exemple laissait supposer l'existence d'un milieu, analogue à l'air, au sein duquel les ondes électromagnétiques se propageraient, dont elles seraient des fluctuations locales et temporaires. Ce milieu, qu'on appelait éther, briserait par sa seule existence le principe de relativité de Galilée. En effet, il devrait exister un repère dans lequel l'éther serait au repos, et qui jouerait pour la physique et singulièrement l'électromagnétisme un rôle particulier.

Une question naturelle que se sont posés certains physiciens était la suivante : la Terre est-elle au repos par rapport à l'éther ? La réponse la plus vraisemblable était "Non" et ils en étaient conscients. Mais peut-être était-il possible de mettre en évidence la rotation de la Terre au sein de ce milieu supposé immobile. Comme sur un immense ballon immergé dans en fluide et en rotation dans ce fluide, un observateur à la surface du ballon devrait ressentir un courant lié à la rotation du ballon, la propagation de la lumière à la surface de la Terre devrait se faire à des vitesses différentes suivant qu'on envoie des rayons "dans le sens du courant" ou "à contre-courant" de l'éther.

Deux physiciens, Morley et Michelson, ont poussé ce raisonnement à son terme et mené des expériences extrêmement délicates pour comparer le plus finement possible la vitesse de deux rayons lumineux envoyés à la surface de la Terre dans deux directions différentes. À leur grande surprise, ils n'ont pas pu mettre en évidence la moindre différence entre leurs vitesses de propagation, ce qui ne laissait plus qu'une chance aux partisans de la théorie de l'éther : accepter que l'éther soit rigoureusement immobile par rapport à la Terre.

En 1905, Albert Einstein a proposé une toute autre issue à la contradiction apparente dans laquelle était pris le conducteur quelques lignes plus haut. Il a compris qu'il était possible de préserver tout à la fois le principe de relativité de Galilée et les équations de Maxwell, sans avoir recours à aucun éther. Il fallait pour cela renoncer à un pricipe apparemment bien plus bénin, qui est le principe d'addition des vitesses. Il est faux de dire que si, par rapport au piéton, le rayon va à la vitesse V et la voiture à la vitesse v, alors le rayon va à la vitesse $V - v$ par rapport à la voiture.

Dans les termes que nous avons employé plus haut, ce qu'a reconnu Einstein, c'est que la transformation $T(t, x, y, z) = (t, x - vt, y, z)$ ne préserve pas la structure lorentzienne de $\mathbb{R}^4$. Bien entendu, il ne l'a pas formulé d'abord en ces termes. Au contraire, c'est lui qui a compris le rôle essentiel joué en physique par la structure lorentzienne de l'espace-temps, alerté par cette contradiction issue d'une théorie, l'électromagnétisme, dont on peut dire qu'elle était relativiste avant la lettre.

4 Conclusion

La fin du XIX$^{\text{e}}$ siècle a été une période charnière pour la physique. Aux alentours de 1880, certains pensaient que la physique serait bientôt une science complète, ayant atteint son objectif de décrire complètement la nature et d'en donner un modèle prédictif. Vingt-cinq ans plus tard, en 1905, deux problèmes apparemment mineurs avaient en fait conduit à deux véritables révolutions. Le premier était le problème du rayonnement du corps noir qui, à travers les travaux de Max Planck puis de beaucoup d'autres, a conduit à l'élaboration de la mécanique quantique. Le second était celui de l'éther et des expériences de Michelson et Morley. Avec les travaux d'Einstein, ce faisceau de problèmes a donné naissance à la relativité restreinte, puis à la relativité générale.

Peut-être ce petit texte vous aura-t-il donné envie d'en savoir plus sur ces sujets. Quoi qu'il en soit, il n'aura pas tout-à-fait manqué son but s'il a contribué à vous convaincre qu'il n'est pas toujours inutile de disposer de plusieurs expressions mathématiquement équivalentes de la même théorie physique et que la plus abstraite n'est pas forcément la plus mauvaise.