Jérôme Dubois - Prix du Jeune Chercheur 2004.

La Théorie Mathématique des Nœuds

Mon travail de thèse traite de l'**étude** et de la **classification** des **nœuds** d'un point de vue **mathématique**.

Il y a un peu moins de 150 ans, les nœuds ont commencé à intéresser les scientifiques et en particulier les mathématiciens. Dès lors, ils sont devenus le centre d'une nouvelle théorie mathématique très riches, utilisant des concepts sophistiqués des mathématiques modernes et ayant de nombreuses applications. Je me propose dans ces quelques lignes de décrire sommairement, et en tentant d'utiliser un langage le moins « technique » possible, mon travail de thèse.

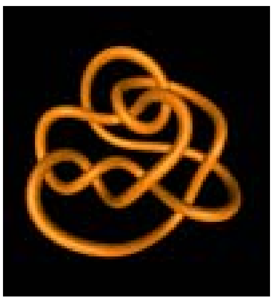
La **Théorie des Nœuds** est une branche d'une discipline mathématique appelée **Topologie Algébrique**. Cette discipline a été inventée par le mathématicien français Henri Poincaré vers la fin du XIXe siècle et s'intéresse aux propriétés des objets géométriques qui sont invariantes par déformations continues sans déchirures. En bref, le spécialiste de théorie des nœuds s'intéresse à la *forme* du nœud.

Qu'est-ce qu'un nœud en mathématiques ?

Tout le monde sait bien, au moins intuitivement ce qu'est un nœud. Mais pour étudier un objet en mathématiques ou dans toute autre science l'intuition ne suffit pas et il faut encore en donner une *définition rigoureuse*. Dans le cas d'un nœud qui nous intéresse cela n'est pas aussi immédiat qu'il y paraît.

Formellement un **nœud** en mathématiques est un **plongement** du cercle dans l'espace tridimensionnel usuel. Par « plongement », j'entends simplement l' « image idéalisée » d'une **ficelle** éventuellement enchevêtrée dont les extrémités ont été recollées.

L'exemple le plus simple d'un nœud est le **nœud trivial** qui est un « nœud non noué » et qui est obtenu en recollant les extrémités d'une ficelle sans nœud. On obtient ainsi la circonférence d'un cercle. Le nœud le plus simple qui est « vraiment noué » est le **nœud de trèfle** (voir figure ci-contre).



Mais il existe des nœuds en apparence plus compliqués , comme par exemple le nœud représenté sur la figure ci-contre. Ces trois exemples fondamentaux vont nous servir dans tout notre texte.

Le problème des nœuds ?

Intuitivement si je tire ou si je tords la ficelle sans jamais la rompre, je vais certainement changer l'aspect du nœud qu'elle représente mais je ne vais pas en changer ses caractéristiques intrinsèques. En clair, je ne vais pas changer le type de nœud représenté par la ficelle. Je dirai que deux nœuds sont **équivalents** lorsque je peux amener la ficelle de l'un sur celle de l'autre en la tirant ou en la tordant mais sans jamais la rompre.

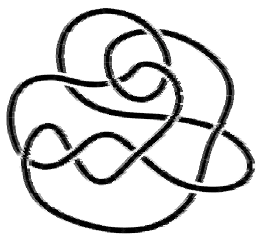
Le **problème des nœuds** est certainement le problème de topologie dont l'énoncé est le plus simple à comprendre. On peut le formuler des deux façons suivantes :

1. Etant donné un nœud, est-il vraiment noué ?

   En termes plus savants, est-il ou n'est-il pas équivalent au nœud trivial ?

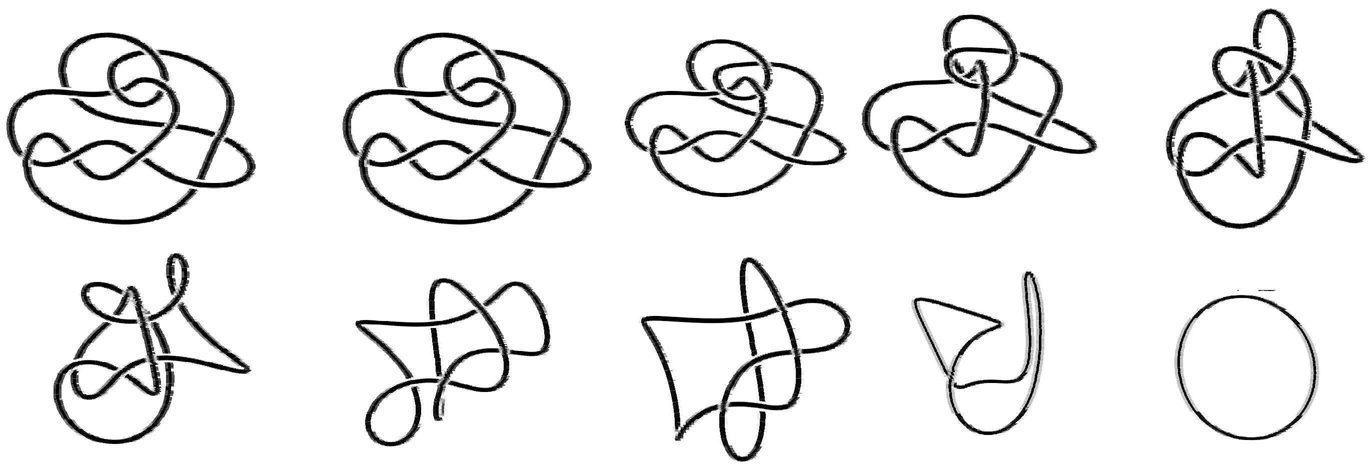
2. Etant donné deux nœuds, sont-ils ou non équivalents ?

C'est à ce genre de questions que le mathématicien tente de répondre de façon *rigoureuse*. Mais une solution complète au problème des nœuds est encore loin d'être entièrement découverte.
Une question typique de théorie des nœuds est la suivante :



est-il vraiment noué ?

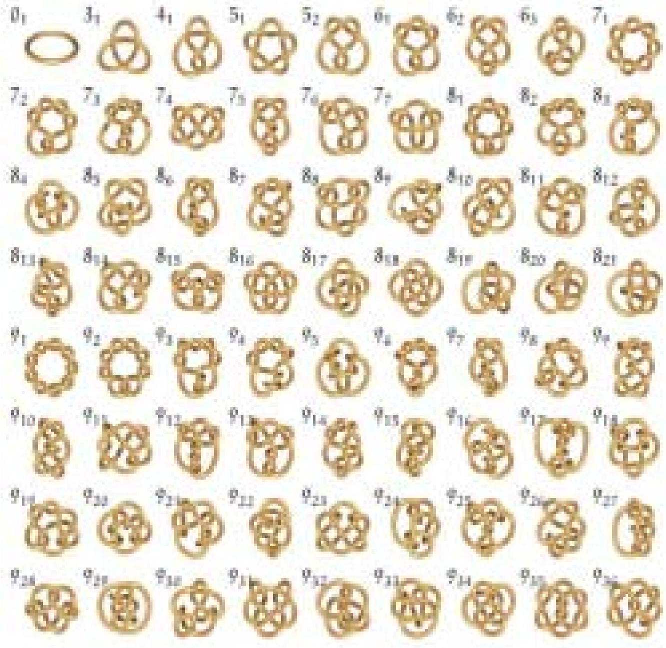
La réponse est à première vue surprenante. Le nœud ci-dessus n'est en fait pas noué comme le montre la suite de figures suivantes sur lesquelles on le voit se dénouer :



Les origines de la théorie des nœuds.

Avant d'aller plus loin, je voudrais faire une petite digression historique en situant sommairement la théorie des nœuds. Ceci pour vous convaincre qu'elle est le fruit d'une activité humaine et historique de recherche, de découverte, de doute et aussi d'erreurs mais au final de grandes réussites.

L'origine de la théorie des nœuds remonte au milieu du XIXe siècle et se trouve dans les travaux du physicien anglais Kelvin sur la matière. En 1860, Kelvin propose un modèle de la matière dans lequel les atomes sont représentés par des tourbillons en forme de nœuds. Kelvin appelait cela des « *vortex-atoms* ». Dans sa théorie, c'est précisément le type de nœud qui devait déterminer les propriétés physico-chimiques de l'atome qu'il représentait. Il fallait donc pour comprendre la matière, commencer par comprendre et connaître les différents nœuds possibles. En résumé comprendre la matière revenait à classer les nœuds. Ce travail de classification sera entrepris de façon totalement empirique par le physicien écossais Tait. Il y sacrifiera d'ailleurs sa vie. Mais on lui doit la première classification des nœuds jusqu'à 10 croisements (voir table ci-dessous).



Chose surprenante, presque incroyable, Tait n'a commis qu'une seule erreur : une duplication. Mais les mathématiciens ne s'en sont aperçus qu'un siècle plus tard.

Qu'est-ce qu'un invariant des nœuds ?

Comme dans n'importe quelle autre activité humaine, le mathématicien a besoin d'outils. En théorie des nœuds, l'**outil** le plus efficace est la notion d'**invariant**.

Un **invariant** est une **quantité** – qui peut-être un nombre entier, un nombre réel, un polynôme, un groupe ou tout autre objet mathématique – **qui ne change pas** lorsque l'on fait subir au nœud une déformation continue sans déchirure.

Grosso modo, on peut dire que les invariants servent surtout à répondre par la négative au *problème des nœuds*. Plus précisément, supposons que l'on dispose d'un invariant. On peut alors affirmer que deux nœuds ne sont pas équivalents (c'est-à-dire que l'on ne peut pas déformer l'un pour lui donner l'aspect de l'autre) quand l'évaluation de l'invariant sur ces deux nœuds ne donne pas le même résultat. Par contre, si les deux nœuds ont le même invariant, alors on ne peut rien conclure. Il faut soit changer d'invariant, soir réussir à démontrer directement qu'il s'agit des mêmes nœuds.

Tous les invariants « calculables » connus à ce jour sont incomplets, c'est-à-dire qu'il existe des nœuds effectivement différents ayant le même invariant. Le *problème des nœuds* est loin d'être encore entièrement résolu.

L'exemple le plus simple d'invariant et celui qui saute aux yeux en premier est le nombre de croisements du nœud. Enfin, pas tout à fait le nombre de croisements, mais le **nombre minimal de croisements** de toutes les configurations différentes du nœud. C'est cet invariant que Tait a utilisé pour élaborer sa table (voir ci-dessus) mais il est très difficilement calculable.

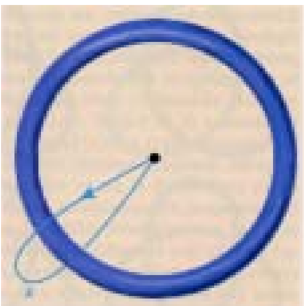
Le groupe d'un nœud.

Je vais maintenant décrire une méthode moderne plus compliquée mais beaucoup plus efficace qui fournit une description presque complète des nœuds et qui permet de fabriquer de nombreux invariants. Cette méthode s'appelle la *théorie des représentations*. C'est sur cette méthode que porte mes travaux de recherche et en particulier ma thèse. Pour l'expliquer, j'ai besoin d'introduire la notion de *groupe d'un nœud*.

En 1895, Henri Poincaré compris que l'on pouvait étudier le problème géométrique posé par les nœuds par le biais de l'Algèbre en associant à un nœud un objet algébrique appelé le **groupe du nœud**. Cette méthode est un vrai tour de force puisqu'elle permet de passer de l'étude d'un objet géométrique à celle de quantités algébriques sur lesquelles le mathématiciens va s'appuyer pour faire des calculs algébriques. J'ajoute que beaucoup de problèmes en Topologie ne peuvent pas trouver de solution satisfaisante sans l'utilisation de cet objet.

Sans entrer dans le détail, on peut dire que le groupe d'un nœud permet de décrire toutes les manières de se déplacer dans l'espace autour du nœud sans jamais couper ce dernier. Jusqu'à présent je n'ai parlé que de la ficelle, et je dois apporter un petit bémol à cela. En fait le spécialiste n'est pas réellement intéressé par la ficelle en elle même, ce qui l'intéresse c'est ce que l'on appelle l'**extérieur du nœud**, c'est-à-dire tout l'espace autour du nœud. C'est ce point qui est le plus délicat à comprendre et qui pourtant est essentiel. Pour vous convaincre, je vais utiliser l'image suivante. Supposons que vous soyez assez petit(e) pour être funambule sur notre ficelle nouée. Prenez un point de départ et puis marchez dans la même direction sans vous retourner le long de la ficelle nouée. Au bout d'un certain temps, vous vous retrouverez à votre point de départ et de votre point de vue ce trajet le long de la ficelle nouée aura été pour vous le même que si vous aviez suivi la circonférence d'un cercle.

Illustrons tout ceci par un exemple. Le groupe du nœud trivial peut s'identifier à l'ensemble des entiers relatifs (… -3, -2, -1, 0, 1, 2, …) de la façon suivante.



Le nœud trivial est la circonférence d'un cercle. On examine tous les chemins fermés et orientés qui partent d'un point de base (le point en noir su la figure ci-contre) traversent l'espace sans couper le nœud puis reviennent au point de base. L'élément caractéristique de ces chemins est le **nombre de tours** qu'ils font autour du nœud (ce nombre de tours est compté avec le sens de rotation de ces chemins, c'est-à-dire s'ils enlacent le nœud en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens inverse). Il est bien évident qu'en général, le groupe d'un nœud est loin d'être aussi simple que celui du nœud trivial. On sait d'ailleurs que le nœud trivial est le *seul* nœud dont le groupe est égal à l'ensemble des nombres entiers relatifs.

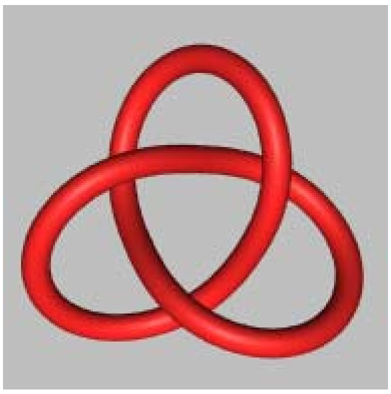
Les représentations.

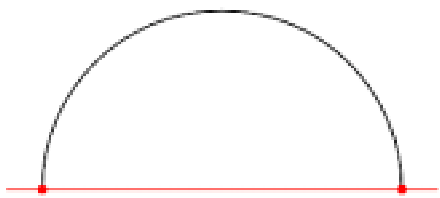
L'étude directe du groupe d'un nœud est en générale très délicate. Les mathématiciens – notamment A. Casson et W. Thruston dans les années 1980 – ont inventé une méthode permettant de contourner cette difficulté en examinant ce que je peux appeler des *réalisations concrètes* du groupe d'un nœud dans un espace dont la géométrie est mieux connue comme par exemple le groupe de Lie SU(2). Ceci permet de mieux apprécier la structure globale du groupe d'un nœud et même si c'est nécessaire de faire des calculs algébriques assistés par ordinateur.

L'espace SU(2) apparaît de façon naturelle dans beaucoup d'applications physiques et notamment en théorie des particules élémentaires. Géométriquement parlant, SU(2) n'est rien d'autre que la sphère dans un espace à quatre dimensions.

Une **représentation** du groupe d'un nœud est une « correspondance » entre le groupe et l'espace SU(2) qui vérifie certaines contraintes mathématiques naturelles. Pour beaucoup de nœuds, on est capable de déterminer explicitement l'espace des représentations. Une telle description permet de tirer de nombreuses informations sur le nœud et peut être l'occasion d'effectuer des calculs algébriques (qui peuvent être assistés par ordinateur).

Reprenons l'exemple du nœud de trèfle. On connaît une description analytique *explicite* de l'espace des représentations du groupe du nœud de trèfle. Une schématisation de cet espace est donnée sur la figure suivante :





Espace des représentations dans SU(2).

La figure ci-dessus n'est qu'une *schématisation* de l'espace des représentations dans SU(2) et ne décrit en aucune manière la géométrie de cet espace (c'est-à-dire la distance entre deux points etc…) mais comme Poincaré disait « la géométrie est l'art de raisonner *juste* sur des figures *fausses* ».

Une application : l’étude topologique de la molécule d’ADN.

Les applications de la théorie des nœuds sont nombreuses. Je me limiterai seulement à en décrire deux, qui me semblent particulièrement significatives.

En mathématiques.

On connaît depuis plus d'un siècle une classification (à étirements élastiques près) des *surfaces*, c'est-à-dire des espaces à deux dimensions. Par contre une telle classification est inconnue pour les espaces ayant trois dimensions. La théorie des nœuds permet de décrire d'une certaine façon tous les espaces à trois dimensions aussi compliqués qu'ils puissent être (littéralement les nœuds permettent de « *démonter* » les espaces à trois dimensions). On peut ainsi dire que la théorie des nœuds est une *clé* pour comprendre les espaces à trois dimensions.

En biologie moléculaire : la structure de l’ADN.

Il est maintenant bien connu - depuis la découverte de Crick et Watson (1953) - que la **molécule d'ADN** se présente sous la forme d'une **longue double hélice**. Mais il est peut être moins connu qu'outre l'ADN à deux brins à extrémités libres on rencontre aussi des molécules à deux brins fermés et aussi des molécules à un seul brin qui peut être aussi bien fermé qu'à extrémités libres. Les molécules à brins fermés forment donc des *nœuds.* La figure ci-contre est une molécule d’ADN nouée observée au microscope éléctronique.

La molécule d'ADN possède une surprenante propriété : le **surenroulement**. De quoi s'agit-il ? Le surenroulement de l'ADN est l'analogue de ce qui arrive au fil en forme de spirale de l'écouteur de votre téléphone. Lorsque l'utilisateur repose l'écouteur sur son boîtier il imprime au fil connecteur une torsion supplémentaire (appelée *twist*). Le fil va ainsi s'emmêler de plus en plus pour finir par devenir une pelote informe et compacte. Pour l'ADN le phénomène de surenroulement produit le même effet et transforme la longue double hélice (qui peut parfois atteindre jusqu’à plusieurs dizaines de centimètres) en une minuscule pelote compacte.

D’autre part, les biologistes ont observé des **molécules d'ADN nouées** et ont constaté que la nature topologique de la molécule d’ADN, c’est-à-dire le type de nœud formé par la molécule, influe sur son fonctionnement dans les cellules en conditionnant certaines de ses propriétés chimiques. Les virus attaquent les cellules pour en changer les longues molécules d’ADN en les nouant de différentes façons. En effet, par le biais d’enzymes appelées les **topoisamérases**, les virus coupent et recollent différemment les brins de la molécule d’ADN de telle sorte qu’elles prennent la forme d’un nœud qui peut être très complexe. Il s’avère que le type de nœud obtenu est en quelque sorte la *carte de visite* du virus. Pour lutter efficacement contre les virus, il est impératif de reconnaître leur signature par leur action sur l’ADN. Par conséquent pour identifier les différents virus il faut pouvoir reconnaître les différents type de nœud et c’est en cela que la théorie des nœuds peut aider le biologiste.

En guise de conclusion.

Il y a encore trente ou quarante ans, la théorie des nœuds était considérées comme une branche tout à fait marginale des mathématiques. Mais aujourd'hui cette discipline à l'origine totalement théorique constitue un carrefour entre plusieurs sciences : les mathématiques évidemment où les nœuds ont trouvé une place centrale en topologie, mais aussi la physique et plus étonnant la biologie. Et toutes ces disciplines se nourrissent mutuellement de leurs découvertes respectives.