Pour nouer, il faut courber

Patrick Popescu-Pampu
Novembre 2003

http://dma.ens.fr/culturemath

Résumé

Le but de cet exposé est d'expliquer intuitivement comment on peut mesurer la forme des courbes autrement qu'en mesurant simplement leurs longueurs : à l'aide de la notion de courbure. Nous expliquons un théorème qui relie la courbure totale d'une courbe fermée et le fait qu'elle est ou non nouée. Ensuite nous faisons une brève échappée dans le monde des surfaces. Nous évitons de considérer connues des notions d'analyse comme le passage à la limite ou la dérivation. Néanmoins l'exposé peut être aussi considéré comme une introduction intuitive à ces notions.

Certains paragraphes sont coupés en deux : la partie gauche est alors la continuation du texte, tandis que la partie droite, en **caractères gras**, est un commentaire sur la mathématisation de l'idée exprimée dans ce paragraphe.

Nombres et figures

Lorsqu'on commence à étudier les mathématiques, on découvre le monde des nombres entiers et celui des figures géométriques. Ces deux mondes ne sont pas séparés, divers liens les unissent, déjà connus ou encore à découvrir. Par exemple, l'étude des figures s'accompagne de la mesure de leurs dimensions, qui donne comme résultat des nombres. On va voir dans ce texte comment on peut décrire la forme de certains objets par des nombres. Mais ici, les nombres entiers ne sont pas suffisants.

En effet, il y a des discontinuités entre les nombres entiers : on est obligé d'effectuer des sauts pour arriver de l'un à l'autre. Et pourtant une mesure peut fort bien donner un résultat intermédiaire. Prenons l'exemple de la mesure des longueurs des segments. On doit avant tout fixer un segment de référence que l'on prendra comme unité de longueur. On peut alors associer à tout autre segment un nombre, qui est le rapport de sa longueur à celle du segment de référence choisi. Pour associer de cette manière un nombre à chaque segment, on fut amené à introduire de nouveaux nombres, fractionnaires, puis encore d'autres, le tout pour que les nombres conviennent au mieux à la mesure. A partir du monde discontinu des nombres entiers, il fallait obtenir un monde des nombres qui soit *continu* comme l'est un segment. Il s'avéra qu'on peut remplir l'espace entre les nombres entiers avec de nouveaux nombres, appelés par les mathématiciens *nombres réels*, de manière à ce que, lors de la mesure des longueurs, à chaque segment corresponde un tel nombre.

Mais il n'y a pas que les segments qui aient une longueur. Imaginons une ficelle bien tendue, elle ressemble beaucoup à un segment. Ceci permet de lui associer aussi une mesure de longueur, par rapport à un segment de référence. Mais cette longueur reste inchangée même si on déforme la ficelle. Ainsi on comprend intuitivement qu'une ligne serpentée épousée par la ficelle a une longueur égale à celle de la ficelle. On obtient de cette manière une première mesure de la *forme* de cette ligne.

Dans ce qui suit nous verrons comment les mathématiciens ont appris à dire beaucoup plus sur la forme des lignes et d'autres objets géométriques.

Les courbes dessinent des formes

Autour de nous tout semble avoir une forme, les personnes, leurs corps et leurs gestes, les animaux, les plantes, les villes, les rivières, les continents, les nuages et les constellations. L'un des caractères communs à toutes ces choses est de pouvoir être dessinées ou tout au moins esquissées. Quelques mouvements de la main et on peut transmettre une première image de l'une d'entre elles à quelqu'un qui ne l'a jamais vue. Qu'a-t-on fait ainsi ? On a tracé quelques traits sur une feuille de papier ou sur le sable. On a dessiné des *courbes*, comme les appellent les mathématiciens, même si elles englobent aussi les lignes droites. Et s'il est vrai que l'un des aspects qui relie les choses citées précédemment est de pouvoir être ainsi dessinées, cela veut dire que ces courbes ont retenu quelque chose de la *forme* de ce qu'elles représentent. Regardons alors en quoi consiste la forme d'une courbe.

Tout d'abord, quelle courbe est la plus simple ? On pourrait dire que c'est la ligne droite, car pour la tracer on ne doit tourner ni dans un sens ni dans l'autre (Fig.1).

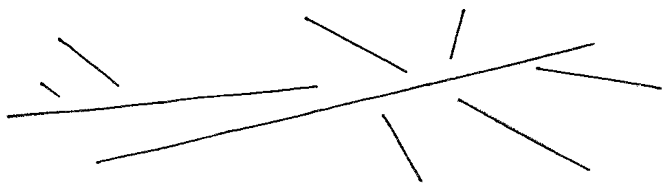

Fig. 1

On commence à suggérer une forme lorsqu'on décide de tourner. Et si on tourne toujours de la même manière, on revient au point de départ, en ayant dessiné un cercle. Comme on peut tourner plus ou moins fortement, on peut obtenir des cercles de tailles différentes (Fig.2).

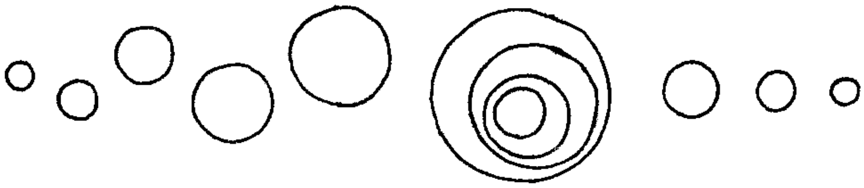

Fig. 2

Avec les droites et les cercles, nous voici en présence de la panoplie graphique de la géométrie élémentaire, qui est d'ailleurs presque suffisante pour les besoins des architectes et des ingénieurs.

Mais les géomètres ne se sont pas arrêtés à l'étude des droites et des cercles. En effet, lorsqu'on trace une courbe, on peut aussi varier la manière de tourner, dans ce cas on ne revient plus forcément sur nos pas, on commence à obtenir des courbes de plus en plus compliquées, qui permettent de communiquer des formes de manière de plus en plus riche (Fig.3).

Une courbe tracée au cours du temps est modélisée mathématiquement par une application *continue*

$$\gamma : I \longrightarrow E$$

où I est un intervalle de $\mathbf{R}$ et E est un espace euclidien (par exemple un plan usuel).

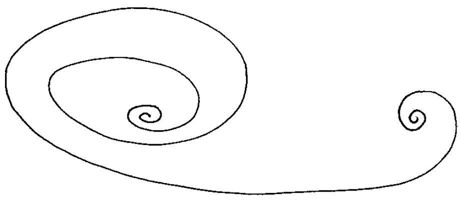

Fig. 3

On peut aussi changer en cours de route le sens dans lequel on tourne, en *infléchissant* la trajectoire. Les mathématiciens disent dans ce cas que la courbe décrite a un *point d'inflexion* (Fig.4).

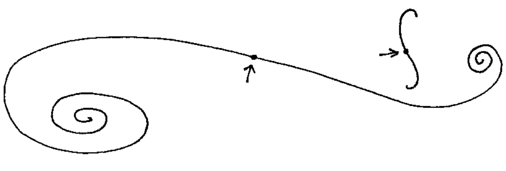

Fig. 4

Une courbe admet *un point d'inflexion* en un point P si elle admet une tangente en P et que celle-ci traverse la courbe en P.
Si la courbe est deux fois dérivable en $P = \gamma(t_0)$, ceci implique que $\gamma'(t_0)$ et $\gamma''(t_0)$ sont linéairement dépendantes en t_0.

Un dessin sera un assemblage de morceaux de courbes, pouvant se croiser, se rejoindre en leurs extrémités ou en leurs points intérieurs suivant un angle quelconque ou bien se retrouver isolés les uns des autres (Fig.5).

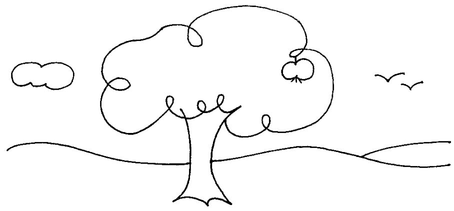

Fig. 5

Pour comprendre la forme du tout, on regardera d'abord la forme des courbes simples qui le composent. On ne regardera pour commencer que des morceaux de courbes qui ne se recoupent pas eux-mêmes et qui ont un aspect lisse, sans changement brutal de direction (Fig.6). C'est-à-dire qu'on laissera de côté les courbes accidentées comme un profil montagneux où la pente varie brusquement (Fig.7).

Une courbe *lisse* est modélisée mathématiquement par l'image d'une application injective et dérivable $\gamma : I \longrightarrow E$ telle que la dérivée $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

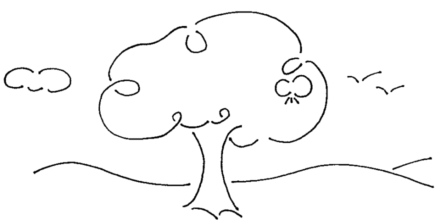

Fig. 6

Fig. 7

Le globe céleste et la courbure d'une route

Comment mesurer la forme de ces courbes ? On a vu que lorsque on les trace, on peut tourner plus ou moins fortement. C'est cette quantité de rotation dans le mouvement effectué que l'on voudrait mesurer. Les mathématiciens ont introduit un nom pour cette quantité, ils l'ont appelée *courbure*. Nous allons essayer de comprendre comment elle est définie.

Pour cela, nous allons d'abord penser différemment à nos courbes. Si jusqu'à présent on regardait des lignes dessinées, pensons à présent à une route. Si elle traverse une plaine bien plate, alors elle ressemble fort, vue de loin, à une ligne tracée sur le papier. Mais elle peut aussi traverser un paysage de collines. Auquel cas aucun plan ne la contient plus, on se retrouve avec une courbe dans l'espace (Fig.8). Les courbes contenues dans un plan deviennent alors des cas particuliers de courbes de l'espace. Nous définirons maintenant la courbure des courbes de l'espace.

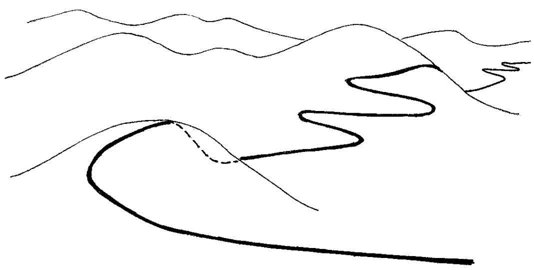

Fig. 8

Imaginons une voiture roulant de nuit sur cette route. Un passager - surtout pas le chauffeur ! - tient dans ses mains un globe céleste sur lequel est représentée la voûte étoilée. Avec un crayon il marque à chaque instant sur le globe le point qui représente l'étoile dans la direction de laquelle est dirigé l'axe de la voiture. Lorsque la voiture suit la route, la personne trace ainsi une ligne sur son globe. Par souci de concision, nous parlerons de *courbe terrestre*, au sujet de la route, et de *courbe céleste*, au sujet de la ligne tracée sur le globe (Fig.9).

Soit $t \longmapsto \gamma(t)$ la trajectoire de la courbe terrestre, paramétrée par le temps. En prenant le rayon du globe céleste, supposé parfaitement sphérique, comme unité de longueurs, on peut identifier ce globe à la sphère de rayon 1 de l'espace ambiant E. La courbe céleste est alors paramétrée par $t \longmapsto \tau(t)$, où $\tau(t) = \gamma'(t)/ \mid \gamma'(t) \mid$.

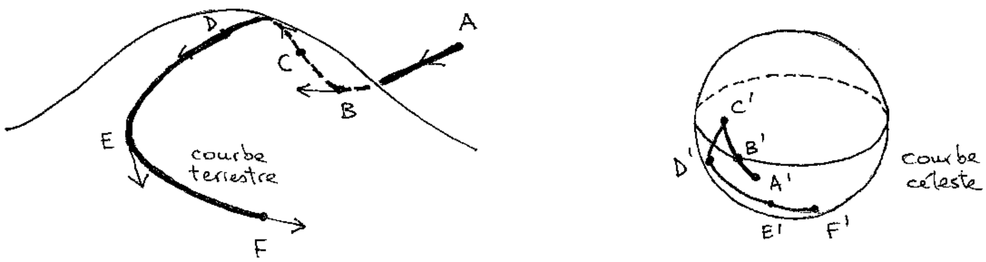

Fig. 9

A un morceau de route - de courbe terrestre - correspond ainsi un morceau de courbe céleste. On considérera que le rayon du globe est pris comme unité de longueur. La *courbure totale* du morceau de courbe terrestre est définie comme étant la longueur de la courbe céleste qui lui correspond. Comme on l'a expliqué précédemment, on peut penser à cette longueur comme à celle d'une ficelle qui serait amenée à coïncider parfaitement avec elle.

La définition de la courbure totale, que nous venons de donner, est conforme à notre intuition. En effet, si la route est droite, la voiture reste continuellement orientée dans la même direction. La courbe céleste est réduite à un point, elle n'a pas de longueur. D'après notre définition, la courbure de la droite serait nulle. Et c'est bien ce qu'on concevait intuitivement lorsque l'on voyait que la droite ne se courbait ni dans un sens ni dans un autre. Ensuite, si une route de la même longueur est recourbée, la courbe céleste qui lui correspond n'est plus réduite à un point, elle est d'autant plus longue que la route est recourbée (Fig.10). Ce qui donne une mesure de courbure d'autant plus grande. On voit ainsi qu'une grande courbure selon notre définition correspond à une ligne très recourbée selon notre intuition.

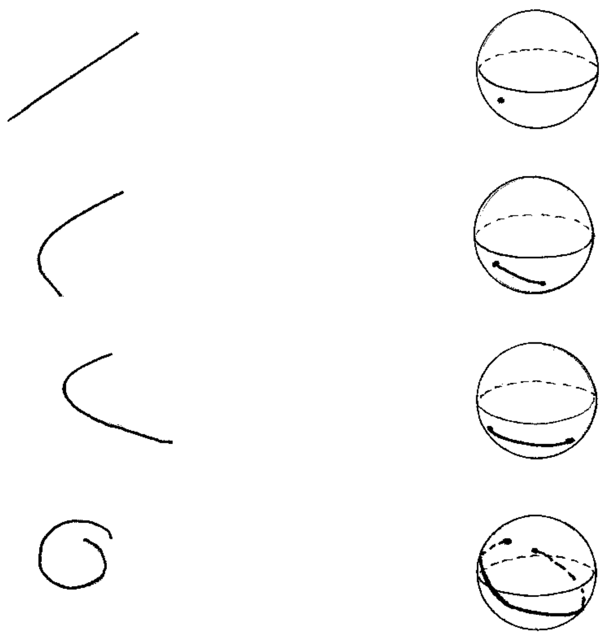

Fig. 10

Dans ce cas, à quoi bon avoir introduit une définition mathématique ? On pourrait croire que l'on n'a rien rajouté à l'intuition initiale. En fait, le démarrage des théories mathématiques se fait toujours lentement, par une élaboration des notions de base. Dans notre cas, de la courbure. Ce qu'on a gagné en premier lieu, c'est de pouvoir évaluer la courbure totale d'une ligne courbe. Si au début on pouvait dire intuitivement qu'une ligne est plus recourbée qu'une autre, maintenant on peut mesurer ceci de manière très précise. C'est le même passage entre le moment où on sait dire intuitivement qu'une ficelle est plus longue qu'une autre et celui où on sait dire combien mesure chacune.

On se retrouve à présent avec deux mesures pour la forme d'une courbe. D'une part sa longueur et d'autre part sa courbure. Mais si l'on comprend intuitivement ce que représentent des courbes ayant une même longueur - il suffit pour cela de penser aux diverses formes que peut prendre un morceau de ficelle - il est plus difficile de se faire une idée de ce que veut dire pour des courbes d'avoir la même courbure totale. Par exemple, tous les cercles ont même courbure totale. En effet, les courbes célestes associées à toutes les courbes terrestre circulaires sont des *grands cercles*, c'est à dire des cercles centrés sur le centre de la sphère céleste, qui ont tous la même circonférence (Fig.11). Ainsi, *la courbure totale n'est pas une mesure de la taille d'une courbe mais bien de sa forme*, dans la mesure où tous les cercles ont la même forme. On a décidé par convention que le rayon de la sphère céleste est égal à 1, la longueur d'un grand cercle est alors égale à 2π. Ainsi tous les cercles sont de courbure totale 2π.

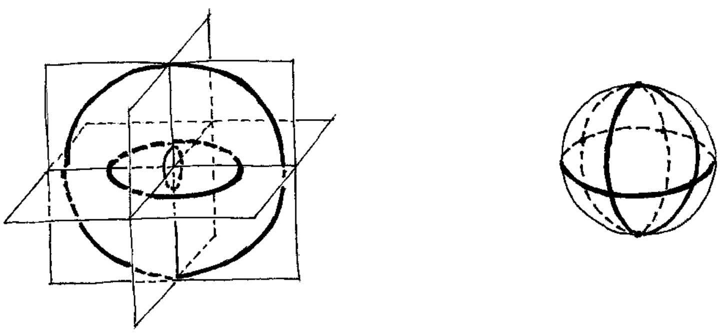

Fig. 11

En fait notre définition peut être affinée. On avait annoncé que l'on voulait mesurer la forme d'une courbe. La courbure totale nous donne un nombre, ce qui est loin de saisir toute la richesse de sa forme, car on oublie ainsi ses contorsions et ses inflexions.

Au lieu de définir un nombre associé à la courbe en entier, on peut associer un nombre à chaque point de la courbe, qui mesure sa courbure en ce point. On l'obtient en faisant le rapport entre la longueur de la courbe céleste et celle de la courbe terrestre pour des morceaux de courbe entourant le point, et en prenant ces morceaux de plus en plus petits. Ces rapports s'approchent alors de plus en plus d'un nombre fixe, qui est la valeur de la courbure en ce point.

Si t_0 est l'instant auquel on veut étudier la courbure de $t \longmapsto \gamma(t)$, la courbure au point $\gamma(t_0)$ est par définition :

$$k(\gamma(t_0)) = \lim_{\substack{t_0 \in J \\ J \to \{t_0\}}} \frac{Longueur(\tau(J))}{Longueur(\gamma(J))}.$$

Ici J désigne un intervalle ouvert contenant t_0, dont on fait tendre la longueur vers 0.

Choisissons sur la courbe une origine, à partir de laquelle on va mesurer les longueurs. On peut dans ce cas repérer chaque point de la courbe par sa distance à l'origine. Ainsi, à chaque nombre représentant la distance se trouve associé un nombre représentant la courbure au point correspondant. De cette manière on définit une *fonction* courbure, dépendant de la distance.

Si on a regardé jusqu'à présent des courbes dans l'espace, restreignons un moment notre attention aux courbes contenues dans un plan. Dans ce cas on peut raffiner la fonction courbure, en lui associant un signe en tout point. Pour le faire, on choisit d'abord un sens de rotation, ou *orientation*, dans le plan. On dit que la courbure en un point est positive si l'image sphérique, qui est contenue dans un plan parallèle, tourne dans le sens choisi lorsqu'on parcourt la courbe terrestre au voisinage du point choisi. Sinon, on dit que la courbure est négative. La courbure change de signe précisément lorsqu'on passe par un point d'inflexion. Il est instructif de s'en convaincre en faisant un dessin (cf. Fig. 4).

Une propriété remarquable de la fonction courbure avec signe est qu'*elle permet de reconstituer complètement la forme d'une courbe dans le plan.* C'est-à-dire qu'elle permet de redessiner fidèlement la courbe.

Pour le comprendre, imaginons un fil de fer ayant la même longueur qu'une courbe dont on connaît la fonction courbure. Afin de fabriquer un exemplaire de la courbe à partir de la fonction courbure, on doit courber le fil de fer. En chacun de ses points, la fonction courbure dit comment on doit le courber, tout en restant dans le plan, pour que son aspect soit localement celui de la courbe. En regardant la fonction on peut ainsi courber le fil de fer de proche en proche jusqu'à retrouver la courbe.

Si $l \longmapsto r_1(l)$ et $l \longmapsto r_2(l)$ sont deux courbes dans le plan E paramétrées par longueur d'arc, de même longueur $L > 0$, de courbures égales $k(\gamma_1(l)) = k(\gamma_2(l))$ pour tout $l \in [0, L]$, alors il existe un déplacement du plan E qui envoie $\gamma_1(l)$ sur $\gamma_2(l)$ pour tout $l \in [0, L]$.

Par la suite, on reprendra le cas général des courbes dans l'espace, et on considérera que la fonction courbure est toujours positive.

La torsion d'une courbe dans l'espace

Dans l'espace, la fonction courbure n'est plus suffisante pour retrouver la forme. En effet, on vient de voir que cette fonction permet seulement de reconstruire une courbe plane. On peut ensuite tordre celle-ci pour la faire sortir dans l'espace. Les mathématiciens ont défini une nouvelle notion, celle de *torsion*, qui est un autre caractère de la forme des courbes de l'espace. Elle mesure combien on a tordu la courbe plane ayant même fonction courbure, afin de fabriquer la courbe dans l'espace. On peut aussi définir une *fonction de torsion*, comme on avait défini une fonction de courbure. Expliquons sa définition.

Interprétons d'abord différemment notre définition de la fonction courbure. On avait introduit une deuxième courbe, en imaginant qu'une voiture parcourait la courbe terrestre et puis en prenant à chaque instant la direction de l'axe de la voiture. Cet axe est en fait une droite *tangente* à la courbe, notion que l'on peut comprendre intuitivement. En effet, si on fait passer plusieurs droites par le point, la tangente est celle qui "colle" le plus à la courbe (Fig.12).

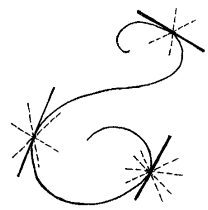

Fig. 12

Mais notre courbe se trouve dans l'espace, en général elle n'est contenue dans aucun plan. Ce qu'on a fait avec les droites, on peut le faire avec les plans, prendre celui qui "colle" le plus à la courbe, qui est le plus près de la contenir. On obtient ainsi un plan attaché à chaque point de la courbe (Fig.13). En fait ce choix peut être fait sur les portions de la courbe sur lesquelles la courbure ne s'annule pas. Nous supposerons que c'est toujours le cas des courbes que nous regarderons.

Le plan qui "colle" le plus à la courbe $t \longmapsto \gamma(t)$ au point $\gamma(t_0)$, appelé *plan osculateur*, est bien défini si γ est deux fois continûment dérivable et que $k(\gamma(t_0)) \neq 0$. C'est alors le plan engendré par les vecteurs $\gamma'(t_0)$ et $\gamma''(t_0)$.

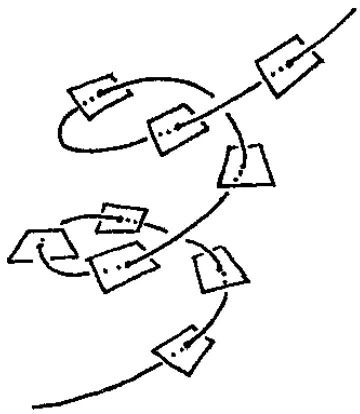

Fig. 13

Lorsque l'on a défini la courbure, on a regardé en fait comment variaient les tangentes lorsque l'on se déplaçait sur la courbe, maintenant on peut regarder comment varient les plans. Pour le faire, prenons en chaque point la droite perpendiculaire au plan, en choisissant de manière continue un sens de parcours de ces droites (Fig.14).

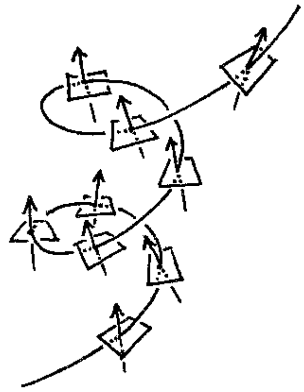

Fig. 14

Regarder comment varient les plans revient alors à regarder comment varient ces droites. Reportons sur la sphère céleste l'étoile dans la direction de laquelle pointe la droite, et ce en chaque point de la courbe, comme on avait reporté la direction de la tangente. On obtient une *deuxième courbe céleste* dont la longueur est par définition égale à la *torsion totale* de notre courbe terrestre. On peut de plus répéter la construction faite avec la première courbe céleste, lorsque nous avons défini la fonction courbure. La fonction qu'on obtient maintenant est *la fonction de torsion*. Elle mesure justement comment *se tord* le plan qui en chaque point "colle" le plus à la courbe, lorsqu'on parcourt celle-ci.

L'effort fait pour définir la torsion n'est pas inutile, le théorème suivant nous montre que à l'aide de cette notion, ce qui était vrai dans le plan se généralise dans l'espace :

> *La connaissance simultanée de la fonction de courbure et de celle de torsion permet aussi de reconstituer la forme d'une courbe de l'espace.*

Ce théorème important a été prouvé au $XIX^{ème}$ siècle.

Si $l \longmapsto \gamma_1(l)$ et $l \longmapsto \gamma_2(l)$ sont deux courbes dans l'espace E, paramétrées par longueurs d'arcs, de même longueur $L > 0$, de fonctions courbure et torsion égales : pour tout $l \in [0, L]$, $k(\gamma_1(l)) = k(\gamma_2(l)) \neq 0$ et $\tau(\gamma_1(l)) = \tau(\gamma_2(l))$. Alors il existe un déplacement de l'espace ambiant E qui envoie $\gamma_1(l)$ sur $\gamma_2(l)$ pour tout $l \in [0, L]$.

La courbure totale peut s'obtenir à partir de la fonction courbure par le processus d'*intégration*. Mathématiquement cela s'écrit, en notant $K(L)$ la courbure totale du morceau de courbe compris entre l'origine 0 et le point à distance L de celle-ci, l la fonction longueur mesurée à partir de l'origine et $k(l)$ la fonction courbure :

$$K(L) = \int_0^L k(l)\, dl$$

Une formule analogue est valable aussi pour la torsion totale, qui peut être obtenue en *intégrant* la fonction de torsion.

Les nœuds ont une forme cachée

Jusqu'à présent, on a regardé la forme d'une seule courbe, comme s'il n'y avait qu'elle, isolée de toutes les autres courbes. Mais en mathématiques on a souvent besoin de considérer des familles de courbes, dépendant d'un ou de plusieurs paramètres. Varier ces paramètres revient à déformer la courbe. Pour en avoir une image, on peut penser à un fil de fer que l'on réchaufferait, la dilatation le ferait se déformer. Dans ce cas, on a une déformation à un paramètre, qui est la température, à chaque valeur de la température correspondant une forme particulière du fil de fer.

Lors d'une déformation de la courbe, il peut arriver qu'elle se croise elle-même, ou qu'apparaissent des points où son parcours change brutalement de direction, comme dans le cas du profil montagneux dont la pente change brusquement. Tant que ce n'est pas le cas, les mathématiciens disent qu'on a des courbes *lisses*. Lorsque l'on déforme une courbe tout en la gardant lisse, on peut à tout moment définir la longueur et la courbure totale. Ces grandeurs changent en général, ce qui traduit le fait que la courbe change de forme.

Une courbe lisse qui a deux extrémités peut être déformée jusqu'à être une ligne droite : on peut toujours dénouer un lacet (enfin... théoriquement !). Mais quelque chose de spécial arrive lorsque l'on considère une courbe lisse fermée. La plus simple est le cercle. Comme dans le cas des courbes ayant deux extrémités libres, on pourrait s'attendre à ce que toute autre courbe fermée puisse se déformer en un cercle.

Mais ce n'est pas le cas. Il y a des courbes plus compliquées, que l'on ne peut pas déformer jusqu'à obtenir un cercle. Les mathématiciens parlent dans ce cas de *nœuds*. On peut les déformer autant que l'on veut, elles resteront toujours nouées. L'exemple le plus simple est celui que l'on appelle le *nœud de trèfle* (Fig.15). Dans la figure 16 on a représentés d'autres nœuds.

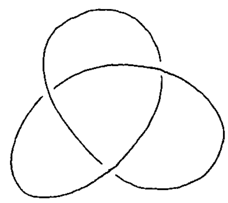

Fig. 15

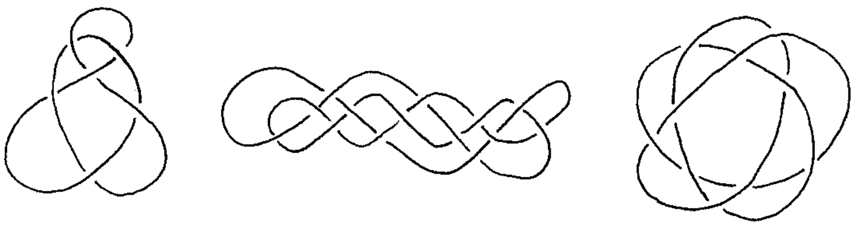

Fig. 16

Imaginons maintenant que toutes les courbes fermées de l'espace usuel forment un autre espace, dans lequel un point représente une telle courbe. On l'appellera *espace des courbes*. Des points proches dans l'espace des courbes représentent des courbes peu différentes l'une de l'autre.

Ce qu'on vient de faire est général. Les mathématiciens ont appris à construire de nouveaux espaces à chaque fois qu'ils désirent comparer entre eux des objets ayant quelque chose en commun. Chacun de ces objets est alors perçu comme un point constitutif du nouvel espace. On oublie volontairement les particularités de la forme de chaque objet pris séparément - dans notre cas d'une courbe fermée fixée - afin de pouvoir se concentrer sur les propriétés de groupe de tous les objets. C'est comme si, au lieu de regarder une fleur en particulier dans un champ, on regardait le champ de haut, à partir d'un avion. On ne voit plus alors aucune fleur individuellement, mais apparaissent clairement à la conscience des régions de couleurs différentes, séparées par des frontières invisibles de près.

On peut faire la même chose pour l'espace des courbes. Si l'on met ensemble les nœuds pouvant se déformer les uns dans les autres, apparaissent des régions séparées les unes des autres par des frontières à l'intérieur de l'espace des courbes. Dans la figure 17 on a dessiné plusieurs courbes de la région du cercle et dans la figure 18 des courbes de la région du nœud de trèfle. Les mathématiciens appellent *type de nœud* une telle région, car ils ont décidé de comprendre justement en quoi consiste le fait d'être noué. En plus de la "forme" intuitive mesurée par la courbure totale, et qui ne se conserve pas pendant les déformations, ils ont pressenti un caractère caché de la forme, beaucoup plus difficile à cerner, qui fait qu'une courbe est difficile à dénouer. Un caractère de la forme qui serait commun à toutes les courbes d'une même région, c'est-à-dire à un type de nœud.

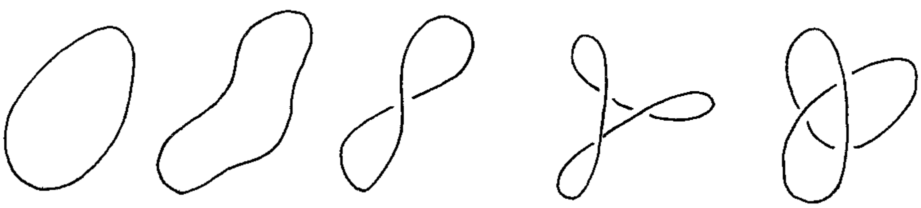

Fig. 17

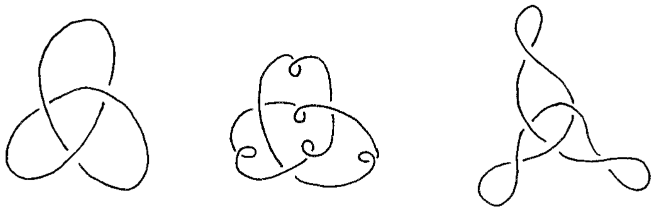

Fig. 18

Afin de faire apparaître un premier aspect de cette forme cachée, rappelons-nous que la courbure totale de n'importe quel cercle vaut 2π. Mais déjà intuitivement le cercle est la plus simple des courbes fermées.

Cette simplicité intuitive a une correspondance quantitative, c'est que la courbure totale de n'importe quelle courbe fermée est supérieure ou égale à 2π. On pourrait alors espérer que le fait d'avoir une courbure totale égale à 2π caractérise les cercles.

Ce n'est pas tout à fait le cas, mais presque : si une courbe fermée sans croisements est de courbure totale 2π, alors elle est forcément plane, et de plus lorsque on la parcourt, on tourne toujours dans le même sens, comme lorsque on dessine le contour apparent d'un œuf. Mais dès que la courbe se gondole, en sortant dans l'espace ou en devenant bosselée, sa courbure totale croît.

Si une courbe de l'espace est de courbure totale 2π, alors elle est contenue dans un plan et dans ce plan elle est le bord d'un ensemble convexe.

L'inégalité de Fary-Fenchel-Milnor

Qu'en est-il de la courbure totale des courbes nouées ? Déjà, d'après ce qu'on vient de voir, elle ne peut valoir 2π, sinon on pourrait les déformer facilement en des cercles, comme on arrondirait le contour apparent d'un œuf. Ce qui est surprenant est que cette courbure totale dépasse toujours 4π. Ceci correspond à l'idée intuitive que pour fabriquer une courbe nouée, par exemple à l'aide d'un fil de fer, il faut s'éloigner beaucoup de la forme du cercle en recourbant de manière compliquée la ligne avant de revenir au point de départ. On comprend mieux ainsi la raison du passage *discontinu* de la valeur 2π à la valeur 4π.

Il y a des courbes nouées que l'on peut déformer de manière à ce qu'on s'approche aussi près que l'on veut de la valeur 4π. En général, pour chaque région regroupant des courbes fermées sans croisements se déformant les unes en les autres, on peut regarder les diverses valeurs de la courbure totale. Tout en restant à l'intérieur de la région, la courbure peut être augmentée de manière continue jusqu'à l'infini. Il suffit pour cela de choisir un petit morceau de la courbe sur lequel on introduit une spirale semblable à celle d'un fil de téléphone et d'augmenter ensuite de plus en plus la densité des spires (Fig.19). Ce qui est moins clair, c'est comment diminuer la courbure totale. Intuitivement on comprend qu'on pourrait le faire en tirant sur le fil, mais on ne peut pas en général la diminuer beaucoup sans que diverses parties de la courbe arrivent à se toucher.

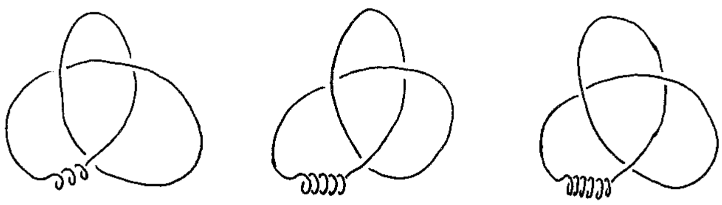

Fig. 19

En fait, on a toujours la situation suivante : lorsque l'on fait varier la courbe dans une même région, on obtient tous les nombres supérieurs à $2p\pi$, où p est un nombre entier, sans que la valeur $2p\pi$ soit jamais atteinte. Sauf bien sûr dans le cas le plus simple, de la région contenant le cercle. Un nombre p apparaît ainsi, dénommé le *nombre de ponts du nœud* et qui est notre première manifestation du caractère caché de la forme dont on parlait précédemment. On n'expliquera pas ici la raison du nom employé pour ce nombre, car cela n'a pas de lien direct avec notre propos. On dira seulement que pour la région du nœud de trèfle ce nombre est égal à 2.

Pour définir le nombre de ponts d'un nœud K_0, on regarde tous les nœuds K qui ont le même type que K_0. Si l'espace ambiant est raporté à un repère cartésien et que z est l'une des fonctions de coordonnées, on regarde le nombre de maxima locaux de la restriction de z à K. Le nombre de ponts de K est par définition le minimum de ce nombre lorsque K varie, à type de nœud fixé.

Il existe des nœuds ayant un nombre de ponts aussi grand que l'on veut. Plus ce nombre est grand, et plus le nœud est compliqué. On aurait pu dire la même chose au sujet de la courbure totale. Il y a pourtant une différence essentielle entre les deux : la courbure totale ne mesure que la complexité d'une courbe donnée, immobile, sans nous dire si elle peut ou non être dénouée. Le fait que le nombre p attaché à une courbe soit au moins 2 nous dit en plus que la courbe ne pourra jamais être dénouée. Le nombre p estime ainsi la complexité du *nouage* de la courbe, si on appelle ainsi le caractère de la forme se conservant lors des déformations permises. On se retrouve ainsi avec deux mesures de la complexité d'une courbe, sa courbure totale et son nombre de ponts, l'une pouvant prendre des valeurs de manière continue et l'autre de manière discontinue - seulement des valeurs entières - les deux mesures de complexité étant reliées par une inégalité. Mathématiquement celle-ci s'écrit de la manière suivante :

$$\int_C k(l)\, dl \;\geq\; 2p\pi$$

Ce théorème important a été découvert par les mathématiciens I.Fary, W. Fenchel et J.Milnor à la fin des années 1940. Depuis, il a inspiré beaucoup d'autres recherches. Donnons l'exemple d'un résultat des années 1970, dû aux mathématiciens R.Langevin et H.Rosenberg. Mais avant de présenter ce résultat, on devra parler de la forme des surfaces.

La courbure des surfaces

Jusqu'à présent nous avons parlé seulement de la forme des courbes. On a commencé par celles-ci en disant qu'elles servaient à dessiner ce que l'on voyait. Parmi ce que l'on voit se trouvent des objets ou des étendues limitées par des surfaces. Pensons par exemple à des collines, des fruits, ou des êtres vivants. Comme nous nous sommes entraînés avec les courbes, nous pouvons essayer de définir à présent une courbure pour les surfaces.

C'est C.F.Gauss qui comprit dans les années 1820 que l'on pouvait imiter la construction faite pour les courbes. Expliquons son idée.

Pour cela, imaginons que notre surface est un paysage de collines, comme celui qui était parcouru par la route au début de notre histoire. Plaçons-nous en un endroit quelconque de cette surface - sur le versant de l'une des collines par exemple - et prenons la direction *perpendiculaire* au sol à cet endroit. Comme lorsqu'on étudiait les courbes, on peut faire correspondre à cette direction un point de la sphère céleste. Ainsi on associe à cet endroit - à notre point de la surface - un point de la sphère céleste (Fig. 20).

On note $\mathbf{S}^2$ la sphère usuelle et $S \subset E$ la surface étudiée. On définit alors *l'application de Gauss* $N : S \longrightarrow \mathbf{S}^2$ qui à chaque point associe un vecteur normal unitaire à S en ce point, le choix étant continu.

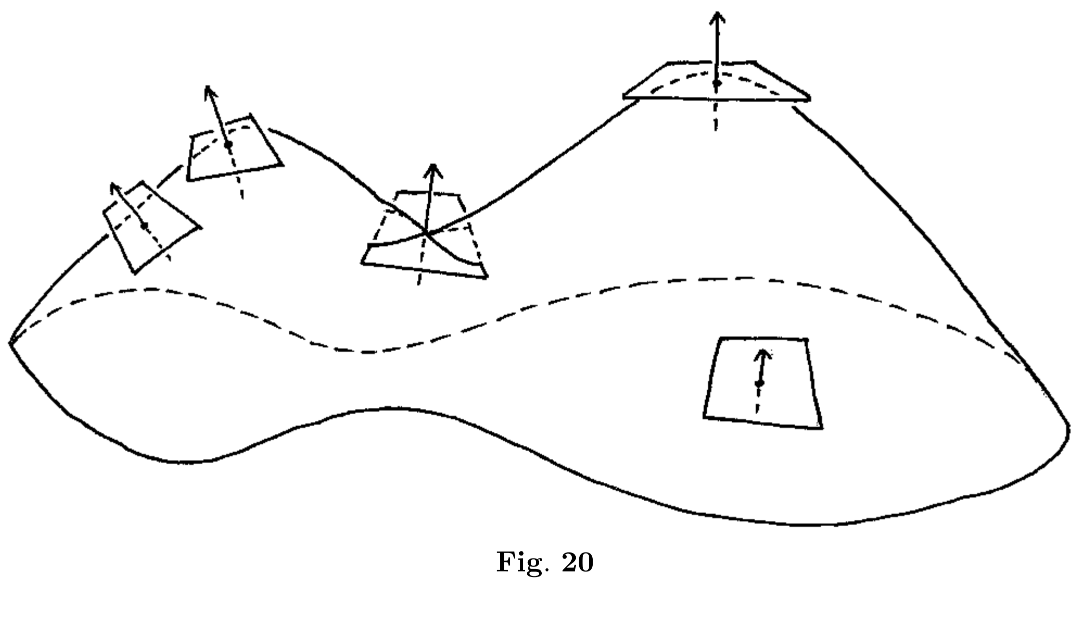

Fig. 20

Maintenant, supposons qu'on veuille mesurer la courbure en un point de la surface. On va imiter ce qu'on a fait pour les courbes, où l'on avait pris des morceaux de courbes entourant le point et leurs images sur la sphère céleste, puis on avait regardé le rapport de leurs longueurs. Ici on va prendre des morceaux de surface entourant le point, leurs images sur la sphère céleste sont des morceaux de sphère. Ces divers morceaux de surface n'ont pas de longueur, par contre ils ont une *aire*. On fait alors les quotients des aires d'un morceau céleste et du morceau terrestre auquel il correspond. On regarde de quel nombre s'approche ce quotient lorsque l'on prend des morceaux de surface de plus en plus petits entourant le point. Ce nombre est *la valeur de la fonction courbure* au point respectif.

Nous avons supposé ici que l'on savait associer une aire à n'importe quel morceau de surface. Les mathématiciens ont défini de manière précise cette notion, grâce au processus d'intégration dont on a parlé auparavant.

Venons-en au théorème de Langevin-Rosenberg.

Pensons à nouveau à une courbe fermée de l'espace. Cette fois-ci faite en fil de fer recouvert d'une gaine en plastique. La surface de cette gaine est un tube refermé sur lui-même (Fig. 21). Oublions maintenant le fil de fer et ne regardons plus que la surface du tube. Comme on avait déformé des nœuds, on peut aussi déformer cette surface. Tant qu'elle ne se froisse pas, on pourra toujours définir une fonction courbure et une courbure totale.

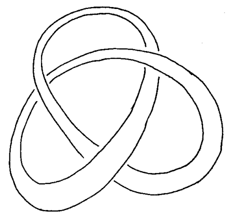

Fig. 21

Le théorème démontré par R.Langevin et H.Rosenberg affirme que *la courbure totale d'une telle surface tubulaire est forcément supérieure ou égale à* 8π. De plus, *si la surface est obtenue à partir d'une courbe vraiment nouée - qui ne peut se déformer en un cercle - alors sa courbure est supérieure ou égale à* 16π.

On pourra constater la ressemblance de comportement avec le théorème découvert par I.Fary et J.Milnor. Comme pour les courbes, un tube doit être très recourbé si on veut qu'il soit noué. La courbure des surfaces définie par Gauss permet de rendre cette intuition quantitative, comme cela avait été fait pour les courbes.

Les résultats inspirés par le théorème de Fary-Fenchel-Milnor ont en commun de vouloir comprendre les liens entre les aspects *métriques* et les aspects *topologiques* des espaces géométriques. Expliquons ce que l'on entend par là.

Métrique et topologie

Tout d'abord, le terme *espace* ne désigne plus seulement l'espace ambiant, auquel nos mouvements et notre sens visuel nous ont habitués. En réfléchissant aux propriétés intuitives de cet espace, Euclide construisit un espace géométrique qui lui ressemble le plus possible. Cet espace euclidien a, comme l'intuition nous l'indique, trois dimensions. L'une des propriétés utilisées dans sa construction est la possibilité de mener par tout point une unique parallèle à une droite donnée. Ceci nous a servi pour reporter sur le globe céleste les directions des étoiles, lorsque l'on a défini la notion de courbure.

Au $XIX^{ème}$ siècle furent découvertes de nouvelles *géométries*, semblables en presque tout point à la géométrie euclidienne, mais avec des propriétés de parallélisme différentes de celle-ci. En particulier les mathématiciens apprirent à construire des espaces ambiants ayant encore trois dimensions mais dans lesquels on peut mener une infinité de parallèles par un point à une droite donnée. Cette propriété surprenante fut au début très difficile à comprendre et stimula beaucoup la réflexion.

On commença aussi à savoir définir et étudier des espaces ayant plus de trois dimensions, la dimension pouvant prendre maintenant n'importe quelle valeur entière et même une valeur infinie. Un exemple est l'espace de toutes les courbes fermées, que l'on a brièvement présenté lorsque nous avons parlé des nœuds.

Dans ces espaces on peut aussi imaginer des courbes, comme dans le cas discuté par nous, de l'espace euclidien. Mais on peut imaginer aussi d'autres objets géométriques, ayant eux aussi n'importe quelle dimension. Ce qu'il y a en commun entre tous ces espaces c'est d'admettre une mesure des distances, faite à l'aide de la mesure des longueurs des courbes tracées dessus. Les mathématiciens disent qu'il s'agit dans ce cas d'*espaces métriques.*

Afin de mesurer la forme des espaces métriques, on généralisa la notion de courbure que nous avons expliquée dans le cas des courbes et des surfaces. Dans les années 1850, B.Riemann introduisit une notion de courbure pour des espaces de dimension finie quelconque, sans même supposer qu'ils sont des parties d'un espace plus grand. La seule propriété dont il avait besoin était que ces espaces soient métriques.

Cette notion générale de courbure a eu une application surprenante dans la théorie de la relativité générale d'A.Einstein dans les années 1910. Einstein avait déjà compris que la nature intime de la lumière se dévoilait mieux si on pensait ensemble l'espace et le temps. En les pensant ensemble, il en fit *l'espace-temps*, un espace géométrique de dimension quatre qui combine à la fois l'espace et le temps de la physique classique initiée par Newton au $XVII^{ème}$ siècle. Dans la théorie de la relativité générale, les mouvements dans l'univers sont interprétés à l'aide de la forme de l'espace-temps. Plus précisément, de l'aspect de sa forme dont nous avons le plus discuté jusqu'à présent : *sa courbure.*

Mais à l'aide de la courbure on n'accède qu'à un aspect de la forme. Comme dans le cas des courbes, en fait chaque espace a une forme plus subtile derrière sa forme métrique. La *topologie* est la branche des mathématiques qui étudie en toute généralité les aspects de la forme d'un espace ne dépendant pas de sa métrique, c'est-à-dire ne dépendant pas de la mesure des distances. On en a vu un exemple, dans la propriété d'une courbe d'être nouée. Cette propriété est indépendante des distances entre les divers points de la courbe, puisque elle se conserve si on la déforme.

Les techniques de base de la topologie, valables en toute dimension, ont été introduites par H.Poincaré dans les années 1890. La topologie est devenue ensuite une branche à part entière des mathématiques et s'est beaucoup développée tout au long du $XX^{ème}$ siècle.

Lorsque l'inégalité de Fary-Fenchel-Milnor fut découverte, elle surprit par sa simplicité. La notion générale de courbure et les propriétés topologiques des espaces de n'importe quelle dimension étaient suffisamment développées pour que l'on envisage de généraliser cette inégalité en toute dimension. De telles généralisations furent faites, on en a vu un exemple dans le théorème de Langevin-Rosenberg. Mais de manière surprenante, cette inégalité n'a pas cessé de stimuler l'imagination des mathématiciens qui ont sans cesse découvert de nouvelles directions de généralisation. Elles ont toutes en commun de vouloir mieux comprendre le lien entre les aspects métriques et les aspects topologiques de la forme d'un objet. Les uns apparemment continus, les autres apparemment discontinus, l'inégalité de Fary-Fenchel-Milnor et ses généralisations montrent qu'en fait ces deux aspects sont reliés de manière subtile.

Regardons avec plus de soin les formes du monde, elles réservent encore bien des surprises!

Remerciements : Je tiens à remercier Farouk Boucekkine pour ses suggestions et son aide à la mise en page.

Références

[1] M. Berger, B. Gostiaux; *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces.* 3-ème édition, PUF, 1987.

[2] M.P. do Carmo; *Differential geometry of curves and surfaces.* Prentice-Hall, 1976.

[3] D. Hilbert,S. Cohn-Vossen; *Geometry and the Imagination.* Chelsea, 1990.

Pour aller plus loin :

[4] P. Dombrowski; *150 years after Gauss' <<disquisitiones generales circa superficies curvas>>.* Astérisque 62, S.M.F., 1979.

[5] I. Fary; *Sur la courbure totale d'une courbe gauche faisant un nœud.* Bulletin de la SMF **77** (1949), 128-138.

[6] W. Fenchel; *On the differential geometry of closed curves.* Bull. of Amer. Math. Soc. **15** (1951), 44-54.

[7] R.Langevin, H.Rosenberg; *On curvature integrals and knots.* Topology **15** 4 (1976), 405-416.

[8] J. Milnor; *On total curvature of knots.* Ann. of Math. **52** (1950), 248-260.