L.G.Vidiani 64 rue de l'EUROPE 21121 FONTAINE LÈS DIJON TEL : 03 80 56 65 54
Adresse email Internet : $lg\_vidiani@club-internet.fr$
(emtex \ travTeXzipdefaillant \ boufocq.tex) version 25 08 06 17h20

CUBIQUES CIRCULAIRES PASSANT PAR LEUR FOYER SINGULIER

Jacques Bouteloup Rouen jacques.bouteloup@wanadoo.fr

(1) Généralités

Ces courbes possèdent un grand nombre de propriétés remarquables. Souvent appelées "cubiques circulaires focales", elles sont notamment étudiées dans les articles de Quadrature de Roux et Tixier (*) sur les configurations de Reye, où elles sont qualifiées d'axées. Dans ces articles comme dans beaucoup d'autres, il n'est pas fait de distinction entre éléments réels ou complexes. L'étude ci-après se place par contre en espace euclidien, supposant donc les éléments introduits (droites, cercles, cubiques) réels. Bien entendu il est nécessaire de supposer cet espace plongé dans son complexifié projectif, ce qui permet d'introduire les points cycliques et de définir les cubiques circulaires comme cubiques les contenant. On appelle, depuis Plücker, foyer d'une courbe un point tel que les isotropes issues de ce point soient tangentes à la courbe. Il est dit singulier si les points de contact sont les points cycliques. Le titre de cette étude est ainsi justifié. Un but fondamental de cette étude est de démontrer l'équivalence de ce passage d'une cubique circulaire par son foyer singulier avec la propriété d'être "auto-isogonale de première espèce", cette notion étant explicitée ci-dessous.

---

(2) Cubiques auto-isogonales par rapport à un triangle ABC

La notion de points isogonaux par rapport à un triangle ABC est supposée connue. Pour tous les points non situés sur les cotés de ABC, on a une correspondance réciproque entre M et son isogonal M'. Les cubiques considérées sous ce titre sont les cubiques passant par $A,\ B,\ C$ qui contiennent M' lorsqu'elles contiennent M.

L'isogonalité se traduit très simplement en coordonnées normales (appelées par certains trilinéaires en accord avec l'anglais trilinears). Sauf mention expresse, ce seront toujours celles utilisées. Si M, non situé sur les cotés de ABC, a pour coordonnées (x, y, z), M' a pour coordonnées $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z})$. Le passage par A, B, C de la cubique se traduit par la nullité des coefficients de x^3, y^3, z^3, d'où l'équation :

$$x(\alpha y^2 + \alpha' z^2) + y(\beta z^2 + \beta' x^2) + z(\gamma x^2 + \gamma' y^2) + \delta xyz = 0$$

Le passage par le point $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z})$ se traduit après multiplication par $x^2y^2z^2$, par

$$x(\alpha' y^2 + \alpha z^2) + y(\beta' z^2 + \beta x^2) + z(\gamma' x^2 + \gamma y^2) + \delta xyz = 0$$

.

Dans l'hypothèse d'isogonalité, les deux équations doivent représenter la même cubique. Si $\delta \neq 0$, il en résulte $\alpha = \alpha',\ \beta = \beta',\ \gamma = \gamma'$ et l'équation

$$\alpha x(y^2 + z^2) + \beta y(z^2 + x^2) + \gamma z(x^2 + y^2) + \delta xyz = 0$$

.

Nous appellerons cubique auto-isogonale de **première espèce** par rapport à ABC une cubique représentée par une telle équation.

Si $\delta = 0$, on peut simplement écrire : $\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha'} = ... = \frac{\gamma}{\gamma'} = k$. On en déduit $\alpha^2 = \alpha'^2$ et $k = \pm 1$. L'hypothèse $k = 1$ conduit à un cas particulier des cubiques auto-isogonales de première espèce. Par contre $k = -1$ conduit à une nouvelle famille de cubiques appelées auto-isogonales de **deuxième espèce** d'équation :

$$\alpha x(y^2 - z^2) + \beta y(z^2 - x^2) + \gamma z(x^2 - y^2) = 0$$

.

On constate que cette relation exprime l'annulation du déterminant de lignes successives :

$$(\alpha, \beta, \gamma),\ (x, y, z),\ (\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z})$$

.

Il existe donc un point remarquable Ω (α, β, γ), appelé en général pivot, tel que M et son isogonal M' soient alignés avec Ω. Ce sont les cubiques à pivot, possédant de nombreux cas particuliers remarquables, étudiés dans des

---

(*) *Q46 automne 2002 et Q47 janvier 2003* articles de Quadrature ou du bulletin de l'A.P.M. : cubique de Darboux (*), de Thomson (**), de Neuberg (***) (dite aussi de Hain (****) , ou de Vigarié (*****)). Notre but étant d'étudier celles de première espèce, beaucoup moins connues, nous n'y reviendrons qu'à propos des trois possédant les deux propriétés.

---

(3) Cubiques auto-isogonales de première espèce circulaires

Nous désignons par A, B, C les angles aux sommets de ABC (de mesures comprises entre 0 et π), par a, b, c les longueurs de ses cotés.

Les valeurs $e^{iB}, e^{-iA}, -1$ représentent les coordonnées normales d'un point cyclique I. On constate en effet qu'elles vérifient : $\sin A.x + \sin B.y + \sin C.z = 0$; $\sin A.yz + sinB.zx + \sin C.xy = 0$, pouvant s'écrire $ax + by + cz = 0$; $ayz + bzx + cxy = 0$, le situant à l'intersection de la droite de l'infini et du cercle circonscrit à ABC.

L'autre point cyclique J est représenté par les conjugés $e^{-iB}, e^{iA}, -1$ qui sont aussi les inverses, ce qui montre que si l'on étend la notion au complexifié projectif, I et J sont isogonaux.

Le remplacement de x, y, z par ces valeurs dans l'équation de la cubique montre que I (et par suite son conjugué J) appartiennent à la courbe si $\delta = \alpha(e^{iA}+e^{-iA})+\beta(e^{iB}+e^{-iB})+\gamma(e^{iC}+e^{-iC})$, soit : $\delta = 2(\alpha. \cos A+\beta. \cos B+\gamma. \cos C)$.

Nous avons ainsi obtenu la condition pour que la cubique soit circulaire.

$F(x, y, z) = 0$ désignant l'équation de la cubique, les valeurs des dérivées partielles pour les coordonnées de I donnent les coefficients de la tangente en ce point, dont l'équation peut s'écrire en remplaçant $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ par a, b, c :

$$e^{-iA}(b\beta - c\gamma)x + e^{iB}(c\gamma - a\alpha)y + e^{-iA}e^{iB}(b\beta - a\alpha)z = 0$$

Nous adjoignons l'équation de la tangente en J obtenue en remplaçant les coefficients par leurs conjugués. Le système obtenu nous conduit aux coordonnées du foyer singulier F dont les coordonnées peuvent s'écrire :

$$a(a\alpha - b\beta)(c\gamma - a\alpha)\ ;\ b(b\beta - c\gamma)(a\alpha - b\beta)\ ;\ c(c\gamma - a\alpha)(b\beta - c\gamma)$$

ou encore $x = \frac{a}{(b\beta - c\gamma)}$; $y = \frac{b}{(c\gamma - a\alpha)}$; $z = \frac{c}{(a\alpha - b\beta)}$.

L'isogonal Ω de F de coordonnées $x' = \frac{(b\beta - c\gamma)}{a}$; $y' = \frac{(c\gamma - a\alpha)}{b}$; $z' = \frac{(a\alpha - b\beta)}{c}$ vérifie : $ax' + by' + cz' = 0$ et est donc à l'infini.

Le remplacement de x, y, z par les coordonnées de Ω dans le premier membre de l'équation de la cubique conduit après remplacement des cosinus par leurs valeurs en fonction de a, b, c et multiplication par $a^2b^2c^2$, au polynôme :

$$\begin{gathered} a\alpha(b\beta - c\gamma)[b^2(a\alpha - b\beta)^2 + c^2(c\gamma - a\alpha)^2] \\ +b\beta(c\gamma - a\alpha)[c^2(b\beta - c\gamma)^2 + a^2(a\alpha - b\beta)^2] \\ +c\gamma(a\alpha - b\beta)[a^2(c\gamma - a\alpha)^2 + b^2(b\beta - c\gamma)^2] \\ +(b\beta - c\gamma)(c\gamma - a\alpha)(a\alpha - b\beta)[a\alpha(b^2 + c^2 - a^2) + b\beta(c^2 + a^2 - b^2) + c\gamma(a^2 + b^2 - c^2)] \end{gathered}$$

L'ensemble des trois premières lignes est une somme de six termes dont quatre contiennent $(b\beta - c\gamma)$ en facteur. On met aisément ce terme en facteur dans la somme des deux autres, donc en facteur général. On recommence avec $(c\gamma - a\alpha)$ puis $(a\alpha - b\beta)$. On constate alors que le facteur résiduel est l'opposé de celui mis entre crochet dans la quatrième ligne. Autrement dit, ce polynôme est identiquement nul.

Ainsi, Ω appartient à la cubique, et est donc son point à l'infini réel. Son isogonal F appartient donc aussi à la cubique qui passe ainsi par son foyer singulier. L'appartenance de Ω à la droite de l'infini entraîne la présence de F sur le cercle circonscrit à ABC.

Notons que lorsque $\alpha = \frac{1}{a}$, $\beta = \frac{1}{b}$, $\gamma = \frac{1}{c}$, le foyer singulier n'est plus défini, ses trois coordonnées s'annulant. Donnant à α, β, γ les valeurs bc, ca, ab, nous obtenons $\delta = a^2 + b^2 + c^2$, et le premier membre de l'équation s'écrit : $(ax + by + cz)(ayz + bzx + cxy) = 0$. La cubique est décomposée en la droite de l'infini et le cercle circonscrit à ABC. Ce cas est écarté dans la suite.

---

(4) Nouvelle définition remarquable

Nous supposerons dans la suite $\alpha\beta\gamma \neq 0$, et désignons la cubique par (Γ). Les points P, Q, R d'intersections résiduelles de (Γ) avec BC, CA, AB ont pour coordonnées : $0, \beta, -\gamma$; $-\alpha, 0, \gamma$; $\alpha, -\beta, 0$. L'hypothèse faite entraîne qu'ils sont distincts de A, B, C donc distincts entre eux. Ils sont alignés sur la droite : $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 0$ que nous appellerons droite caractéristique. C'est la polaire trilinéaire de (α, β, γ) appelée par certains "racine". ABC étant

---

(*) *Q47 p 25*

(**) *APM 420 p 92*

(***) *voir http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Neuberg.htm*

(****) *Eugène, Marius, François, nommé Chevalier de la Légion d'Honneur le 29 décembre 1921, décédé le 30 juin 1922*

(*****) *Émile, géographe né à Paris le 26-2-1865, nommé Chevalier de la Légion d'Honneur le 29 12 1922, décédé le 28 juin 1934 à Rodez* donné, elle caractérise (Γ), car elle détermine α, β, γ à un facteur près, d'où δ à ce même facteur près pour que la courbe soit circulaire. Le triangle ABC et la droite caractéristique déterminent un quadrilatère complet, dont A, B, C, P, Q, R sont six sommets distincts.

Soit $M(x, y, z)$ un point non situé sur les cotés. Il détermine une conique (K) inscrite dans ABC dont il soit foyer, le cercle principal étant son cercle podaire (droite si M est sur le cercle circoncrit, la conique étant alors une parabole). D'après le théorème de Poncelet, le deuxième foyer est l'isogonal M' de M. Soit M_1 le symétrique de M par rapport à BC. La droite M_1M' coupe BC au point de contact U avec la conique. On obtient de même les points de contact V, W avec les autres cotés. Une propriété classique affirme la concurrence de AU, BV, CW en un point Z dit point de Brianchon de la conique. S'il a pour coordonnées (λ, μ, ν), l'équation tangentielle de la conique est : $\frac{vw}{\lambda} + \frac{wu}{\mu} + \frac{uv}{\nu} = 0$.

Le point M_1 a pour coordonnées $(-x, y + 2x.\cos C, z + 2x.\cos B)$. Les coordonnées de M' peuvent être prises égales à (yz, zx, xy). On en déduit des coefficients de la droite $M'M_1$: $x(y^2 - z^2) + 2x^2(y.\cos C - z.\cos B)$; $y(z^2 + x^2) + 2xyz\cos B)$; $-z(x^2 + y^2) - 2xyz.\cos C$.

On en déduit pour U les coordonnées : 0, $z(x^2 + y^2) + 2xyz.\cos C$, $y(z^2 + x^2) + 2xyz.\cos B$. En divisant par le produit des deux dernières, nous les remplaçons par leurs inverses, ce qui permet de permuter circulairement, et de définir le point de Brianchon de la conique par $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}$ avec : $p = x(y^2+z^2)+2xyz.\cos A$, $q = y(z^2+x^2)+2yz.\cos B$, $r = z(x^2 + y^2) + 2xyz.\cos C$, l'équation tangentielle étant $pvw + qwu + ruv = 0$.

Des coefficients de PQR pouvant être pris égaux à $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$, la condition de tangence de la conique à PQR s'écrit en dévisant par $\alpha\beta\gamma$: $\alpha x(y^2 + z^2) + \beta y(z^2 + x^2) + \gamma z(x^2 + y^2) + 2xyz(\alpha.\cos A + \beta.\cos B + \gamma.\cos C) = 0$.

C'est exactement l'équation de (Γ) ! Ainsi :

Une condition nécessaire et sufffisante pour que la conique inscrite soit tangente à PQR est que le foyer M soit un point de (Γ).

Un quadrilatère complet étant caractérisé par quatre droites distinctes se coupant en six points distincts, on peut choisir trois d'entre elles pour former un triangle ABC, la quatrième constituant la droite caractéristique PQR. On définit ainsi une cubique (Γ) circulaire auto-isogonale de première espèce qui constitue le lieu des foyers des coniques tangentes aux quatre droites. Mais l'on aurait pu aussi bien choisir l'un des triangles AQR, BRP, CPQ, les droites caractéristiques étant respectivement BCP, CAQ, ABR. Le lieu des foyers des coniques étant bien déterminé par les quatre droites, on en conclut que la courbe (Γ) peut-être définie comme auto-isogonale de première espèce par rapport aux quatre triangles cités. Il en résulte que le foyer F appartient aussi aux cercles circonscrits à BCP, CAQ, AQR. C'est le point de Miquel du quadrilatère complet. Son isogonal étant à l'infini, c'est le foyer de la parabole tangente aux quatre droites.

Rappelons également que le lieu des centres des coniques d'un faisceau tangentiel est une droite. Les couples (A, P), (B, Q), (C, R) constituant des coniques décomposées en deux points du faisceau, elle passe par les milieux de AP, BQ, CR. Elle caractérise (Γ) quand ABC est fixé. En effet P est à l'intersection de BC et de l'homothétique $(A, 2)$ de cette droite, et on détermine de même Q et R.

ABC étant toujours fixé, (Γ) est caractérisée par la donnée de deux coniques inscrites. La droite caractéristique est en effet déterminée comme leur quatrième tangente commune. Soit $\lambda vw + \mu wu + \nu uv = 0$ et l'équation analogue avec λ', μ', ν' les équations tangentielles de ces deux coniques. La tangence de la droite caractéristique $\beta\gamma x+\gamma\alpha y+\alpha\beta z = 0$ se traduit après division par $\alpha\beta\gamma$ par $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma = 0$; $\lambda'\alpha+\mu'\beta+\nu'\gamma = 0$, d'où à un facteur près : $\alpha = \mu\nu'-\nu\mu'$; $\beta = \nu\lambda' - \lambda\nu'$; $\gamma = \lambda\mu' - \lambda'\mu$.

---

(5) Utilisation du groupe fondamental d'une cubique

Ce groupe a notamment été évoqué dans l'article sur la cubique de Thomson (numéro 260 du bulletin de l'A.P.M.E.P. (*)) et dans les articles de Roux et Tixier dans Quadrature. Rappelons qu'il est caractérisé par le choix arbitraire d'un point Ω de la cubique. Étant donnés deux points M et N de cette courbe, la droite MN recoupant en P, on leur fait correspondre l'intersection résiduelle de ΩP. C'est une loi de groupe commutatif, qu'il est légitime de noter additivement, Ω étant l'élément neutre. Il est usuel de désigner l'élément neutre par 0 en notation additive. Les notations Ω et 0 sont donc équivalentes. Il pourra être plus évocateur d'utiliser la seconde. Nous désignons par M^* le tangentiel de M (intersection résiduelle de la tangente en M). le point Ω^* joue un rôle fondamental : $-M$ est l'intersection résiduelle de Ω^*M, on a la relation $M^* = \Omega^* - 2M$.

Considérons des points M_i de la courbe. L'alignement de trois d'entre eux se traduit par $\sum M_i = \Omega^*$; la présence de six d'entre eux sur une conique se traduit par $\sum M_i = 2\Omega^*$.

Nous appliquons à une cubique circulaire en choisissant pour Ω le point à l'infini réel. Il en résulte que les points cycliques I et J vérifient $I + J = \Omega^*$, ce point étant donc le point d'intersection avec l'asymptote réelle. La condition pour que quatre points M_i de la courbe soient cocycliques s'obtient en écrivant qu'avec I et J ils constituent six points d'une conique. On obtient donc $\sum M_i = \Omega^*$. Si la cubique passe par son foyer singulier F, on a : $F = I^* = \Omega^* - 2I = J^* = \Omega^* - 2J$. On en déduit : $2F = 2\Omega^* - 2(I + J) = 0$ et $F^* = \Omega^* - 2F = \Omega^*$. la tangente en

(*) *Bulletin 407 décembre 1996 p 724 solution Bulletin 420 novembre 98 et p 90-98*

F passe ainsi par Ω^*. Supposons que la cubique soit auto-isogonale de première espèce par rapport à ABC, avec la droite caractéristique PQR. L'alignement de P, Q, R se traduit par $P+Q+R=\Omega^*$. On a vu que le cercle circonscrit à AQR passait par F, d'où : $A+Q+R+F=\Omega^*$, $A+\Omega^*-P+F=\Omega^*$ et $A=P-F=P+F$. De même $B=Q+F$, $C=R+F$.

---

(6) Structure d'auto-isogonale de première espèce sur une cubique circulaire passant par son foyer singulier

Nous avons donc en vue ici une réciproque de la propriété de (3). Soit (Γ) de foyer singulier F, point à l'infini réel Ω utilisé pour caractériser le groupe associé. Rappelons que $F+F=0$.

Soit P un point arbitraire de (Γ). Nous introduisons $A=P+F$. Soit Q un point de (Γ), non situé sur la droite PA et la tangente en P, et tel que la tangente en ce point ne passe ni par P, ni par A. La droite PQ recoupe (Γ) en R, et nous posons $B=Q+F$ et $C=R+F$.

Les hypothèses sur les tangentes entraînent que P, Q, R sont distincts, donc A, B, C distincts - Q non élément de AP entraîne A non situé sur la droite P, Q, R donc distinct de P, Q, R. L'hypothèse de la tangente en Q passant par A se traduirait par $\Omega^*-2Q=A \iff P+R-Q=P+F \iff R=Q+F$ - cette relation n'est donc pas vérifiée.

$$\left\{\begin{array}{ll}
B=P \iff Q+F=P,\ Q=P+F=A & \text{rejeté}\\
B=Q \iff Q+F=Q,\ F=0 & \text{rejeté}\\
B=R \iff Q+F=R & \text{rejeté ci-dessus}\\
 & \\
C=P \iff R+F=P \iff R=P+F=A & \text{rejeté}\\
C=Q \iff R+F=Q \iff R=Q+F=A & \text{rejeté}\\
C=R \iff R+F=R,\ F=0 & \text{rejeté}
\end{array}\right.$$

Ainsi les 6 points sont distincts.

On a $P+Q+R=\Omega^*$ (alignement), donc $A+B+C=\Omega^*+F+F+F=\Omega^*+F\neq\Omega^*$. Donc A, B, C non alignés.

$B+C+P=P+Q+R+F+F=P+Q+R=\Omega^*$. Donc $P\in BC$ et de même $Q\in CA$ et $R\in AB$.

Les 6 points forment ainsi un quadrilatère complet.

On a : $A+Q+R+F=P+F+Q+R=\Omega^*$, d'où A, Q, R, F cocycliques, et, de même, B, R, P, F ; C, P, Q, F ; A, B, C, F cocycliques.

Nous considérons la cubique circulaire auto-isogonale de première espèce (Γ') définie par ABC et la droite caractéristique PQR. Les deux cubiques ont en commun A, B, C, P, Q, R, I, J, même foyer singulier point de Miquel du quadrilatère complet A, B, C, P, Q, R, donc mêmes tangentes aux points cycliques, soit onze éléments linéaires communs. Elles sont donc confondues. Nous définissons ainsi une infinité de structures d'auto-isogonales de première espèce sur (Γ). Il en résulte que $\alpha\beta\gamma=0$ ne représente pas un cas particulier de cubique circulaire auto-isogonale de première espèce. Le raisonnement montrant qu'elle passe par son foyer singulier est encore valable, et on peut définir sur elle une infinité de structures analogues pour lesquelles $\alpha\beta\gamma\neq 0$.

---

(7) Exemple : Cubique de Brocard-Steiner

Les points de Brocard, de coordonnées normales ab^2, bc^2, cb^2 et ac^2, ba^2, cb^2 sont isogonaux (le quotient par $a^2b^2c^2$ fait passer des premières coordonnées aux inverses des secondes). Il existe une ellipse inscrite dans ABC admettant pour foyers ces points. Les calculs de (5) conduisent à $p=ab^2c^2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$ et permutations pour q et r, soit à un facteur près $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$. On en déduit les valeurs a, b, c pour les coordonnées normales du point de Brianchon, qui est ainsi le point de Lemoine, l'ellipse étant donc tangente aux cotés aux pieds des symédianes. C'est l'ellipse de Brocard. Nous adjoignons l'ellipse inscrite de Steiner tangente aux milieux des cotés, de point de Brianchon, de coordonnées normales $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$.

Les calculs de la fin de (4) conduisent à prendre pour α, β, γ les valeurs $\frac{b}{c}-\frac{c}{b}$ et permutations, ou encore $a(b^2-c^2)$ et permutations. Choisissant ces dernières, et remplaçant les cosinus par leurs valeurs, nous obtenons $abc.\delta=2(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)$, et l'équation normale. Il est intéressant de noter que $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$. Le point (α, β, γ) est à l'infini.

---

(8) Cubiques circulaires auto-isogonales de deuxième espèce passant par leur foyer singulier

On a vu que l'extension au complexifié projectif caractérisait les points cycliques I et J comme isogonaux. Une cubique auto-isogonale de seconde espèce sera donc circulaire si I et J sont alignés avec le pivot Ω, donc si ce dernier est un point à l'infini. Un exemple remarquable est fourni par la cubique de Neuberg dont le pivot est le point à l'infini de la droite d'Euler.

Dans cette hypothèse, si le foyer singulier F appartient à cette courbe, on a vu en (5) que la tangente en F passe alors par le tangentiel Ω^* du point à l'infini réel Ω, qui est ici le pivot. On peut mener au maximum trois tangentes à la courbe issues de Ω^* en dehors de la tangente en ce point et de $\Omega^*\Omega$. Or les tangentes en Ω, A, B, C d'équations $\alpha(\gamma^2-\beta^2)x+\beta(\alpha^2-\gamma^2)y+\gamma(\beta^2-\alpha^2)z=0,$; $\gamma z-\beta y=0$; $\alpha x-\gamma z=0$; $\beta y-\alpha x=0$ passent toutes par le point

$(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma})$ qui appartient à la courbe, et est donc Ω^*, qui apparaît comme isogonal de Ω. Les trois foyers singuliers possibles sont donc A, B, C. La réciproque est évidente.

Nous écrivons donc que la cubique passe par son foyer singulier en écrivant que la tangente en un point cyclique passe par A, B ou C, la tangente au second point cyclique y passant aussi nécessairement. Le passage par A se traduit par : $F'_x(e^{iB}, e^{-iA}, -1) = 0$, soit : $\alpha(e^{-2iA}-1)-2\beta e^{iB}e^{-iA}-2\gamma e^{iB} = 0$. Après multiplication par e^{iA} et utilisation de $e^{i(A+B)} = -e^{-iC}$, nous obtenons une relation conduisant à deux égalités en séparant partie réelle et partie imaginaire :

$-2\beta.\cos B + 2\gamma.\cos C = 0$; $-2\alpha.\sin A - 2\beta.sinB - 2\gamma.\sin C = 0$.

La deuxième, qui s'écrit $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$, vérifie Ω à l'infini. La première situe Ω à l'infini sur la droite $\cos By - \cos Cz = 0$, qui passe par A et par l'orthocentre H. Ainsi il n'existe que trois cubiques auto-isogonales de seconde espèce qui passent par leur foyer singulier, celles qui admettent comme pivots les points l'infini des hauteurs de ABC. Bien entendu, d'après (6), elles sont auto-isogonales de première espèce, mais par rapport à d'autres triangles ! Pour celle étudiée, de foyer singulier A, Ω^*, isogonal de Ω, est sur le cercle circonscrit à ABC et sur l'isogonale de AH, donc diamètralement opposé à A sur ce cercle.

Des calculs (donnés en annexe), partant de l'équation générale et imposant de passer par les points connus, permettent de voir que cette cubique (*) a pour équation cartésienne.

$$\boxed{\mathbf{x(x^2+y^2)+(b-c)(x^2+y^2)-2axy-bcx-a(b-c)y=0}}$$

Voir la figure ci-après, dûe à Alain Esculier, que nous remercions.

Annexe : détermination de l'équation cartésienne de la cubique

Pour préciser cette cubique, on peut déterminer son équation cartésienne - j'ai pris un axe des x caractérisé par $\overrightarrow{BC}$ et un axe des y caractérisé par $\overrightarrow{HA}$ - Trois points remarquables de la courbe sont les intersections P, Q, R avec BC, CA, AB des droites joignant A, B, C au pivot Ω, ces droites étant donc perpendiculaires à BC - Je désigne par a, b, c les distances PA, PB, PC - Les choix d'axes conduisent à P origine et aux coordonnées $A(0, a)$, $B(-b, 0)$, $C(c, 0)$. Q a pour abscisse $-b$ et est situé sur $\frac{x}{c}+\frac{y}{a}-1=0$, d'où son ordonnée $a(1+\frac{b}{c})$. R a pour abscisse c et est situé sur $-\frac{x}{c}+\frac{y}{a}-1=0$ d'où son ordonnée $a(1+\frac{c}{b})$. La courbe admet un asymptote parallèle à Oy et passe par P, d'où l'équation $x(x^2+y^2)+px^2+qxy+ry^2+sx+ty=0$.

Le passage par A, B, C, P, Q, R permet de déterminer p, q, r, s, t et d'aboutir à l'équation $x(x^2+y^2)+(b-c)(x^2+y^2)-2axy-bcx+a(c-b)y=0$.

Ω^* est le symétrique de A par rapport au centre du cercle circonscrit. Ce dernier point a pour abscisse celle du milieu de BC, soit $\frac{c-b}{2}$. Celle de Ω^* est donc $c-b$, d'où l'on déduit son ordonnée $-\frac{bc}{a}$ en utilisant que c'est un point de la courbe.

Comme toute cubique auto-isogonale à pivot, la courbe passe par le centre I du cercle inscrit, et les centres I_A, I_B, I_C des cercles ex-inscrits.

Les propriétés des courbes auto-isogonales à pivot entraînent que les tangentes en I, I_A, I_B, I_C passent par le pivot Ω donc sont perpendiculaires à BC, et que les tangentes en A, B, C passent par Ω^*.

(*) *Suggestion de Vidiani : Comme elle n'est pas répertoriée parmi les 292 cubiques du catalogue de Bernard Gibert et Jean Pierre Ehrmann http://mairie.orange.fr/bernard.gibert/ctc.html, ni étudiée ni même distinguée parmi les cubiques focales de Van Rees (1829), (voir Spécial Isocubics de Bernard Gibert 4.1.1 remarque 1 page 45 sur 123) il serait logique de l'appeler "cubique de Bouteloup".*