Quelques rappels sur les groupes

Dans le textes intitulé “Les colliers de G.Polyà”, nous utilisont quelques outils élémentaire de théorie des groupes, que nous nous proposons ici de rappeler.

1 Action de groupe

Définition : Soit G un groupe (noté multiplicativement), X un ensemble. Un action du groupe G sur l'ensemble X est une application :

$$\begin{cases} \mathrm{G} \times \mathrm{X} & \to \mathrm{X} \\ (g, x) & \mapsto g.x \end{cases}$$

qui vérifie les axiomes :
(i) $\forall g, g' \in \mathrm{G}, \quad \forall x \in \mathrm{X}, \quad g.(g'.x) = (gg').x$
(ii) $\forall x \in \mathrm{X}, \quad 1.x = x$

Exemples :

- L'action de groupe la plus naturelle est l'action, sur un ensemble fini, de son groupe de permutations. Si X est l'ensemble $[\![1\,; n]\!]$ des entiers de 1 à n, son groupe de permutations est noté Σ_n. Prenons par exemple la transposition $\sigma = (2, 3)$ et l'élément $x = 3$. Ici, $\sigma.x$ sera l'élément 2, *i.*e. l'image de l'élément 3 par la transposition.
- On rencontre également des actions de groupe à foison dans la géométrie : les isométries fixant une figure donnée, par exemple le cube, forment un groupe. On peut les caractériser par le action sur l'ensemble des sommets du cubes, ou des faces, des grandes diagonales... À chaque fois, ces isométries seront vues comme des permutations d'un ensemble fini.

Bien sûr, il y aurait beaucoup de choses à raconter sur le sujet, mais *a* priori nous n'utilisons guère plus que cette définition dans le document “Les colliers de G. Polyà”. La littérature sur le sujet est assez vaste (voir par exemple les références données dans le document susnommé).

2 Théorème de Lagrange

Soit G un groupe, H un sous-groupe de G. L'ensemble des classes à gauche, de la forme $a\mathrm{H} = \{g \in \mathrm{G}, \exists h \in \mathrm{H}, \quad g = a.h\}$, où a est un élément de G, forme une partition du groupe G.

En effet, tout élément g de G pouvant s'écrire $g = g.1$, on a immédiatement $g \in g\mathrm{H}$ (H est un sous-groupe de G donc $1 \in \mathrm{H}$). Il vient que l'union des ensembles $a\mathrm{H}$ recouvre G.

D'autre part ces ensembles sont deux à deux disjoints. En effet, supposons qu'un élément g du groupe soit à la fois dans une classe à gauche $a\mathrm{H}$ et dans une autre classe $b\mathrm{H}$. On pourrait alors écrire :

$$g = ah_1 = bh_2$$

Mais alors $b = ah_1h_2^{-1}$, donc $b \in a\mathrm{H}$, et donc $b\mathrm{H} \subset a\mathrm{H}$. De la même façon, on a $a\mathrm{H} \subset b\mathrm{H}$, et donc ces deux classes sont en fait identiques.

On peut alors définir l'ensemble quotient G/H, qui est l'ensemble de ces classes à gauche. Son cardinal est appelé indice du sous-groupe H, et noté $(\mathrm{G} : \mathrm{H})$.

N.B. Attention ! G/H n'est en général pas un groupe. Ceci n'est vrai que lorque le sous-groupe H est distingué, c'est-à-dire lorsque pour tout élément g du groupe G, on a $g\mathrm{H}g^{-1} \subset \mathrm{H}$.

N.B. Le groupe G agit naturellement sur G/H par :

$$\begin{cases} \mathrm{G} \times \mathrm{G}/\mathrm{H} & \rightarrow \mathrm{G}/\mathrm{H} \\ (g, a\mathrm{H}) & \mapsto (ga)\,\mathrm{H} \end{cases}$$

Avec ces notations, nous pouvons énoncer le

Théorème 2.1 *(Lagrange)*

Soit G *un groupe fini,* H *un sous-groupe de* G*. Alors le cardinal de* H *et l'indice de* H *divisent le cardinal de* G*, et l'on a :*

$$|\mathrm{G}| = (\mathrm{G} : \mathrm{H})\,|\mathrm{H}|$$

Démonstration : d'après ce qui précède, les classes à gauche, de la forme $a\mathrm{H}$, avec a parcourant le groupe G, forment une partition de G. Or il y a exactement $(\mathrm{G} : \mathrm{H})$ classes. Pour démontrer le théorème, il suffit donc juste de montrer que toutes ces classes ont même cardinal H.

Pour cela, soit $a \in \mathrm{G}$. Nous allons montrer que l'application

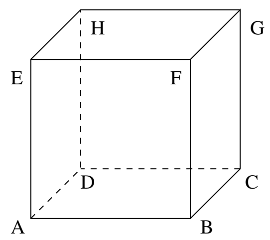
$$\begin{cases} \mathrm{H} & \rightarrow a\mathrm{H} \\ h & \mapsto ah \end{cases}$$

est bijective. Elle est clairement surjective, par définition de l'ensemble $a\mathrm{H}$. Elle est également injective, en effet si l'on considère deux éléments h et h' de H tels que $ah = ah'$, alors on obtient, en multipliant à gauche par l'inverse a^{-1} de a l'égalité précédente : $h = h'$. Et notre application est donc bien injective.

□

3 Les isométries directes du cube

Terminons ces rappels en caractérisant le groupe des déplacements du cube. Une isométrie du cube peut être vue comme une permutation des sommets $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}$, et H dudit cube.



C'est-à-dire que le groupe des déplacements du cube peut être vu comme un sous-groupe du groupe des permutations d'un ensemble à huit éléments, groupe de cardinal $8! = 40320$.

Mais une isométrie doit envoyer des sommets voisins sur des sommets voisins. En fait, un déplacement du cube est caractérisé par l'image de trois points : si l'on donne l'image des points A, B et D, les images de tous les autres sommets seront déterminés. Cela nous laisse donc 8 possibilités pour l'image de A, puis 3 possibilités pour l'image de B (l'un des trois voisins de l'image de A), puis encore 2 possibilités pour l'image de D. Soit, au total, 48 isométries distinctes possibles du cube. Sur ces 48 isométries possibles, la moitié sont des anti-déplacements, puisqu'elles transforment le repère direct $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$ en un repère indirect.

Tout ceci nous laisse donc 24 isométries directe, ou déplacements, possibles pour le cube. Réciproquement, tout repère direct d'origine l'un des sommets du cube, et d'axes définis par trois arêtes de ce cube définissent bien un déplacement du cube : on construit aisément une rotation envoyant notre repère $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$ sur le repère en question. Cette rotation laisse alors nécessairement le cube globalement invariant.

Conctrètement, on trouve les rotations suivantes :

- L'identité.
- Les six rotations d'angle plus ou moins $\dfrac{\pi}{2}$ autour des trois axes passant par les milieu de deux faces opposées.
- Les trois rotation d'angle π autour de ces mêmes axes.
- Les six rotations d'angle π autour des six axes joignant les milieux de deux arêtes opposées.
- Les huit rotations d'angle plus ou moins $\dfrac{2\pi}{3}$ autour des quatre axes joignant deux sommets opposés.