

# Combien de rangements possibles ?

Nous allons nous intéresser ici au nombre de manières de ranger des boules dans des boîtes... Contrairement aux apparences, ce problème n'est pas toujours si simple lorsque l'on s'impose comme ici une contrainte supplémentaire : les boîtes sont indistinguables les unes des autres.

## 1 Cas de boules numérotées

Dans toute cette partie, les boules sont numérotées de 1 à  $n$ , nous les rangeons dans  $k$  boîtes indistinguables. Autrement dit, on cherche le nombre de partitions de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  en au plus  $k$  parties.

### 1.1 Formule de récurrence

On note  $F(n, k)$  le nombre de façons de ranger les nombres de 1 à  $n$  dans  $k$  boîtes indistinguables. Les  $C_n^p$  sont les coefficients du binôme de Newton. On a  $F(n, 1) = 1$  (une seule façon de ranger tous nos entiers dans une seule boîte), et l'on établit la formule de récurrence :

$$F(n, k) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^i F(i, k-1)$$

Le terme 1 correspond à la seule manière de mettre tous les nombres dans une unique boîte. Chaque terme  $C_{n-1}^i F(i, k-1)$  correspond lui au nombre d'arrangements possibles pour lesquels le nombre 1 est dans une boîte qui contient exactement  $n-i$  nombres : il y a  $C_{n-1}^i$  façons de choisir les nombres qui ne sont pas dans la même boîte que 1. Puis, il y a  $F(i, k-1)$  façons de les ranger dans les  $k-1$  boîtes restantes.

### 1.2 Calcul explicite de $F(n, k)$

On définit la suite  $(a_k)_{k>0}$  par :

$$a_k = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i}{i!}$$

On constate que la suite  $(a_k)_{k>0}$  n'est rien d'autre que la suite des sommes partielles du développement en série de  $e^{-1} = \frac{1}{e}$ . On a donc  $a_k \rightarrow \frac{1}{e}$  quand  $k \rightarrow \infty$ .

Notons au passage que l'on a en particulier  $a_1 = 1$  et  $a_2 = 0$ .

**Lemme 1.1** La suite  $(a_k)_{k>0}$  vérifie, pour tout entier  $n > 0$ ,

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{(n-i)!} = 1$$

**Démonstration** Soit  $n$  un entier désormais fixé. Calculons  $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{(n-i)!}$ . Par définition de la suite  $(a_k)_{k>0}$ , on a :

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{(n-i)!} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(-1)^j}{(n-i)!j!}$$

Soit, en posant  $k = n - i$ ,

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{(n-i)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k-1} \frac{(-1)^j}{k!j!}$$

On somme en fait tous les termes de la forme  $\frac{(-1)^j}{k!j!}$  pour des couples  $(k, j)$  d'entiers naturels vérifiant :  $0 \leq j < n - k \leq n$ , c'est-à-dire  $0 \leq j + k < n$ . Notre somme s'écrit donc aussi :

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{(n-i)!} = \sum_{0 \leq j+k \leq n-1} \frac{(-1)^j}{k!j!}$$

et donc

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{(n-i)!} = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{j=0}^l \frac{(-1)^j}{(l-j)!j!}$$

Or, à  $l$  fixé, on reconnaît à peu de choses près le développement de  $(1-1)^l$  par la formule du binôme dans la somme  $\sum_{j=0}^l \frac{(-1)^j}{(l-j)!j!}$ . Plus précisément :

$$\sum_{j=0}^l \frac{(-1)^j}{(l-j)!j!} = \frac{1}{l!} \sum_{j=0}^l (-1)^j C_l^j$$

Cette somme est donc nulle si  $l$  est strictement positif, égale à 1 lorsque  $l = 0$ . En conclusion, on a bien :

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{(n-i)!} = 1 \quad \square$$

**Théorème 1.2** On a pour  $F(n, k)$  la formule explicite :

$$F(n, k) = a_1 \frac{k^n}{k!} + a_2 \frac{(k-1)^n}{(k-1)!} + \dots + a_{k-1} \frac{2^n}{2!} + a_k$$

Comme  $a_1 = 1$  et  $a_2 = 0$ , ceci montre en particulier :  $F(n, k) = \frac{k^n}{k!} + O(k^{n-2})$  pour  $n \rightarrow \infty$ .

**Démonstration** Pour montrer le résultat à partir de la formule de récurrence, on montre d'abord que  $F(n, k)$  est de la forme :

$$F(n, k) = b_k^k \frac{k^n}{k!} + b_{k-1}^k \frac{(k-1)^n}{(k-1)!} + \dots + b_2^k \frac{2^n}{2!} + b_1^k$$

où les  $b_i^k$  sont des constantes ne dépendant pas de  $n$ .

On montre ce résultat par récurrence sur  $k$  :  $F(n, 1) = 1$  donc pour  $k = 1$ , on a bien un résultat de la forme attendue. Soit donc  $k > 0$  fixé et  $n$  un entier. On suppose que  $F(n, k)$  s'écrit  $F(n, k) = \sum_{j=1}^k b_j^k \frac{j^n}{j!}$ . Alors

$$\begin{aligned}
F(n, k+1) &= 1 + \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^i \sum_{j=1}^k b_j^k \frac{j^i}{j!} \\
&= 1 + \sum_{j=1}^k \frac{b_j^k}{j!} \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^i j^i \quad (\text{intersion des sommes}) \\
&= 1 + \sum_{j=1}^k \frac{b_j^k}{j!} ((j+1)^{n-1} - 1) \quad (\text{formule du binôme})
\end{aligned}$$

d'où 
$$F(n, k+1) = \left(1 - \sum_{j=1}^k \frac{b_j^k}{j!}\right) + \sum_{j=2}^{k+1} b_{j-1}^k \frac{j^n}{j!}$$

Ceci montre que l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang  $k+1$ . On conclut par le principe de récurrence que  $F(n, k)$  est bien de la forme annoncée. Ce avec en plus les relations :

$$b_1^{k+1} = 1 - \sum_{j=1}^k \frac{b_j^k}{j!} \quad \text{et pour } 1 < i < k+1, \quad b_i^{k+1} = b_{i-1}^k$$

Il vient alors immédiatement  $b_j^k = b_1^{k-j+1}$ , soit en posant  $u_k = b_1^k$  :

$$b_j^k = u_{k-j+1}$$

Par remplacement dans la formule de récurrence obtenue, il vient

$$F(n, k) = u_1 \frac{k^n}{k!} + u_2 \frac{(k-1)^n}{(k-1)!} + \dots + u_{k-1} \frac{2^n}{2!} + u_k$$

où  $(u_k)_{k>0}$  est une suite définie par les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 - \left(u_n + \frac{u_{n-1}}{2!} + \dots + \frac{u_1}{n!}\right) \end{cases}$$

Ce système définit une suite de manière unique. Pour conclure, il nous suffit donc de montrer que la suite  $(a_k)_{k>0}$  vérifie ces relations de récurrence. On aura alors nécessairement  $(u_k)_{k>0} = (a_k)_{k>0}$ .

Or ces relations de récurrence se réécrivent, pour tout entier  $n$  :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{u_i}{(n+1-i)!} = 1$$

Et le lemme nous permet de conclure que la suite  $(a_k)_{k>0}$  vérifie bien cette relation de récurrence. Donc  $(a_k)_{k>0} = (u_k)_{k>0}$ .

□

**N.B.** On ne peut pas avoir de formule fermée pour  $k$  (c'est-à-dire sous une forme polynomiale, où le nombre de termes ne dépend pas de  $k$ ) car à  $n$  fixé, lorsque  $k$  dépasse  $n$ , la quantité  $F(n, k)$  reste constante (les boîtes supplémentaires ne comptent pas). Et, dans la formule précédente, cela signifie que l'on rajoute des termes en augmentant  $k$ , mais cela ne change pas la somme.

### 1.3 Relation de récurrence avec des polynômes

On a vu que le nombre  $F(n, k)$  est constant dès que  $k > n$ . La suite de terme général  $\sum_{i=1}^p a_{p+1-i} \frac{i^n}{i!}$  est donc stationnaire, elle converge donc vers  $F(n, n)$ , le nombre de partitions de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ .

Or nous avons déjà vu que  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \frac{1}{e}$ .

Par convergence dominée, on a donc :

$$F(n, n) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^p a_{p+1-i} \frac{i^n}{i!} = \frac{1}{e} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^n}{i!}$$

Posons maintenant  $G_n(x) = \frac{1}{e} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^n}{i!} x^{i-1}$ . Cette série entière se calcule par récurrence en remarquant que :

$$\begin{cases} G_1(x) = e^{x-1} \\ G_{n+1}(x) = (x \cdot G_n(x))'(x) \end{cases}$$

Ainsi  $F(n, n) = G_n(1)$ , et une récurrence immédiate nous montre que  $G_n$  est de la forme  $Q_n(x)e^{x-1}$  avec  $Q_n$  un polynôme normalisé de degré  $n-1$ , donné par la relation suivante :

$$\begin{cases} Q_1(x) = 1 \\ Q_{n+1}(x) = (x+1)Q_n(x) + x \cdot Q_n'(x) \end{cases}$$

On obtient donc le nombre de partitions de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  par le calcul de ces polynômes en la valeur 1 !

**N.B.** Plus fort ! Si on prend la représentation canonique des polynômes  $Q_n$  :

$$Q_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^n X^i$$

alors les coefficients  $a_i^n$  correspondent respectivement aux nombres de partitions de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  dans exactement  $i+1$  boîtes... (démonstration en annexe).

### 1.4 Retrouvons simplement l'équivalent de $F(n, k)$

On pourrait se dire : comme les boîtes sont indistinguables, je fais comme si elle était numérotées puis je divise par  $k!$ . Malheureusement, toutes les orbites sous l'action de  $S_k$  n'ont pas  $k!$  éléments (c'est-à-dire que pour une configuration donnée, il n'y a pas forcément  $k!$  façons de numérotter les boîtes *a posteriori*). Donc ce raisonnement ne tient pas. Par contre on peut montrer que le nombre d'orbites qui n'ont pas  $k!$  éléments est un petit  $o$  du nombre d'orbites à  $k!$  éléments. Dans ce cas, en divisant par  $k!$ , ceci montre effectivement que l'équivalent est  $\frac{k^n}{k!}$  (car dans le cas où les boules ET les boîtes sont numérotées, le nombre de configurations possibles est bien sûr  $k^n$ ).

Montrons que le nombre d'orbites qui n'ont pas  $k!$  éléments est négligeable devant le nombre d'orbites à  $k!$  éléments, ou plutôt que c'est un petit  $o$  du nombre total de configurations, ce qui revient au même.

On considère donc le cas de  $n$  boules numérotées, à placer dans  $k$  boîtes numérotées. Il y a exactement  $k^n$  configurations possibles, et l'on voit qu'une

configuration appartient à une orbite qui possède exactement  $k!$  éléments si et seulement si il n'y a pas deux boîtes vides (car une permutation des contenus de deux boîtes vides ne change rien, et réciproquement, s'il y a au plus une boîte vide, alors toutes les boîtes ont des contenus distincts).

Il reste à montrer que le rapport du nombre de configurations avec au moins deux boîtes vides sur le nombre total de configurations,  $k^n$ , tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Or, il y a  $C_k^2$  façons de choisir deux boîtes vides, puis  $(k-2)^n$  façons de ranger les nombres de 1 à  $n$  dans les  $k-2$  boîtes restantes (on a ainsi compté plusieurs fois les configurations avec strictement plus de deux boîtes vides, mais on cherche ici seulement un majorant...). Au total, on a donc majoré le nombre de configurations avec au moins deux boîtes vides par  $C_k^2 (k-2)^n$ . Et, à  $k$  fixé, on a bien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_k^2 (k-2)^n}{k^n} = 0$$

Ce qui termine la preuve.

**N.B.** On peut aussi retrouver ce résultat par une petite manipulation de probas :

Soit  $X_1, \dots, X_n, \dots$  une suite de variables aléatoires i.i.d. (indépendantes et identiquement distribuées) de loi uniforme sur  $\{1, \dots, k\}$ . Alors, presque sûrement,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{X_1, \dots, X_n\} = \{1, \dots, k\}$ .

Ceci montre que le rapport du nombre de configurations où une boîte est vide (et donc *a fortiori* où deux boîtes sont vides) divisé par le nombre total de configurations tend à  $k$  fixé vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

## 1.5 Un équivalent de $F(n, n)$

Les nombres  $B_n = F(n, n)$  sont appelés nombres de Bell, on a démontré les égalités

$$B_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^n}{k!} \left( \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!} \right) = \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$$

On peut de plus montrer que ces nombres admettent pour série génératrice :

$$e^{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k$$

On a déterminé un équivalent de  $F(n, k)$  à  $k$  fixé lorsque  $n$  tend vers l'infini. On cherche maintenant un équivalent de  $B_n = F(n, n)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Ceci est plus difficile à obtenir, Lovász a montré que l'on a :

$$B_n \sim n^{-1/2} (\lambda(n))^{n+\frac{1}{2}} e^{\lambda(n)-n-1}$$

où  $\lambda$  est défini implicitement par  $\lambda(n) \ln(\lambda(n)) = n$

Nous allons nous contenter de démontrer ici un résultat plus faible, en déterminant simplement un équivalent de  $\ln(B_n)$ . (Ce qui ne donne bien sûr pas d'équivalent pour  $B_n$ .)

**Théorème 1.3** *On a*  $\ln(B_n) \sim n \ln(n)$

**Démonstration**  $B_n$  est le nombre de partitions de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ , donc  $B_n$  est trivialement majoré par  $n^n$ . On cherche maintenant à minorer  $B_n$ . On utilise pour cela le lemme suivant, que nous démontrerons plus loin :

**Lemme 1.4** pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$  il existe  $N_\alpha$  tel que pour tout  $n \geq N_\alpha$  :

$$n^{\alpha n} \leq B_n$$

En utilisant ce lemme, on voit que pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$  et pour tout  $n$  suffisamment grand, on a le double encadrement suivant :

$$n^{\alpha n} \leq B_n \leq n^n$$

ce qui donne, en passant aux logarithmes, l'encadrement  $\alpha \leq \frac{\ln(B_n)}{n \ln(n)} \leq 1$ .

Et le théorème est établi.  $\square$

**N.B.** Bruijn a donné un développement asymptotique pour  $\ln(B_n)$  :

$$n \ln(n) - n \ln \ln(n) - n + \frac{n \ln \ln(n)}{\ln(n)} + \frac{n}{\ln(n)} + \frac{n}{2} \left( \frac{\ln \ln(n)}{\ln(n)} \right)^2 + O\left( \frac{n \ln \ln(n)}{\ln(n)^2} \right)$$

**Démonstration du lemme**

Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ . On a l'écriture  $B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$ , donc en particulier pour tout  $k \geq 1$ , on a  $B_n \geq \frac{1}{e} \frac{k^n}{k!}$ .

On choisit alors comme entier  $k(n)$  la partie entière de  $n^\beta$ , où  $\beta$  est un réel choisi dans l'intervalle  $] \max(\alpha, \frac{1}{2}) ; 1 [$ . On voit aisément que  $k(n)$  tend vers l'infini avec  $n$ . En utilisant la formule de Stirling on obtient donc l'équivalent

$$\frac{k(n)^n}{k(n)!} \sim \frac{k(n)^n}{\sqrt{2\pi k(n)} \left(\frac{k(n)}{e}\right)^{k(n)}} = \frac{e^{k(n)}}{\sqrt{2\pi k(n)}} k(n)^{(n-k(n))}$$

De plus, pour tout  $n$  suffisamment grand, on a  $n - k(n) \geq \frac{\alpha}{\beta} n$  (car  $\frac{\alpha}{\beta} < 1$  et le rapport  $k(n)/n$  tend vers 0). Donc, pour  $n$  suffisamment grand, on a :

$$\frac{k(n)^n}{k(n)!} \geq \frac{e^{k(n)}}{\sqrt{2\pi k(n)}} e^{\frac{\alpha}{\beta} n \ln(k(n))}$$

En posant

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{e^{k(n)}}{\sqrt{2\pi k(n)}} \cdot e^{\frac{\alpha}{\beta} n \ln(k(n))} e^{\alpha n \ln(n)} \\ &= e^{\mathfrak{k}(n) + \alpha \beta n \ln(\mathfrak{k}(n) n^\beta)} \sqrt{2\pi k(n)} \end{aligned}$$

On obtient la minoration :

$$\frac{k(n)^n}{k(n)!} \geq A_n e^{\alpha n \ln(n)}$$

Il ne reste plus qu'à montrer que, pour  $n$  suffisamment grand, on a  $A_n \geq e$ . En effet on aura alors  $B_n \geq \frac{1}{e} \cdot e \cdot e^{\alpha n \ln(n)} = n^{\alpha n}$ .

Or  $\frac{k(n)}{n^\beta} \geq \frac{n^\beta - 1}{n^\beta} = 1 - \frac{1}{n^\beta}$  et pour  $x$  suffisamment proche de zéro, on a :

$$\ln(1 - x) \geq -2x$$

Donc pour  $n$  assez grand,  $\ln\left(\frac{k(n)}{n^\beta}\right) \geq -\frac{2}{n^\beta}$  ce qui implique alors

$$e^{k(n) + \frac{\alpha}{\beta} n \ln\left(\frac{k(n)}{n^\beta}\right)} \geq e^{k(n) - \frac{2\alpha}{\beta} n^{1-\beta}} \geq e^{n^\beta - 1 - \frac{2\alpha}{\beta} n^{1-\beta}}$$

En utilisant le fait que  $\beta > \frac{1}{2}$ , il est alors clair que  $A_n$  tend vers l'infini avec  $n$ , ce qui termine la preuve. . .

□

## 2 Cas de boules indistinguables

On s'intéresse dans cette partie au nombre de façons de ranger  $N$  boules non numérotées dans  $k$  boîtes également indistinguables. Une telle configuration correspond à une partition d'un ensemble à  $N$  éléments indistinguables, ou encore à un ensemble de  $k$  entiers naturels dont la somme vaut  $N$ .

Comme les boîtes sont elles aussi indistinguables, les entiers en question ne sont pas ordonnés. On peut donc, pour faciliter le calcul, les chercher rangés dans l'ordre croissant.

### 2.1 Formule de récurrence

On note  $P(N, k)$  le nombre de suites croissantes de  $k$  nombres dont la somme vaut  $N$ . Par convention  $\lfloor x \rfloor$  désigne la partie entière de  $x$ . On a la formule de récurrence suivante :

$$P(N, k) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{N}{k} \rfloor} P(N - ik, k - 1)$$

Elle s'obtient simplement en remarquant que, si on fixe le premier nombre (le plus petit) égal à 0, les  $k - 1$  nombres restant forment une partition de  $N$ . Si on fixe le plus petit égal à 1, puisque tout les nombres suivants sont plus grand que 1, cela revient ensuite à trouver une partition en  $k - 1$  nombres pour  $N - k$ , et ainsi de suite...

On constate aussi par cette formule qu'il y a peu de chance d'obtenir une formule simple pour  $P(N, k)$  car elle fera intervenir les congruences de  $N$  modulo  $2, \dots, k$ . En revanche, nous pouvons calculer  $P(N, k)$  pour de petites valeurs de  $k$ .

Ainsi  $P(N, 1) = 1$  et  $P(N, 2) = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1$

Enfin, on remarque que le nombre  $P(N, N)$  correspond à toutes les partitions de notre ensemble.

### 2.2 Équivalent pour $N \rightarrow \infty$

**Propriété 2.1** On a  $P(N, k) \sim \frac{N^{k-1}}{k!(k-1)!}$  lorsque  $N \rightarrow \infty$ .

**Démonstration** On considère donc l'hypothèse de récurrence (sur l'entier  $k$ ), à savoir  $P(N, k) = \frac{N^{k-1}}{k!(k-1)!} + o(N^{k-1})$ . Elle est clairement vérifiée pour  $k = 1$  et  $k = 2$ . On suppose donc le résultat au rang  $k$ .

Alors 
$$P(N, k+1) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{N}{k+1} \rfloor} P(N - i(k+1), k)$$

et par l'hypothèse de récurrence,

$$P(N - i(k+1), k) = \frac{1}{k!(k-1)!} (N - i(k+1))^{k-1} + o((N - i(k+1))^{k-1})$$

Lorsque l'on somme  $\lfloor \frac{N}{k+1} \rfloor$  termes qui sont tous négligeables devant  $N^{k-1}$ , le résultat reste négligeable devant  $N^k$  ( $k$  est une constante).

D'où 
$$P(N, k+1) = \left( \frac{1}{k!(k-1)!} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{N}{k+1} \rfloor} (N - i(k+1))^{k-1} \right) + o(N^k) \quad (1)$$

Ensuite, en factorisant par  $(k+1)^{k-1}$  dans chacun des termes de la somme, on obtient l'encadrement :

$$R_{k-1}(\lfloor \frac{N}{k+1} \rfloor) \leq \frac{1}{(k+1)^{k-1}} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{N}{k+1} \rfloor} (N - i(k+1))^{k-1} \leq R_{k-1}(\lfloor \frac{N}{k+1} \rfloor + 1)$$

où  $R_k(X)$  est le polynôme (de Bernoulli) qui vérifie :

$$R_k(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k$$

Et comme le  $k$ -ième polynôme de Bernoulli vérifie  $R_k(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x^{k+1}}{k+1}$ , on obtient l'équivalent :

$$R_{k-1}(\lfloor \frac{N}{k+1} \rfloor) \sim R_{k-1}(\lfloor \frac{N}{k+1} \rfloor + 1) \sim \frac{N^k}{k(k+1)^k}$$

Il vient 
$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{N}{k+1} \rfloor} (N - i(k+1))^{k-1} = \frac{N^k}{k(k+1)} + o(N^k)$$

Remplaçant ceci dans l'égalité (1), on obtient alors

$$P(N, k+1) = \frac{N^k}{k!(k+1)!} + o(N^k)$$

Et l'on conclut alors par récurrence que pour tout  $k$ ,

$$P(N, k) \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} \frac{N^{k-1}}{k!(k-1)!} \quad \square$$



## Annexe : les polynômes $Q_n$

Soit  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  notre famille de polynômes, définis par récurrence par :

$$\begin{cases} Q_1(x) = 1 \\ \forall n, \quad Q_{n+1}(x) = (x+1)Q_n(x) + x.Q'_n(x) \end{cases}$$

Par une récurrence immédiate, on s'aperçoit que  $Q_n$  est de degré  $n-1$ .

Si l'on considère la représentation canonique des polynômes  $Q_n$ , à savoir  $Q_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^n X^i$ , alors nous allons montrer que pour tout entier  $i$ , le coefficient  $a_i^n$  correspond au nombre de partitions de l'ensemble de  $\{1, \dots, n\}$  dans exactement  $i+1$  boîtes.

Pour ceci, Nous allons montrer que ces coefficients vérifient "la bonne relation de récurrence". En effet, on a par dérivation :

$$Q'_n = \sum_{i=1}^{n-1} i a_i^n X^{i-1}$$

et donc 
$$\sum_{i=0}^n a_i^{n+1} X^i = (X+1) \sum_{i=0}^{n-1} a_i^n X^i + X \sum_{i=1}^{n-1} i a_i^n X^{i-1}$$

Soit, en identifiant les coefficients des termes de même degré :

$$\begin{cases} a_0^{n+1} = a_0^n & \text{et} & a_n^{n+1} = a_{n-1}^n \\ \forall i \in \llbracket 1; n-2 \rrbracket, & a_i^{n+1} = a_{i-1}^n + (i+1) a_i^n \end{cases}$$

Avec la condition initiale  $a_0^1 = 1$ .

D'autre part, pour  $n$  et  $k$  deux entiers donnés, si l'on appelle  $u_k^n$  le nombre de partitions de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  en exactement  $k$  classes, alors la famille  $(u_k^n)_{k \leq n}$  possède les propriétés suivantes : d'abord, on a pour tout  $n$ ,  $u_1^n = 1$  (il y a une seule façon de ranger tous les nombres dans une seule boîte). En particulier  $u_1^{n+1} = u_1^n$ .

Ensuite, il y a également une seule façon de ranger les  $n$  entiers de 1 à  $n$  dans  $n$  boîtes distinctes (rappelons que les boîtes sont indifférenciables). C'est-à-dire que  $u_n^n = 1$  pour tout  $n$ , en particulier  $u_{n+1}^{n+1} = u_n^n$ .

Enfin, soit  $1 < k < n$ . On cherche à calculer  $u_{k+1}^{n+1}$ , le nombre de façons de ranger les entiers de 1 à  $n+1$  dans  $k+1$  boîtes. De deux choses l'une : soit l'entier  $n+1$  est tout seul dans sa boîte, et alors il reste à classer les entiers de 1 à  $n$  dans les  $k$  boîtes restantes. Pour cela, il y a  $u_k^n$  possibilités. Sinon, l'entier  $n+1$  n'est pas tout seul dans sa boîte. Obtenir une telle configuration revient à ranger les entiers de 1 à  $n$  dans exactement  $k+1$  boîtes ( $u_{k+1}^n$  façons de ce faire), puis à choisir la boîte dans laquelle on met l'entier  $n+1$  ( $k+1$  possibilités), soit au total  $(k+1) u_{k+1}^n$  configurations de ce type.

On a donc montré que pour  $1 < k < n$ , on a  $u_{k+1}^{n+1} = u_k^n + (k+1) u_{k+1}^n$ .

Les nombres  $u_k^n$  peuvent donc être définis par les relations de récurrence :

$$\begin{cases} \forall n, \quad u_1^{n+1} = u_1^n & \text{et} & u_{n+1}^{n+1} = u_n^n \\ \forall n, \forall k \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket, & u_{k+1}^{n+1} = u_k^n + (k+1) u_{k+1}^n \end{cases}$$

Il est désormais élémentaire de montrer par récurrence sur  $n$  que pour tout  $k < n$ , on a  $a_k^n = u_{k+1}^n$ , c'est-à-dire que le coefficient de degré  $k$  du polynôme  $Q_n$  est exactement le nombre de façons de ranger les entiers de 1 à  $n$  dans  $k+1$  boîtes indistinguables.