L.G.Vidiani 64 rue de l'EUROPE 21121 FONTAINE LÈS DIJON TEL : 03 80 56 65 54
Adresse email Internet : *lg_vidiani@ipac.fr*

Les motifs des pelages d'animaux.

(zip2 TEX patternq.tex) version Zip II : 27 04 04 15h30

(I) INTRODUCTION

Un snobisme régressif et décadent, datant des années 1960 et résurgent depuis une dizaine d'années, comme un phénix noir, est de se prétendre allergique à tout ce qui est scientifique, de nier toute culture rationaliste en se pavanant précieusement et en arguant un prétendu monopole d'une seule culture artistico-littéraire, la bouche tordue d'une lippe dédaigneuse doublée d'une crampe du muscle scalène antérieur gauche raidissant le cou, relevant le menton méprisant sûr de lui et dominateur et basculant l'occiput sur les épaules.

Or les faits montrent que les mathématiques sont partout : dans les spirales du tournesol, dans les motifs des pelages ou plumes d'animaux, la variété des motifs des ailes de papillons, la progression des feux de forêt,....

C'est ce que propose de rappeler cet article, où toute la partie justification mathématique, a été reportée en annexe, afin de permettre de se concentrer sur l'essentiel : la compréhension du mécanisme.

D'où provient l'extrême diversité des motifs des pelages d'animaux, des zébrures des zèbres aux taches des léopards, en passant par celle des motifs des élitres des coccinelles et même l'absence de motifs des lions ou des éléphants ? ([1], [4], [5], [6], [7], [8] et sur le net en cherchant les mots motifs ou pattern (motif en anglais)). Pouquoi n'y a t-il pas de tigres à tâches carrées ? de léopards à rayures ?

En fait tout semble prouver que c'est l'idée géniale (en 1952) d'Alan Mathison TURING

(*http : //www.infoscience.fr/histoire/portrait/turing.html* et *http : //www − history.mcs.st − and.ac.uk/ ∼ history/Mathematicians/Turing.html*) (L'auteur du décodage de la machine Enigma pendant la guerre 1939-1945), qui semble la plus crédible. *(toutes les références se trouvent par Google, ou dans les bibliographies des livres qui lui sont consacrés, en tapant Turing 1952 : A. M. Turing : The chemical basis of morphogenesis : Philosophical Transactions of the Royal Society of London, volume B 237 pages 37-72, 1952)*

Tout serait en fait le résultat d'un principe de "Réaction-Diffusion", constamment invoqué et justifié par les chimistes : "Activation, Inhibition, Diffusion" [7]. L'extrême diversité des motifs, cette richesse des transformations possibles étant ([2]) étant une conséquence de la théorie de la mesure, car il n'y a à un isomorphisme près qu'un seul espace mesurable intéressant : un intervalle muni de la mesure de Lebesgue.

La forme biologique d'un prémotif est inscrite dans les cellules : lors de la croissance de celles ci, des produits (les morphogènes) en concentration variable (déterminée par les conditions de croissance, voire brisure de symétrie), dont l'existence n'est pas encore scientifiquement prouvée (mais la plus probable) car nos instruments de mesure ne sont pas encore assez précis pour déterminer, déceler l'existence de doses très très faibles, joueraient suivant leurs concentrations respectives le rôle d'activeur ou d'inhibiteur des pigments.

Pour bien faire comprendre intuitivement, à un non spécialiste, le rôle de ce schéma de Réaction-Diffusion, voici l'image la plus frappante [7] : Supposons qu'un feu (l'activeur) éclate dans une forêt sèche, tout au début, il n'y a probablement pas de pompiers (les inhibiteurs) à proximité, mais avec leurs hélicoptères, ils peuvent dépasser le front de l'incendie et pulvériser sur les arbres des produits chimiques résistant au feu : quand le feu atteint les arbres traités, il s'éteint, l'incendie est arrêté.

Si plusieurs feux se déclarent spontanément et de façon aléatoire au sein de la forêt, plusieurs fronts d'incendie (des vagues d'activation) se propageront ; chaque incendie sera maîtrisé par les pompiers dans leurs hélicoptères (vague d'inhibiteurs), mais il aura brulé la forêt tout autour de son foyer initial. À la fin de la saison sèche, la forêt présentera, des zones noires, formées par les arbres brulés, des zones vertes constituées d'arbres intacts. Ce résultat est analogue à celui des mécanismes de réaction diffusion du type diffusionnel ; le genre de motif résultant dépend de nombreux paramètres (aspect dynamique) du modèle.

Quand la diffusion n'est pas un paramètre essentiel (dans un milieu fortement brassé par exemple), les deux morphogenèses réagissent et atteignent un état d'équilibre uniforme (pas de motif). Quand, au contraire, les morphogènes diffusent à des vitesses égales, tout hétérogénéité initiale est progressivement atténuée ; en revanche quand les vitesses de diffusion sont différentes, la diffusion peut être déstabilisatrice : en certains points la réaction peut être trop lente pour homogénéiser le milieu ; dans certaines conditions, une petite perturbation spatiale peut être INSTABLE et engendrer un motif : une telle instabilité est "DIFFUSIONNELLE".

Ceci est essentiel : La solution du système différentiel correspondant doit être INSTABLE en (u_0, v_0, t_0), sinon la décroissance trop rapide des concentrations de l'activeur en fonction du temps, fait qu'il n'a pas le temps d'agir durant la croissance de l'animal et de la cellule. De plus il faut que la concentration de l'activeur de pigment soit supérieure à un certain seuil d'instabilité, u_s, qui dépend bien sûr de l'espèce et de l'âge de l'animal. u_0, v_0 sont les solutions positives de $f(u, v) = g(u, v) = 0$.

Nous avons adopté la modélisation mathématique de TURING-MURRAY. Quand les démonstrations détaillées sont trop longues ou trop techniques nous signalons leur renvoi dans une étude technique en $\boxed{\text{ANNEXE}}$.

L'intervention de l'aspect dynamique dans ce sujet provient justement dans le jeu des conditions initiales de concentration de l'activeur et du diffuseur, suivant les espèces et les conditions de croissance pour expliquer les formes différentes de motifs (en anglais pattern).

(II) LE MODÈLE MATHÉMATIQUE (TURING-MURRAY)

La théorie mathématique a été volontairement édulcorée de tous les détails de façon à rendre la modélisation la plus compréhensible et coller de plus près à la réalité.

Ramené grâce à des changements de paramètres sans dimension, le système de réaction diffusion modélisé par TURING-MURRAY est :

$u(x, y, t), v(x, y, t)$ étant respectivement les concentrations de l'activeur et du diffuseur, au moment t, à l'emplacement (x, y), la peau étant grosso modo assimilée une fois découpée et aplanie, à un rectangle plan. $(x, y) \in [0, p] \times [0, q]$.

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{t}} = \gamma \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nabla^2 \mathbf{u} \\ \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{t}} = \gamma \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{d}\nabla^2 \mathbf{v} \end{array}\right.}$$

où $f(u, v) = a - u + h(u, v)$, et $g(u, v) = \alpha(b - v) - h(u, v)$, et enfin $h(u, v) = \frac{\rho uv}{1+u+Ku^2}$; où a, b, α, ρ, K sont des paramètres > 0.

Classiquement l'opérateur NABLA est tel que $\Delta(u) = \nabla^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (*) *voir l'ANNEXE 1 note sur* γ.

En fait de plus on a les conditions initiales et au bord du domaine $(n.\nabla).\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0, (x, y) \in \delta B$ (bord de B). *(Le lecteur peut faire une figure, cette contrainte au bord du domaine s'appelle la "condition du gradient nul")* Ceci s'interprète comme l'exigence d'un flux de molécules nul sur le bord : il n'y a pas d'échange de molécules avec l'extérieur !

De plus les conditions initiales $u(x, y, 0), v(x, y, 0)$ sont connues.

D'après ce qui a été annoncé dans l'introduction sur la confrontation activateur-inhibiteur, quand la concentration de l'activeur décroit trop rapidement, pour engendrer les motifs, il faut que le portrait de phase (u, v) soit **INSTABLE** [3], [8], [10].

C'est à dire que les valeurs propres du système linéarisé, au voisinage du point stationnaire (u_0, v_0) doivent avoir une $\mathrm{Re}(\lambda)$ positive, pour amortir assez vite mais pas trop : *voir l'ANNEXE 2*.

Ce qui oblige si l'on veut que l'activeur $u > u_s$, pour que l'on ait une tache, que $k_1^2 \leq k^2 \leq k_2^2$: *voir l'ANNEXE 3*.

L'intégration du système donne en sommant les solutions élémentaires

$$\boxed{\mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}) = \begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{pmatrix} \sim \sum_{\mathbf{n},\mathbf{m}} \mathbf{C}_{\mathbf{n},\mathbf{m}} \mathbf{exp}(\lambda(\mathbf{k}^2)\mathbf{t}) \cos \frac{\mathbf{n}\pi\mathbf{x}}{\mathbf{p}} \cos \frac{\mathbf{m}\pi\mathbf{y}}{\mathbf{q}}}$$

où $C_{n,m}$ est un vecteur colonne qui est déterminé à partir des conditions initiales comme coefficient de Fourier, et où u_0, v_0 sont solutions positives de $f(u, v) = g(u, v) = 0$.

La sommation étant faite pour (m, n) tels que $k_1^2 \leq k^2 = \pi^2\left(\frac{n^2}{p^2} + \frac{m^2}{q^2}\right) \leq k_2^2$, et précise $\lambda(k^2)$ tandis que (x, y) sont dans le rectangle $(0 \leq x \leq p)(0 \leq y \leq q)$.

Comme $u > u_s = u_0$ pour qu'il y ait motif; il faut que certains signes soient positifs, *voir l' ANNEXE 3* On constate bien les cas possibles : zébrures, taches.

Dans l'ANNEXE 4 est donnée une simulation Maple, due à Alain Esculier, que je remercie ici.

Nous attendons des lecteurs toute suggestion, choix des paramètres $\alpha, K, \rho, a, b, u_s, d$, *gam*, *aa*, pour trouver d'autres motifs (par exemple les zébrures), possibilité d'un modèle avec des couleurs plus réalistes. Un programme utilisant la superposition des solutions élémentaires est sans doute possible, mais il exige préalablement un calcul de tous les coefficients $C_{n,m}$ déterminés par les conditions initiales et les conditions au bord.

(III) CONCLUSION

Nous n'avons dans ce travail, qu'ébauché une toute petite partie de la morphogenèse, dont la théorie permet de modéliser de modèles évolutifs très différents : Mouvements de foule, évolution de population, échanges financiers (bourse) ; évolution des feux de forêt ; évolution des épidémies ; formes des motifs des coquillages, neurones (Murray), des motifs des poissons, tortues, serpents, diversité des aspects floraux, forme du nez, forme des iris, fond d'oeil, empreintes digitales (Murray) ; croissance du tournesol ; ocelles des plumages ; Réaction chimique ; météo convection ; couches d'eau (Rouleaux de Benard) ; cohésion des cellules (Murray) et même les motifs colorés des bandes de l'anneau de Saturne ! et enfin en acupuncture "puisque la matière vivante est un système thermodynamique instable", qui ne peut se maintenir sans un apport continu d'énergie.

(*) *Opérateur bien connu des physiciens, et des mathématiciens, inventé indépendamment en 1935, par Alexander et Kolmogorov, il est ainsi nommé car il ressemble à un instrument de musique hébraïque, qui a la forme d'un delta* Δ *renversé : on le voit sur le site http://www.rakkav.com/kdhinc/pages/instruments.htm*

Tout cela fait l'objet de recherches très poussées de chercheurs mathématiques et chimistes : Ilya Prigorine, créateur de l'école de l'Université de Bruxelles, a obtenu le prix Nobel de Chimie 1977 pour ses travaus sur la thermodynamique instable (ou thermodynamique des systèmes hors équilibre, ou encore thermodynamique irréversible) et en particulier sa théorie des structures dissipatives.

Les réactions périodiques et les structurations spatiales durant les réactions Anneaux de Lizgange, réactions de Zabotinzky, horloge chimique utilisant un système chimique qui réagit avec une période stable, identification du premier système bi-stable dans les systèmes solide-gaz, font partie de ce domaine de pointe, très divers et étudié.

Dans le cadre de cet article nous n'avons fait que présenter un survol, argumenté de ce vaste problème et par force limité et modeste. Le rôles d'enzymes et de catalyseurs éventuels est aussi à déterminer.

(IV) BIBLIOGRAPHIE : PATTERN

[1] I. Bourdial : blasons chimiques : science et vie décembre 2001 p 12. Science et vie mai 2002 p 129.

[2] A. Connes : géométrie non commutative (interéditions 1990) p 30.

[3] J.P. Demailly : analyse numérique et équations différentielles (Presses universitaires de Grenoble 1991) nouvelle édition : portrait de phase en couleur page 1 de couverture.

[4] H. Guillemot : pourquoi il n'y a pas de zèbre taché ? Science et vie juillet 94 p 66-70; Aout 1994 p 15.

[5] P. de Kepper et E. Dulos : La chimie des formes ; pour la science mai 1997 p 34-39

[6] P. de Kepper : émission archimède de ARTE les taches du Léopard 13 mai 1997 20h-20h30.

[7] J.D. Murray : les taches du léopard ; Pour la science mai 1988 p 78-87 et page 121.

[8] J.D. Murray : Mathematical Biology (Springer 2003 troisième édition) deux tomes. Portraits de phase tome 1 p 503-504.

[9] I. Stewart : visions géométriques (Belin 1994) p 133-135.

[10] C. Zuily et H. Queffélec : éléments d'analyse pour l'agrégation (Masson 1995) p 375-379.

V **Théorie flash**

ANNEXE 1 note sur γ.

La modélisation activeur u -diffuseur v est $\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{t}} = \gamma \mathbf{f}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \ \nabla^2 \mathbf{u} \\ \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{t}} = \gamma \mathbf{g}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \mathbf{d}\nabla^2 \mathbf{v}\end{array}}$ où les conditions aux limites (bord) sont $(n.\nabla)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0$. Avec u(x,y,0) et v(x,y,0) connus sur le bord du domaine, à l'instant initial t=0.

Les modélisations les plus usuelles sont avec les fonctions f, g suivantes :

$$\begin{cases} f(u,v) = a - u + u^2 v, \ g(u,v) = b - u^2 v & \text{SCHNAKENBERG (1979)} \\ f(u,v) = a - bu + \frac{u^2}{v}, \ g(u,v) = u^2 - v & \text{GIERER et MEINHARD (1972)} \\ f(u,v) = a - bu + \frac{u^2}{v(1+ku^2)}, \ g(u,v) = u^2 - v & \text{si on inclut l'inhibition de l'activeur} \\ f(u,v) = a - u - \frac{\rho uv}{1+u+Ku^2}, \ g(u,v) = \alpha(b-v) - \frac{\rho uv}{1+u+Ku^2} & \text{THOMAS (1975) modèle expérimental} \end{cases}$$

où a, b, α, ρ, K, sont des paramètres positifs ; d est le paramètre de diffusion *(d > 1 diffuse plus vite que l'activeur)*, γ est le facteur d'échelle et de temps ; en dimension 2, il est proportionnel à l'aire du domaine.

ANNEXE 2. Pour qu'il y ait tache, il est ESSENTIEL que $u > u_0$, que le taux d'activeur soit supérieur au taux critique u_0. D'autre part la théorie de TURING, de la morphogenèse, dit qu'il doit il y avoir stabilité temporelle en l'absence de perturbation spatiale à partir du point d'équilibre, et instabilité temporelle dans le cas d'une perturbation spatiale : on s'en souviendra au moment d'intégrer le système différentiel linéarisé.

ANNEXE 3 On linéarise le système au voisinage du point d'équilibre (u_0, v_0), et on pose $w = \begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{pmatrix}$; En tenant compte de la formule de TAYLOR YOUNG : $f(u,v) = f(u_0,v_0) + (u-u_0)\dfrac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0) + (v-v_0)\dfrac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0) + o(\sqrt{(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2}$, et la même formule pour g, on assimile le système au système linéaire : $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \gamma A w + D\nabla^2 w$, où $A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \\ \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix}_{u_0,v_0}$, et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

Pour résoudre ce système en tenant compte des conditions aux limites, on décompose la résolution en deux étapes : On cherche d'abord W indépendant du temps, vérifiant le système $\nabla^2 W + k^2 W = 0, \ n.(\nabla W) = 0$, pour (x,y) sur le bord du domaine ; (k est la pulsation et la longueur d'onde est $\frac{2\pi}{k}$).

On cherche des solutions élémentaires W_k, qui sont appelées les fonctions propres du Nabla ∇, pour la pulsation k.

Comme le problème est linéaire, on superpose les solutions élémentaires W_k, sous la forme $w = \sum_k c_k e^{\lambda t} W_k(x,y)$, où λ est la valeur propre, qui détermine la croissance temporelle

(Par exemple si le domaine est $0 \leq x \leq p$ et $0 \leq y \leq q$, et $k^2 = \pi^2\left(\frac{n^2}{p^2} + \frac{m^2}{q^2}\right)$, alors $W_k = W_{n,m}(,y) = C_{n,m} \cos\frac{n\pi x}{p} . \cos\frac{m\pi y}{q}$, où $C_{n,m}$ est un vecteur constant).

On reporte alors ces solutions élémentaires dans le système linéaire complet, et compte tenu de l'indépendance des exponentielles polynômes $e^{\lambda t}$, on obtient $\lambda W_k = \gamma A W_k + D\nabla^2 W_k = \gamma A W_k - Dk^2 W_k$.

Pour que les W_k ne soient pas les solutions banales, il faut que λ soit racine de l'équation caractéristique $det(\lambda\, I - \gamma A + k^2 D) = 0$.

Développant cette équation caractéristique, les λ vérifient l'équation : $\lambda^2 + \lambda[k^2(1+d) - \gamma(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v})] + dk^4 - \gamma(d\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v})k^2 + \gamma^2(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u}) = 0$. On pose $\boxed{\mathbf{h(k^2) = dk^4 - \gamma(d\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v})k^2 + \gamma^2(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u})}}$.

Les conditions de TURING, donnent que $Re(\lambda) < 0$ en cas de l'absence de perturbation spatiale ($k^2 = 0$) (stabilité), et que les solutions doivent être temporellement instables en cas de perturbation spatiale ($Re\lambda > 0$).

- La stabilité linéaire dans le cas k=0, est garantie, si $tr(A) = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} < 0$ (la somme des racines est négative), et si $det(A) = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u} > 0$ (même signe, et somme négative).
- L'instabilité linéaire dans le cas où k^2 n'est pas nul. Cela peut arriver si ou bien le coefficient de λ est négatif strict, ou bien $h(k^2) < 0$.

Comme d'après les conditions en k=0 $\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} < 0$, et $k^2(1+d) > 0$ pour $k \neq 0$, le coefficient de λ est > 0, donc la seule voie possible d'instabilité temporelle pour k non nul est $h(k^2) < 0$.

Cela donne $\boxed{\boldsymbol{\lambda}\mathbf{(k^2) = \frac{1}{2}\left(-[k^2(1+d) - \gamma(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v})] \pm \sqrt{[k^2(1+d) - \gamma(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v})]^2 - 4h(k^2)}\right)}}$

Puisque pour k=0 on exige (stabilité temporelle) que $(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u}) = det(A) > 0$, la seule façon d'avoir $h(k^2) = dk^4 - \gamma(d\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v})k^2 + \gamma^2(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u}) < 0$, est d'avoir $d\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} > 0$; comme d'après la stabilité en k=0 on doit avoir $\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} < 0$, cela implique $\boxed{d \neq 1}$ et que $\frac{\partial f}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v}$ doivent avoir des signes opposés.

En suivant les lignes de niveau du phénomène (le lecteur est invité à faire une figure), on constate que l'on doit avoir $\frac{\partial f}{\partial u} > 0$ et $\frac{\partial g}{\partial v} < 0$ *(en effet par exemple si vous regardez le graphe de f(u,v) en le traversant par une horizontale vous passez de à gauche $f < 0$ à $f > 0$, donc au moment de la traversée f croit par rapport à u, donc $\frac{\partial f}{\partial u} > 0$, raisonnement analogue pour g avec une verticale de traversée)* En retranchant les relations $\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} < 0$ et $d\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} > 0$, on obtient $\boxed{d > 1}$: En termes de mécanisme de réaction diffusion, de la signifie, que pour qu'il y ait motif, il est essentiel que "l'inhibiteur diffuse plus vite que l'activeur". Cela concorde, avec le bon sens.

Cette dernière inégalité $d\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} > 0$ est NÉCESSAIRE mais pas suffisante, pour que $h(k^2) < 0$ *(Rappel but Re(λ) > 0)*

Comme $h(k^2) = dk^4 - \gamma(d\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v})k^2 + \gamma^2(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u})$, une simple étude, (en fonction de la variable k^2, donne $h_{minimum} = \gamma^2\left[(det(A) - \frac{(d\partial f/\partial u + \partial g/\partial v)^2}{4d}\right]$, atteint pour $k^2 = k_m^2 = \gamma\frac{d\partial f/\partial u + \partial g/\partial v}{2d}$.

Pour qu'on puisse espérer avoir des $h(k^2) < 0$, il faut qu'au moins $h_{mini} < 0$, soit $\boxed{\mathbf{\frac{(d\partial f/\partial u + \partial g/\partial v)^2}{4} > det(A)}}$.

Ce qui donne un rapport d critique d_c à partir duquel, on peut avoir un intervalle non réduit à un point où $h(k^2) < 0$.

d_c vérifie l' équation $d_c^2(\frac{\partial f}{\partial u})^2 + 2(2\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v})d_c + (\frac{\partial g}{\partial v})^2 = 0$; d_c doit être > 1.

En étudiant $h(k^2)$ (graphe ci contre), on voit que la condition $h(k^2) < 0$, implique $k_1^2 < k^2 < k_2^2$; ce qui dans la superposition des solutions impliquera la restriction des sommations par rapport à k, de façon que k^2 soit dans cet intervalle.

La résolution de l'équation du second degré (par rapport à k^2) $h(k^2) = 0$, donne les valeurs :

$$\boxed{\mathbf{k_1^2 = \gamma\frac{(d\partial f/\partial u + \partial g/\partial v) - \sqrt{(d\partial f/\partial u + \partial g/\partial v)^2 - 4d\,det(A)}}{2d} < k^2 < k_2^2 = \gamma\frac{(d\partial f/\partial u + \partial g/\partial v) + \sqrt{(d\partial f/\partial u + \partial g/\partial v)^2 - 4d\,det(A)}}{2d}}}$$

(n'oublions pas qu'en fait toutes les dérivées telles que $\frac{\partial f}{\partial u}$, sont en fait remplacées par leur valeur au point (u_0, v_0)).

On calcule alors les $\lambda(k^2)$ correspondants, au moyen d'une formule encadrée. On peut le faire au moyen de Maple, en tenant compte des valeurs des paramètres données dans le tableau ci-après.

paramètres	panthère, genette	chèvre, dahu
$\alpha > \mathbf{0}$	$1,5$	$1,5$
$\mathbf{K} > \mathbf{0}$	$0,1$	$0,125$
$\rho > \mathbf{0}$	$18,5$	13
$\mathbf{a} > \mathbf{0}$	92	103
$\mathbf{b} > \mathbf{0}$	64	77
$\mathbf{u_s}$ **noir** $\mathbf{u} < \mathbf{u_s}$	10	23
$\mathbf{v_s}$	9	24
$\mathbf{d} > \mathbf{1}$ **rapport de diffusion**	10	7
γ **facteur d'échelle**	9 ; 15 ; 25 $u < u_s*$	$< 0,1$; 0.5 ; 25 ; 250 ; 1250 ; 3000 ; 5000

Calculs pratiques

Avec Maple on forme les fonctions f(u,v), g(u,v), en faisant intervenir les paramètres ; on calcule avec mapple suivant ces paramètres, k_1^2, k_2^2, et $\lambda(k^2)$, ce qui permet d'en déduire les valeurs de $k^2 = \pi^2\left(\frac{n^2}{p^2} + \frac{m^2}{q^2}\right)$ qui sont dans $]k_1^2, k_2^2[$, puis les valeurs de m et n de sommation, de la formule des motifs, que l'on fait tracer en Maple.

ANNEXE 4 : simulations diverses Voici d'abord le programme en Maple V.5 d'Alain Esculier, qui discrétise le système différentiel réaction-diffusion et colore les points du rectangle considéré, non pas à partir de $u > u_s$ mais suivant la croissance de u. Ceux qui veulent éviter de le retaper, peuvent le demander par mail. On a besoin de partir d'un $u0$, ou $v0$ non uniforme pour que la couleur du motif ne soit pas uniforme. Pour avoir plusieurs taches on change le motif de départ $u0(x, y)$ ou la diffusion $v0(x, y)$. Le evalf(Pi) permet d'avoir une dissymétrie.

```
# Pattern - essai d'intégration numérique
restart:
# pax:=0.01 : # pas en x et en y
pat:=0.05 : # pas en temps t
u0:= (x,y) -> 1 + evalf(sin(Pi*x)*sin(Pi*y)) ;
v0:= (x,y) -> 1+ evalf(sin(Pi*x)*sin(Pi*y));
a:=92; b:=64; r:=18.5; K:=0.1; alpha:=1.5; gam:=1;
aa:=1.5; # alpha panthère a:=50; b:=64; r:=18.5; K:=0.5; alpha:=1.5 ; gam:=2; aa:=1.5; aa:=1.5;
h:= (u,v) -> r*u*v/(1+u+K*u^2);
f:= (u,v) -> a - u -h(u,v);
g:= (u,v) -> aa*(b -v) -h(u,v);
# Discrétisation du système : le pas pour t se répercute dans u et v de proche en proche.
UV:=proc(t,x,y)
local tampu, tampv, pt, i, res;
global f,g, gam, pat;
tampu:= u0(x,y): tampv:=v0(x,y):
pt:= floor(t/pat):
for i to pt do
tampu:=tampu+pat*( gam*f(tampu,tampv)+ diff(tampu,x$ 2)+ diff(tampu,y$ 2) );
tampv:=tampv+pat*( gam*g(tampu,tampv) + diff(tampv,x$ 2)+ diff(tampv,y$ 2) );
od;
res:= tampu+(t-pt*pat)*( gam*f(tampu,tampv)+ diff(tampu,x$ 2)+ diff(tampu,y$ 2) );
res-subs(x=0,y=0,res):
end:
with(plots):
# plotsetup(gif,plotoutput="c:/pattern.gif",plotoptions="width=300,height=300"):
st:=time():
plotsetup(inline): # inline ou window
g1:=seq(plot3d(1/3*UV( (0.5*i)*pat,x,y),x=0..1,y=0..1,shading=ZHUE
,grid=[15,15]),i=0..3):
# g1:=seq(plot3d(1/(i+1)*UV((0.25*1)*pat,x,y),x=0..1.2,y=0..1.2;grid=[20,20],
orientation=[0,0],style=patchnogrid),i=0..10);#patchnogrid pour enlever la grille
g2:=seq(plot3d(1/3*UV( (2+0.2*i)*pat,x,y),x=0..1,y=0..1,shading=ZHUE
,grid=[15,15]),i=0..5):
```

```
display([g1,g2],scaling=constrained,insequence=true,orientation=[0,0]);
# displays([g1],scaling=constrained,insequence=true,orientation=[0,0], shading=ZHUE,style=patchnogrid);
chrono:=(time()-st)*seconde(s);
```

Pour avoir la troisième image de cette animation, par exemple pour l'imprimer il suffit de taper g1[3] par exemple pour avoir le troisième image. Si on les veut toutes : for i to nops([g1]) do [g1][i] od ;

Dr Yann Bouret de l'ENS de Chimie UMR 8640 (Lab P9) a mis sur son site d'une part des images magnifiques, et proches de la réalité sur son site :

http://curie.chimie.ens.fr/~ybouret/vidiani/results/exemples.html

D'autre part a détaillé tous les éléments de son programme, y compris son programme source, sur :

http://curie.chimie.ens.fr/~ybouret/vidiani/index.html

La résolution de fait de manière implicite (alternée) pour la stabilité en utilisant des matrices de diffusion pré-calculées en fonction des paramètres, et avant simulation tenant compte des conditions limites.

À lui aussi toute ma gratitude pour avoir permis d'illustrer et de quelle manière, le thème de mon article.

(VI) MICRO GLOSSAIRE :

B brisure de symétrie : perte de symétrie, par exemple lors du flambage par compression d'une sphère

D diffusion : action par laquelle un phénomène se répand (chaleur, fluide, gaz, lumière, particules, pigment, rumeur)

M morphogenèse : (embryonologie) développement des formes et des structures des organismes ; motifs : dessins (pattern en anglais)

R Réaction : réponse de l'organisme à une action chimique, biologique,...
