L.G.Vidiani 64 rue de l'EUROPE 21121 FONTAINE LÈS DIJON TEL : 03 80 56 65 54
Adresse email Internet : *lg_vidiani@ipac.fr*

Le produit d'Hadamard

(Zip 2 TEX hadaq.tex) version 27 04 04 11h00

LE PRODUIT D'HADAMARD DE DEUX SÉRIES ENTIÈRES

Une question d'oral ultra-classique (par exemple [8]) consiste à proposer le produit d'Hadamard noté $f \odot g$ de deux séries entières formelles $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$, à coefficients complexes, et de la variable complexe z, défini de la façon suivante $(f \odot g)(z) = \sum_{n\geq 0} a_n b_n z^n$ en demandant de relier les rayons de convergence $R(f)$, $R(g)$ et $R(f \odot g)$.

À cause de l'inégalité $\overline{\lim}|a_n b_n|^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim}(|a_n|^{\frac{1}{n}}|b_n|^{\frac{1}{n}}) \leq \overline{\lim}(|a_n|^{\frac{1}{n}}\overline{\lim}(|b_n|^{\frac{1}{n}}$ et de la formule d'Hadamard (encore lui !) donnant le rayon de convergence d'une série entière : $R(f) = \frac{1}{\overline{\lim}(|a_n|^{\frac{1}{n}}}$, on a $\boxed{\mathbf{R(f \odot g) \geq R(f).R(g)}}$, cette inégalité restant valable même si $R(f)$ et $R(g)$ sont dans $\overline{\mathbb{R}}$, pouvu que leur produit ne soit pas indéterminé. Elle devient même une égalité dans le cas où l'une des suites $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ ou $|b_n|^{\frac{1}{n}}$ a une limite.

Par contre on ne peut rien dire dans le cas général, l'inégalité pouvant être stricte ou le second membre indéterminé, et ceci à cause des propriétés de l'existence de diviseurs de zéro dans l'anneau $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ muni du produit $a \odot b = (a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\text{Par exemple pour } \begin{cases} a_n = 1 + (-1)^n,\ b_n = 1 - (-1)^n & R(f) = R(g) = 1 \text{ mais } R(f \odot g) = +\infty \\ a_n = n!,\ b_n = \frac{1}{n!} & R(f) = 0,\ R(g) = +\infty \text{ mais } R(f \odot g) = 1 \\ a_{2n} = 1,\ a_{2n+1} = \frac{1}{2^{2n+1}},\ b_{2n} = \frac{1}{2^{2n}},\ b_{2n+1} = 1 & \text{on a } R(f) = R(g) = 1 \text{ et } R(f \odot g) = 2 \end{cases}$$

C'est tout ? Ah non ! C'est un peut court jeune homme ! car on peut dire encore bien des choses en somme (D'après Cyrano, d'Edmond Rostand acte 1 scène 4).

• (**1**) Tout d'abord : Qui était Jacques Hadamard (1865-1963) ? un des plus grands mathématiciens de son temps, qui succéda à l'Académie des Sciences à Henri Poincaré lui même, dont la biographie est sur le site *http : //www−history.mcs.st−and.ac.uk/ ∼ history/Mathematicians/Hadamard.html*, tellement distrait, qu'une journée de promenade en montagne il oublia sa sœur pour rechercher des fougères, sa distraction légendaire servit de modèle à celle du savant Cosinus, il était aussi grand oncle par alliance du mathématicien Laurent Schwartz médaille Fields 1950 pour sa théorie des distributions. C'est lui qui fut l'auteur de ce rébus prodigieux de concision : $\boxed{g}$, dont je vous donnerais le code un jour si vous êtes sages, ou si vous me demandez gentiment par mail.

• (**2**) La fraction rationnelle $f(z) = \frac{1}{1-z}$ est puisque $a_n = 1$ neutre à droite et à gauche pour la multiplication $\odot$.

• (**3**) Comme la série en t, de terme général $f(t)b_n(\frac{z^n}{t^{n+1}})$ est normalement donc uniformément convergente pour $|t| = \rho < R(f)$ et $\frac{1}{z}t| \leq r' < R(g)$, puisque $|f(t)b_n(\frac{z^n}{t^{n+1}})| \leq \big(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\rho^n\big)|b_n|r'^n \frac{1}{\rho}$, on peut donc intégrer terme à terme le long du cercle $t = \rho e^{i\theta}$, pour ρ fixé strictement positif de façon que $\rho < R(f)$ et $|z| \leq \rho r'$:

Comme $\int_{|t|=\rho} t^p \frac{dt}{t^{n+1}} = \int_0^{2\pi} \rho^{p-n} i e^{i(p-n)\theta} d\theta = 2\pi i \delta_{n,p}$ où δ représente le symbole de Kronecker.

Ce qui donne $\int_{|t|=\rho} f(t)b_n(\frac{z^n}{t^{n+1}})dt = \int_{|t|=\rho} \sum_0^{+\infty} a_p t^p b_n(\frac{z^n}{t^{n+1}})dt = 2\pi i a_n b_n z^n$, d'où en raison des permutations, justifiées par la convergence normale, donc uniforme, des sommes et des intégrales, nous avons la formule ci-dessous qui donne la somme la série produit d'Hadamard.

$$\boxed{\mathbf{(f \odot g)(z)} = \sum_{\mathbf{n=0}}^{+\infty} \mathbf{a_n b_n z^n} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\pi i}} \int_{|\mathbf{t}|=\rho} \mathbf{f(t) g(\frac{z}{t}) \frac{dt}{t}}, \textbf{ pour } \rho < \mathbf{R(f)} \textbf{ et } |\mathbf{z}| \leq \rho\mathbf{R(g)}}$$

Cette formule (voir [3] et [9]) est en particulier utilisée dans la théorie des fonctions résurgentes, théorie construite par le mathématicien français Jean Escalle [5].

Elle présente aussi quelques analogies avec la formule d'inversion de Möbius [8] et aide à la formule de Gützmer [7] qui a de multiples applications que l'on trouve avec Google. Le lecteur trouvera de multiples directions en recherchant aussi les auteurs tels que Jungen et Schutzenberger.

• (**4**) Si f et g sont toutes deux des fonctions rationnelles alors $f \odot g$ l'est aussi. Une fonction rationnelle f pouvant se caractériser par des coefficients a_n exponentiels polynômes, ou vérifiant une récurrence linéaire, ou par la nullité des déterminants de Hankel ou Kronecter associés. Tout ceci est explicité dans [2], [4] et [6].

- (**5**) Si f est rationnelle et g algébrique alors $f \odot g$ est algébrique. [2]

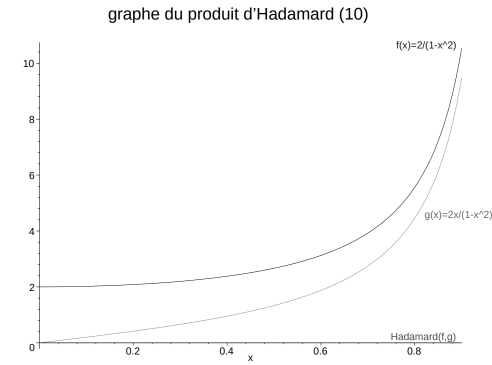
- (**6**) Si f et g satisfont à une équation différentielle à coefficients polynômes, il en est de même de $f \odot g$. [2]

- (**7**) Le déterminant de la matrice C produit d'Hadamard noté $A \odot B$ de deux matrices A et B, défini par $c_{i,j} = a_{i,j}b_{i,j}$ vérifie $det(A \odot B) \geq det(A)det(B)$. [1]

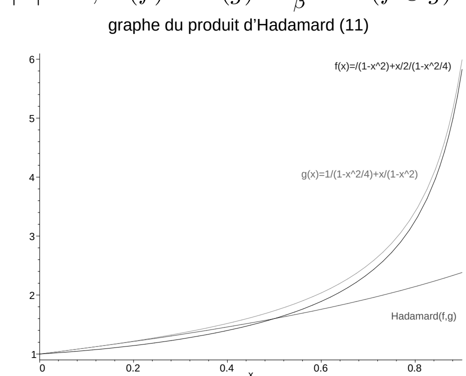
- (**8**) On conjecture que le permanent d'une matrice A défini par une formule analogue à celle du déterminant mais sans la signature $per(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1,\sigma(1)}...a_{n,\sigma(n)}$ vérifie $perm(A \odot B) \leq perm(A).perm(B)$. Le permanent joue un grand rôle en théorie combinatoire. [1], [8]

- (**9**) L'ensemble de singularités de $f \odot g$ est inclus dans l'ensemble des produits des singularités de f et de g. [9] C'est le théorème de multiplication qu'Hadamard démontra en 1892. Le premier exemple rappelé en (10) montre que cette inclusion peut être stricte.

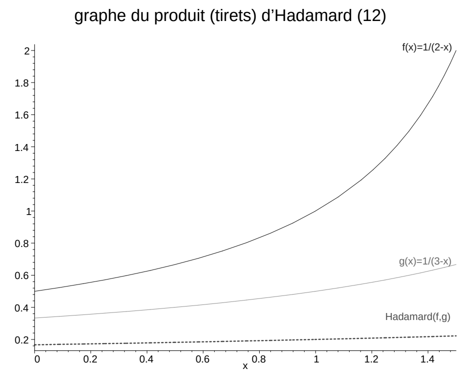
- (**10**) Dans le premier exemple pour montrer que le rayon du produit n'est pas toujours égal au produit des rayons, on a $f(z) = \frac{2}{1-z^2}$, $g(z) = \frac{2z}{1-z^2}$ et $(f \odot g)(z) = 0$.



- (**11**) Dans le troisième exemple pour montrer que le rayon du produit n'est pas toujours égal au produit des rayons, un calcul simple donne $f(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{z}{2}\frac{1}{1-\frac{z^2}{4}}$, $g(z) = \frac{1}{1-\frac{z^2}{4}} + \frac{z}{1-z^2}$ et $(f \odot g)(z) = \frac{1+z}{1-\frac{z^2}{4}}$. On peut généraliser avec $a_{2p} = b_{2p+1} = \alpha^{2p}$ et $b_{2p} = a_{2p+1} = \beta^{2p}$ qui donnent $f(z) = \frac{1}{1-\alpha^2 z^2} + \frac{z}{1-\beta^2 z^2}$ et $g(z) = \frac{1}{1-\beta^2 z^2} + \frac{z}{1-\alpha^2 z^2}$ qui donnent $(f \odot g)(z) = \frac{1+z}{1-(\alpha\beta z)^2}$ et avec $|\beta| > |\alpha| > 0$, $R(f) = R(g) = \frac{1}{\beta}$ et $R(f \odot g) = \frac{1}{\alpha\beta}$.



- (**12**) Pour tester le programme Maple donné en annexe utilisant la formule intégrale du (3), supposant $ab \neq 0$, $f(z) = \frac{1}{a-z}$, $g(z) = \frac{1}{b-z}$ on a (puisque $a_n = \frac{a}{a^n}$ et $b_n = \frac{b}{b^n}$ donc $a_n b_n = \frac{ab}{(ab)^n}$) $(f \odot g)(z) = \frac{1}{ab-z}$. On vérifie dans ce cas le point (9), et avec $a = 1$ ou $b = 1$ le point (2).



• (**13**) Si $a_n > 0$, et $\alpha > 0$ les propriétés de la limite supérieure prouvent le le rayon R' de convergence de la série $\sum (a_n)^\alpha z^n$ est $R' = R^\alpha$ et dans le cas particulier $\alpha = 2$ on constate que $R(f \odot f) = R(f)^2$.

Illustration en Maple du produit d'Hadamard

grâce à la formule (3) Maple devrait donner le résultat avec :

$hadamard := (f, g, z, rho)$-¿$1/(2 * Pi) * int(f(rho * exp(I * theta)) * g(z/rho * exp(-I * theta)), theta = 0..2 * Pi)$;

Malheureusement cette belle formule est inexploitable, en effet comme l'expliquent Gomez, Salvy, Zimmermann dans leur livre Calcul formel : mode d'emploi, pages 242-243 et p 238, Maple donne 0 soit parce que l'intégrande lui même contient une fonction multiforme à qui Maple attribue à priori une détermination sans se préoccuper de savoir si c'est la bonne, soit parce qu'une primitive n'est pas définie sur tout l'intervalle d'intégration, à cause d'une signularité dans l'intervalle.

Le contournement pas la méthode des résidus (readlib(residue):) ne donne rien, essentiellement car le contour choisi (restriction du rayon ρ du cercle entourant l'origine) exclut tout pôle dans le disque correspondant. En fait la formule (3) comme sa démonstration le prouve, est du type Fourier.

La seule possibilité est de représenter les exemples de produits d'Hadamard que l'on peut expliciter par la méthode directe des séries, au moyen du programme Maple V.5 ci dessous :

$restart : with(plots) : a := 0.9 :$

$graf10 := plot([2/(1-x^2), 2*x/(1-x^2), 0], x = 0..0.9, title = `graphe\ du\ produit\ d'Hadamard\ (10)`, color = [blue, green, red]) :$

$t1 := textplot([a, 2/(1-a^2), `f(x) = 2/(1-x^2)`], color = blue, align = \{LEFT, ABOVE\}) :$

$t2 := textplot([a, 2*a/(1-a^2) - 5, `g(x) = 2x/(1-x^2)`], color = magenta, align = \{right, ABOVE\}) :$

$t3 := textplot([a, +0.1, `Hadamard(f, g)`], color = red, align = \{LEFT, ABOVE\}) :$

$display([graf10, t1, t2, t3]);$

$graf11 := plot([1/(1-x^2) + x/2/(1-x^2/4), 1/(1-x^2/4) + x/(1-x^2), (1+x)/(1-x^2/4)], x = 0..0.9, title = `graphe\ du\ produit\ d'Hadamard\ (11)`, color = [blue, green, red]) : a := 0.9 :$

$t1 := textplot([a, 1/(1-a^2) + a/2/(1-a^2/4), `f(x) = /(1-x^2) + x/2/(1-x^2/4)`], color = blue, align = \{LEFT, ABOVE\}) :$

$t2 := textplot([a-0.071, 1/(1-a^2/4) + a/(1-a^2) - 2, `g(x) = 1/(1-x^2/4) + x/(1-x^2)`], color = magenta, align = \{LEFT, ABOVE\}) :$

$t3 := textplot([a, (1+a)/(1-a^2/4) - 0.8, `Hadamard(f, g)`], color = red, align = \{LEFT, ABOVE\}) :$

$display([graf11, t1, t2, t3]);$

$graf12 := plot([1/(2-x), 1/(3-x), 1/(6-x)], x = 0..1.5, title = `graphe\ du\ produit\ (tirets)\ d'Hadamard\ (12)`,$
$color = [blue, green, red], linestyle = [1, 1, 4], thickness = [0, 0, 3], numpoints = 10) :$

$a := 1.5 : t1 := textplot([a, 1/(2-a), `f(x) = 1/(2-x)`], color = blue, align = \{LEFT, ABOVE\}) :$

$t2 := textplot([a, 1/(3-a), `g(x) = 1/(3-x)`], color = magenta, align = \{LEFT, ABOVE\}) :$

$t3 := textplot([a, 1/(6-a) + 0.1, `Hadamard(f, g)`], color = red, align = \{LEFT, ABOVE\}) :$

$display([graf12, t1, t2, t3]);$

BIBLIOGRAPHIE

[1] American Mathematical Monthly : janvier 1982 p 57.

[2] L. Comtet : Analyse combinatoire tome I, PUF 1970, p 97-98.

[3] J. Kuntzmann : variable complexe, Hermann 1967, p 133.

[4] E. Leichtnam et X. Schauer exercices de mathématiques, Ellipses 1982, tome 1 p 151 et tome 3 p 89.

[5] B. Malgrange : Enseignement mathématique juillet-décembre 1985 p 261-282.

[6] D. P. Parent : exercices de théorie des nombres, Gauthier-Villars 1978, p 85-97.

[7] Problèmes : DUES Dakar MP 1972 ; Agrégation 1954 ; Deug Toulouse MP 2 1979 : formule de Gützmer (1888) ;

[8] Revue de Mathématiques Spéciales novembre 1973, question d'oral 19907 page 124. Mai 1982 rubrique questions et réponses p 404 pour l'inversion de Möbius de la fonction zéta par une série de Dirichlet ; décembre 80 : corrigé de Mr Bayart du Problème Agregation 1980 p 220-230 avec commentaires sur le permanent.

[9] E. C. Titchmarsh, the theory of functions, Oxford 1952, p 157-160.