

Signal numérique et théorie de l'échantillonnage

Frédéric Cao

<http://www.dma.ens.fr/culturemath>

Du compact-disc, au DVD, en passant par l'appareil photo numérique, le scanner, et une hypothétique télévision numérique (plus en panne politique que technologique), le numérique a fait une entrée progressive mais écrasante et sans doute irréversible dans la vie quotidienne. Ce n'est évidemment pas sans raison : pour le meilleur et pour le pire, les signaux numériques sont plus simple à dupliquer (et donc à diffuser), ils peuvent être efficacement compressés et transmis, ils sont faciles à stocker, et on peut aisément les manipuler. De plus, les vendeurs n'ont de cesse de vanter les qualités des signaux numériques, tant audio que vidéo. Dans cet article, nous limiterons quelque peu cet enthousiasme et verrons qu'un signal numérique construit sans précaution peut présenter des défauts perceptuels flagrants. Fort heureusement, un examen quelque peu minutieux de la nature des signaux numériques et un passage par l'analyse de Fourier nous montrerons comment aisément éviter ces défauts.

1 Formation des signaux numériques

1.1 Un modèle simple de conversion analogique-numérique

Un signal numérique audio ou vidéo est une suite de 0 ou de 1 (*bits*), obtenu à partir d'une mesure d'un phénomène physique et de plusieurs étapes de traitement dont nous ne citons ici que les principales. Dans le cas du son, on mesure les variations de la pression de l'air au cours du temps, au voisinage d'un point (le micro), sensé prendre la place de l'oreille. On peut modéliser ces variations par une fonction $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, où $p(t)$ représente la variation, à l'instant t , de la pression par rapport à une pression de référence. Dans le cas d'une image en niveau de gris, on s'intéresse à

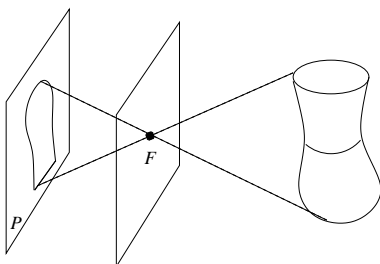


FIG. 1 – Caméra « pinhole » (tête d'épingle). Les rayons lumineux émis ou réfléchis par l'objet à droite passe par une ouverture ponctuelle et viennent frapper le plan focal à gauche. En réalité l'ouverture n'est pas strictement ponctuelle et concentre les rayons lumineux (lentille). En revanche, le plan focal est alors à distance déterminée de la lentille.

la lumière émise ou réfléchi par les objets présents dans la scène. Cette lumière passe par un dispositif optique qui concentre les rayons (le cristallin pour l'œil, l'objectif pour un appareil photo),

avant de frapper une surface qu'on appellera pour simplifier plan focal (Dans l'œil, il s'agit de la rétine, qui n'a rien de plan). Nous modéliserons l'intensité lumineuse par une fonction $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, et $u(x)$ représente l'intensité lumineuse captée au point x . Ce modèle permet de décrire les images en niveau de gris, mieux connues de manière impropre sous le nom d'images en noir et blanc.

Dans les deux cas, le signal « réel » (dit encore analogique) est modélisé par une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, d valant 1 pour un son, et 2 pour une image fixe. La *conversion analogique-numérique* de f en un signal numérique g peut se voir, de manière idéale, comme l'application successive de trois opérateurs, résumée par la formule suivante :

$$g = Q(\Pi_\Gamma(h * f)). \quad (1)$$

où

- $h * f$ est la convolution de f avec h , définie par $h * f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} h(t)f(x-t)dt$. Elle caractérise la qualité du capteur (la lentille pour l'image, et le microphone pour le son). En effet, la réponse de celui-ci étant raisonnablement linéaire et invariant par translation, on l'identifie à une convolution (un résultat classique d'analyse stipule que tout opérateur linéaire, invariant par translation et « stable » est une convolution). La fonction h , dite réponse impulsionnelle du capteur, atténue les variations rapides de f et est dite filtre passe-bas. Elle est généralement connue.
- Π_Γ représente la projection du signal sur une grille discrète Γ , souvent de la forme $a\mathbb{Z}^d$ avec $a > 0$. Elle signifie qu'on ne mesure $h * f$ qu'aux points de Γ . En pratique, on ne peut bien sûr pas mesurer des valeurs parfaitement localisées et on mesure des moyennes de $h * f$ au voisinage de chaque point de Γ . Néanmoins, ce flou supplémentaire peut s'incorporer dans h . D'autre part, cette grille est en pratique d'étendue finie, puisqu'elle est restreinte à l'intervalle de temps d'observation pour les sons et à la fenêtre de prise de vue pour les images.

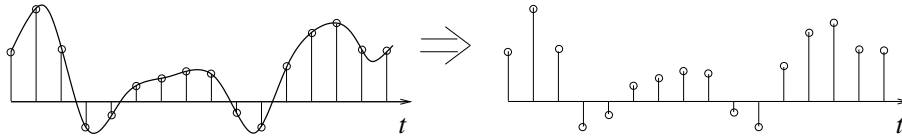


FIG. 2 – Échantillonnage régulier d'un signal temporel. On ne retient du signal que les valeurs prises à des instants régulièrement espacés.

- $Q : \mathbb{R} \rightarrow M$ désigne un opérateur de quantification (non injectif), qui à une valeur réelle associe une valeur appartenant à un ensemble *fini*.

Viennent en plus s'ajouter divers phénomènes de bruit que nous négligerons ici. Dans le cas où $\Gamma = a\mathbb{Z}^d$, a s'appelle le pas de la grille et a^{-1} est la fréquence d'échantillonnage.

Le signal numérique g est donc une application à variable dans Γ et à valeurs dans M .

1.2 Restitution d'une image numérique

Le problème la restitution du signal numérique est de produire un signal f_r à partir de g . Bien entendu, il s'agit de construire f_r aussi proche de f que possible. La quantification ne pose pas d'obstruction théorique complexe : il faut choisir un ensemble de valeurs discrètes M assez grand ; la seule limitation est le coût de stockage de ces valeurs. Dans la suite, nous ne nous intéresserons pas non plus à la déconvolution avec h (autrement dit au déflouage). En effet, on fera l'hypothèse, aujourd'hui raisonnable, que la précision du capteur est supérieure à celle de la perception humaine. Le centre de nos investigations sera alors : *à partir de la donnée d'un signal discret défini sur une*



FIG. 3 – *Effet de la quantification sur les images. De gauche à droite et de haut en bas. Image originale avec 256 niveaux de gris, puis respectivement 20, 10 et 5 niveaux de gris. Les effets de quantification sont très visibles à 20 niveaux de gris et la qualité désastreuse à 5. En revanche, il n’y a aucun problème à interpréter la plupart des formes.*

grille Γ , reconstruire le signal en chaque point de l’espace \mathbb{R}^d .

Il s’agit donc d’un problème d’interpolation : comment reconstruire un continuum de valeurs à partir d’un sous-ensemble dénombrable ? Nous verrons qu’une solution existe, pourvu que f ne varie « pas trop vite » (nous donnerons bien sûr un sens précis à cette hypothèse). De plus, cette solution est explicite, et fait l’objet du Théorème de Shannon. Celui-ci nécessite des éléments de base de la théorie de Fourier. Dans le souci d’une présentation élémentaire, nous éviterons d’utiliser trop directement la théorie des distributions.

2 Séries et Transformées de Fourier

2.1 Séries de Fourier

On commence par rappeler quelques définitions et résultats sur la décomposition des fonctions périodiques en séries de Fourier. Pour $T > 0$, on note $L^2(0, T)$ les fonctions de carré sommables dans $[0, T]$, c’est-à-dire

$$L^2(0, T) = \left\{ f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}, \int_0^T |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}.$$

Cet espace est muni d’un produit scalaire (hermitien), induisant une norme, appelée *norme* L^2 :

$$(f|g) := \int_0^T f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Remarquons qu’en vertu de l’inégalité de Cauchy-Schwarz, une fonction de $L^2(0, T)$ est intégrable sur $[0, T]$. De plus, à une fonction de $L^2(0, T)$, on peut associer une unique fonction T -périodique, en recopiant f sur les intervalles de type $[nT, (n+1)T[$.

Théorème 1 *Soit $f \in L^2(0, T)$. Alors,*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i2\pi nx/T}, \quad (2)$$

où

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T e^{-i2\pi nx/T} f(x) dx. \quad (3)$$

Dans cette définition, la série de fonctions est convergente dans $L^2(0, T)$, pour la norme L^2 . Un résultat difficile de Carleson (1965) prouve qu'il y a en fait convergence presque partout. Lorsque f est continue, alors il y a convergence en tout point. Cette définition et l'approximation qui en découle se généralise en dimension quelconque, pour des fonctions périodiques sur un réseau polygonal de forme quelconque. Nous renvoyons le lecteur à [2] pour un exposé très complet. Nous nous contenterons d'énoncer le résultat pour une grille régulière de type $T\mathbb{Z}^d$, dans lequel il suffit de remplacer les produits par des produits scalaires. Pour X et y dans \mathbb{R}^d , on notera donc $x \cdot y = \sum_{i=1}^d x_i y_i$.

Définition 1 Soit $f \in L^2([0, T]^d)$. Alors,

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_n e^{i2\pi k \cdot x/T} \quad (4)$$

avec

$$c_n = \frac{1}{T^d} \int_{[0, T]^d} e^{-i2\pi n \cdot x/T} f(x) dx. \quad (5)$$

2.2 Transformation de Fourier dans L^1

On note $L^1(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}, \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx < +\infty\}$ l'ensemble des fonctions sommables de \mathbb{R}^d .

Définition 2 (et Proposition) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On appelle transformée de Fourier (T.F.) de f la fonction notée \hat{f} à variable dans \mathbb{R}^d et à valeurs complexes définie par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx. \quad (6)$$

La transformée de Fourier de f est une fonction continue qui tend vers 0 à l'infini.

On a le résultat d'inversion suivant.

Théorème 2 Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi. \quad (7)$$

Ce résultat signifie qu'on peut décrire f par une superposition (infinie) de fonctions oscillantes élémentaires (les exponentielles complexes). Il généralise la décomposition en séries de Fourier. Dans (7), $\hat{f}(\xi)$ apparaît comme le poids de la fréquence ξ dans la décomposition de f . Ainsi, si f est régulière, on s'attend à ce que sa transformée de Fourier (les traiteurs de signal parlent aussi de *spectre*) ne contienne que peu de hautes fréquences. Autrement dit, la transformation de Fourier échange régularité et décroissance à l'infini. Cette intuition est justifiée par les résultats suivants.

Proposition 1 Soit f de classe C^k telle que ses dérivées d'ordre inférieur à k soient sommables. Alors il existe une constante C telle que

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{C}{|\xi|^k}. \quad (8)$$

La preuve s'obtient en intégrant (6) k fois par partie.

Inversement, si la transformée d'une fonction est assez petite à l'infini, alors, d'après le résultat suivant, cette fonction est régulière.

Proposition 2 Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\int |\hat{f}(\xi)|(1 + |\xi|^d) d\xi < +\infty$. Alors f est de classe C^k .

Cela se prouve en appliquant k fois le théorème de dérivation sous le signe somme dans (7).

2.3 Transformation de Fourier dans L^2

Définissons à présent l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ des fonctions de carré sommable (sous entendu sur \mathbb{R}^d) :

$$L^2(\mathbb{R}^d) = \left\{ f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}, \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}.$$

Comme dans le cas de $L^2(0, T)$, cet espace est muni d'un produit scalaire (hermitien), induisant une norme L^2 :

$$(f|g) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \cdot \overline{g(x)} dx$$

On aura besoin par la suite de calculer des transformée de Fourier de fonctions de carré sommable. En général, ces fonctions ne sont pas sommables on ne peut pas directement appliquer la définition 2. On a alors recours à un argument de densité.

On commence par définir la classe de Schwartz, comme étant l'ensemble $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions de classe C^∞ , dont le produit des dérivées avec n'importe quel polynôme est une fonction bornée. (Cette borne peut dépendre de la fonction, de l'ordre de dérivation et du degré du polynôme.)

On montre ensuite que, sur \mathcal{S} , la transformation de Fourier est une isométrie pour la norme L^2 (à un facteur $(2\pi)^d$ près). Pour finir, si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on l'approche par une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Cette suite est de Cauchy, et l'égalité de Parseval (voir ci-dessous) montre que les transformées de Fourier des f_n est aussi de Cauchy. Comme L^2 est complet, les \hat{f}_n convergent et on appelle \hat{f} cette limite.

Théorème 3 *La transformation de Fourier s'étend aux fonctions de carré sommables. De plus, on a pour tous $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$,*

$$\int f(x) \bar{g}(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \hat{f}(\xi) \bar{\hat{g}}(\xi) d\xi. \quad (\text{identité de Plancherel}) \quad (9)$$

$$\int |f(x)|^2 dx = \frac{1}{(2\pi)^d} \int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi. \quad (\text{égalité de Parseval}) \quad (10)$$

Si on note \mathcal{F} l'opérateur qui, à une fonction de L^2 , associe sa transformée de Fourier, l'identité de Plancherel et l'égalité de Parseval nous disent que $\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}$ est un opérateur unitaire sur L^2 . En particulier, son inverse est simplement son conjugué. Comme application de la transformation de Fourier dans L^2 et de l'inversion de Fourier, on montrera aisément le résultat suivant :

$$f(x) = \frac{\sin ax}{ax} \implies \hat{f}(x) = \frac{\pi}{a} \mathbf{1}_{[-a, a]}.$$

2.4 Formule de Poisson

Pour en finir avec ces rappels sur la transformée de Fourier, nous donnons ici un énoncé de la très utile formule de Poisson.

Théorème 4 *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(x + kT) = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^d \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \hat{f} \left(\frac{2n\pi}{T} \right) e^{i2\pi n \cdot x/T}. \quad (11)$$

Preuve. La somme de gauche de la formule de Poisson est bien convergente car f est à décroissance rapide.¹ Cette fonction est périodique et dans $L^2(0, T)$ (car bornée). On peut donc la décomposer en série de Fourier et le calcul des coefficients donne pour $n \in \mathbb{Z}^d$,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T^d} \int_{[0, T]^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(x + kT) e^{-i2\pi n \cdot x/T} dx \\ &= \frac{1}{T^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int_{[0, T]^d} \hat{f}(x + kT) e^{-i2\pi n \cdot x/T} dx \quad \text{par convergence uniforme de la série} \\ &= \frac{1}{T^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) e^{-i2\pi n \cdot x/T} dx \\ &= \left(\frac{2\pi}{T}\right)^d f\left(-\frac{2\pi n}{T}\right) \quad \text{par inversion de la T.F.} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(x + kT) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} c_{-n} e^{-i2\pi n \cdot x/T} \\ &= \left(\frac{2\pi}{T}\right)^d \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}\left(\frac{2n\pi}{T}\right) e^{i2\pi n \cdot x/T}, \end{aligned}$$

la convergence étant bien sûr à comprendre dans $L^2[0, T]$. \square

Cette formule est plus connue au sens des distributions et en prenant $x = 0$ et $T = 2\pi$. Elle se met alors sous la forme

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} e^{i2k \cdot x} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \delta_n.$$

3 Théorème de Shannon

Dans la suite on notera sinc la fonction sinus-cardinal définie par $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$. Lorsque $x \in \mathbb{R}^d$, on notera par convention $\text{sinc } x = \prod_{i=1}^d \text{sinc } x_i$.

Définition 3 Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction sommable. On dit que f est à bande limitée si \hat{f} est nulle en dehors d'une boule de \mathbb{R}^d . On dit que $\nu_c > 0$ est une fréquence de coupure de f si \hat{f} est nulle en dehors de la boule de centre 0 et de rayon $2\pi\nu_c$.

Une fonction à bande limitée ne contient donc pas de structures qui oscillent plus vite qu'une fréquence de coupure. En utilisant la proposition 2, on voit qu'une telle fonction est de classe C^∞ . Le résultat fondamental de Shannon qui suit, permet de reconstruire une fonction à bande limitée à partir de ses échantillons sur une grille, pourvu que la grille soit assez fine.

Théorème 5 (Shannon-Whittaker) Soit f une fonction à bande limitée, de fréquence de coupure ν_c . Soit $a < \frac{1}{2\nu_c}$. Alors,

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(ak) \text{sinc}\left(\frac{\pi}{a}(x - ka)\right). \quad (12)$$

¹On supposera dans le théorème de Shannon que \hat{f} est à support compact, et pour tout x , la somme comporte en fait un nombre fini de termes non nuls.

Preuve. Appelons f_r le terme de droite dans (12). On va montrer que $\hat{f}_r = \hat{f}$ et donc que $f_r = f$. En effet, par les propriétés de la transformée de Fourier d'une fonction dilatée et translatée, on obtient d'abord

$$\hat{f}_r(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(ak) e^{-ak \cdot \xi} a^d \mathbf{1}_{[-\pi/a, \pi/a]}(\xi).$$

En utilisant la formule de Poisson, on a ensuite

$$\hat{f}_r(\xi) = \mathbf{1}_{[-\pi/a, \pi/a]}(\xi) \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}\left(x + k \frac{2\pi}{a}\right). \quad (13)$$

Or \hat{f} est à support compact dans $[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]^d$. Les termes qui apparaissent dans la somme ci-dessus sont donc de support disjoints. La fonction indicatrice restreint alors la sommation au terme d'ordre 0 et donc

$$\hat{f}_r(\xi) = \hat{f}(\xi). \quad \square$$

On peut donc reconstruire le signal si la fréquence d'échantillonnage est supérieure à $2\nu_c$, appelée fréquence de Nyquist.

3.1 Repliement spectral et effet de Gibbs

Que se passe-t-il lorsqu'on essaie d'appliquer une interpolation *shannonienne* lorsque les hypothèse du théorème ne sont pas vérifiées; par exemple, si le signal n'est pas à bande limitée, ou bien si on ne l'échantillonne pas suffisamment rapidement. Dans la preuve du théorème de Shannon, nous avons calculé la transformée de Fourier du signal reconstruit. Examinons en détail l'équation (13). Le spectre de f_r est obtenu par périodisation de la T.F. de f sur la grille $\frac{2\pi}{a} \mathbb{Z}^d$, puis par troncature à $[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]^d$. Donc, si le support de \hat{f} est plus grand que cet hypercube, les termes de la somme se superposent. C'est ce qu'on appelle le repliement spectral ou aliasage (*aliasing*). Le spectre d'une image bien échantillonnée en deux dimensions fait apparaître des structures en

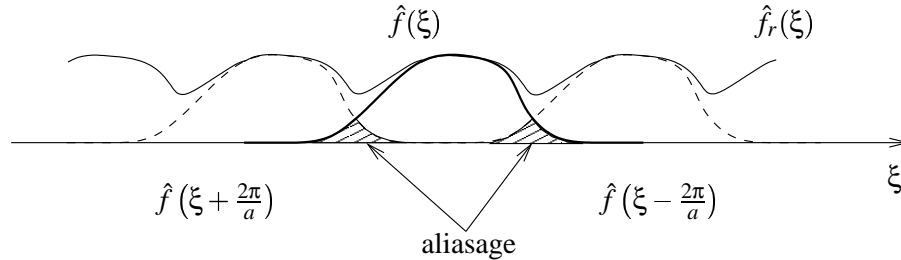


FIG. 4 – *Repliement spectral (aliasage).* La transformée de Fourier du signal reconstruit par l'interpolation de Shannon est la périodisée de la transformée de Fourier du signal initial. Lorsque l'échantillonnage n'est pas assez fin, les spectres dupliqués se recouvrent, créant l'aliasage.

forme étoilée. L'aliasage se manifeste par des structures linéaires qui ne passent pas par l'origine. Sur les images elles-mêmes, il rend les contours crénelés et des raies transverses se forment sur des objets présentant une périodicité dans au moins une direction. L'effet visuel est catastrophique car ces perturbations sont structurées et peuvent être interprétée à tort comme une information contenue dans la scène. Il est encore pire dans les films car ces structures obliques semblent osciller. Il est particulièrement visible par exemple sur des stores vénitiens, des toitures en tuiles, des tissus côtelés...

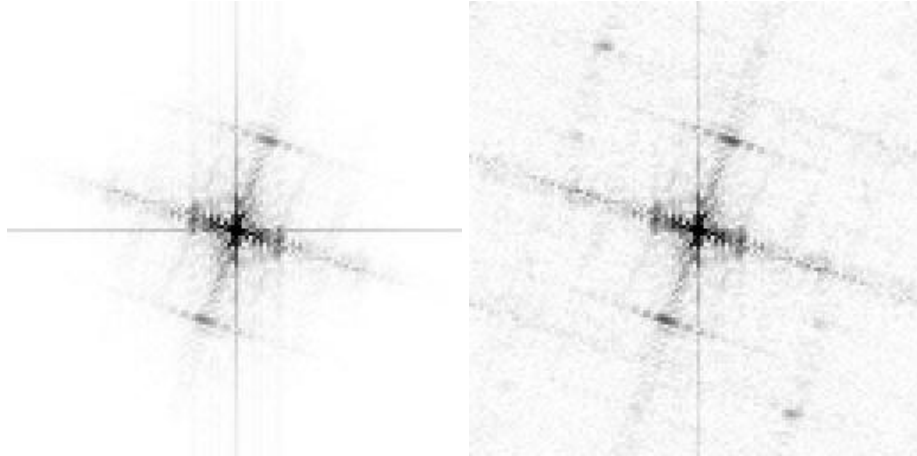


FIG. 5 – *Effet de l'aliasage dans les spectre des images. À partir d'une même image, on opère un sous-échantillonnage (réduction de la taille de l'image, ici d'un facteur 8). Dans le premier cas, on commence par éliminer les hautes fréquences pour satisfaire au mieux l'hypothèse shannonienne. Dans le second cas, on se contente de ne garder qu'un point sur 8. On représente les modules des transformées de Fourier (petites valeurs en blanc). Un alias est clairement visible sur le spectre de droite.*

Un deuxième effet est également présent dans la troncature par le filtre parfait (la fonction indicatrice dans (13)) : les oscillations de Gibbs. Celui-ci est présent dès que la transformée de Fourier d'une fonction a des points de discontinuités (par exemple après une troncature). Pour illustrer simplement ce phénomène, rappelons simplement que la fonction dont la transformée de Fourier est une fonction indicatrice est un sinus cardinal, *i.e.* une fonction oscillante à décroissance en $|x|^{-1}$. Ces oscillations sont bien connues pour les fonctions périodiques : la série de Fourier d'un signal carré ne converge pas ponctuellement aux points de discontinuités. De plus, l'amplitude relative des oscillations de la série partielle au voisinage de ce point reste constante, indépendamment du nombre de termes dans la série (18% pour un signal carré).

Résumons-nous :

un signal bien échantillonné doit être à bande limitée, la fréquence d'échantillonnage au moins double de la fréquence de coupure. De plus, son spectre doit s'annuler régulièrement au voisinage de la fréquence de coupure.

Est-il bien réaliste de considérer qu'un signal est à bande limitée, autrement dit qu'on peut appliquer le théorème de Shannon ? Il y a deux réponses, une positive et une négative. Premièrement d'un point de vue perceptuel, y a-t-il une perte d'information importantes dans les hautes fréquences ? La réponse est clairement non : nos sens n'ont qu'une précision limitée et agissent comme des filtres passe-bas. Il est prouvé qu'on ne peut percevoir des fréquences de plus de 20 000Hz, limite inférieure des ultra-sons. Ainsi, il suffit pour reconstruire des sons parfaitement (pour l'oreille humaine) d'échantillonner au signal au delà de 40 000Hz, après avoir bien entendu éliminer toutes les fréquences supérieures à 20 000Hz. Dans la bande de fréquence voulue, la transformée de Fourier du filtre du système d'acquisition doit être aussi plat que possible, puis s'annuler dans les fréquences supérieures. De plus, cette annulation ne doit pas être brutale, afin d'éviter les effets de Gibbs. Ceci explique (au moins en partie) pourquoi les CD audio sont échantillonnés à 44,1kHz, valeur qu'on trouve en général indiquée sur les systèmes hi-fi. Une conséquence amusante est que ces systèmes haute-fidélité sont de piètre qualité pour les animaux domestiques puisque les

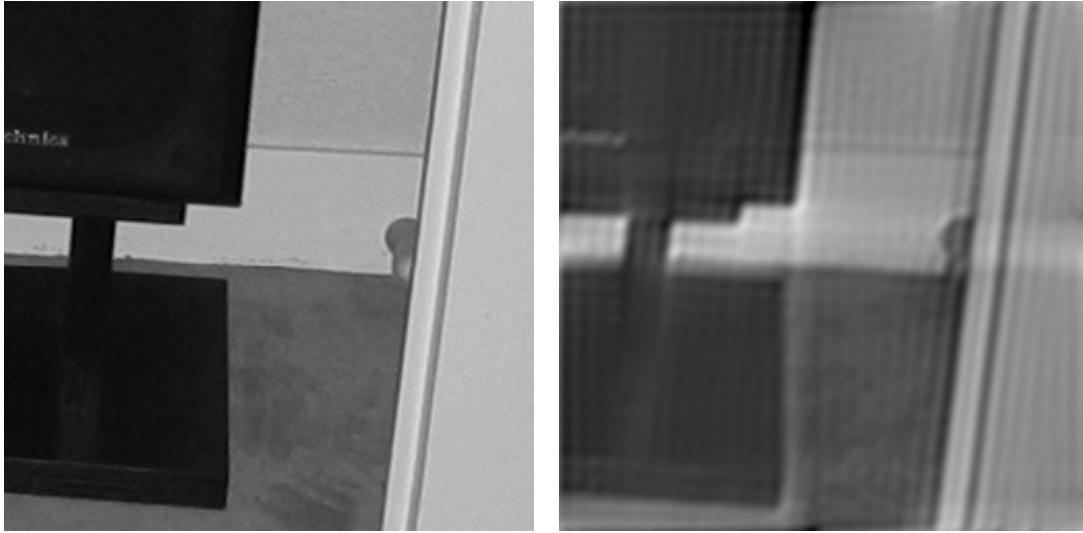


FIG. 6 – *Effet de Gibbs. L'image de droite est obtenue à partir de l'image de gauche en tronquant sa transformée de Fourier, ce qui est équivalent à une convolution avec un sinus cardinal. Cette fonction décroît lentement en oscillant. Des phénomènes de rebond apparaissent très nettement le long des contours. L'image obtenue est de très mauvaise qualité, bien qu'échantillonnée à fréquence de Nyquist. Ceci montre, que pour reconstruire les bords de manière convenable, la transformée de Fourier de la réponse du capteur doit tendre vers 0 de manière régulière.*

chats ou les chiens entendent des ultra-sons à une fréquence d'environ 30 000Hz. La vision est, elle aussi, limitée par le nombre de cellules visuelles dans la rétine. Les images sont donc également échantillonnées, cette fois sur un réseau en nid d'abeilles, avec une résolution angulaire de l'ordre de la minute d'arc dans la région fovéale (région centrale du champ de vision).

D'un point de vue purement mathématique, le repliement spectral est rigoureusement inévitable. En effet, tous les signaux acquis puis reconstruits ont une étendue spatiale (ou temporelle) finie. Or une fonction et sa transformée de Fourier ne peuvent pas être simultanément à support compact.

3.2 Du bon usage du scanner

Une application du théorème de Shannon est la réduction des images numériques acquise par un appareil photo ou par un scanner. La résolution de ces appareils sont en général bien supérieure à celle d'un écran : la résolution d'un bon écran en 2003 est de 72dpi (*dots per inch*) avec une taille de 1600x1200 pixels. En comparaison, un bon scanner a une résolution de 1200dpi, et un appareil photo une taille d'image de 4 millions de pixels. Ainsi, pour afficher à l'écran, il est en général nécessaire de réduire sa taille, c'est à dire de la sous-échantillonner. La manière la plus brutale est simplement de ne garder qu'un point tous les 2, 3 voire plus suivant le facteur de réduction. Or, on a vu que la reconstruction de ce signal par la formule d'interpolation de Shannon introduisait inévitablement un repliement spectral. Celui-ci sera d'autant plus fort que le facteur de réduction sera élevé. Heureusement, le théorème de Shannon nous dit aussi comment éviter cet effet désastreux. Il suffit de... rendre floue l'image convenablement. Ceci revient simplement à éliminer les hautes fréquences et à appliquer le théorème de Shannon pour cette nouvelle fréquence de coupure. L'idéal est bien entendu d'appliquer ce filtre passe-bas avant de sous-échantillonner. Lorsqu'on ne maîtrise pas l'acquisition et que l'image est déjà aliasée, alors on peut toujours

espérer que le recouvrement spectral n'affecte que les hautes fréquences et tenter d'appliquer un filtre passe-bas pour enlever ces fréquences endommagées.



FIG. 7 – Réduction d'image et aliasage. Les deux images (de taille 256×256) ont été obtenues à partir d'une image originale après une réduction d'échelle d'un facteur 4. Avant le sous-échantillonnage, on a appliqué à gauche un flou afin de maintenir les conditions de validité du théorème de Shannon. On n'a pas pris cette précaution dans l'image de droite, en nous contentant de ne garder qu'une ligne et qu'une colonne sur 4. L'aliasage est particulièrement visible sur les bords inclinés et sur les structures présentant des périodicités.

Références

- [1] Bony (J.M.). – *Cours d'analyse : théorie des distributions et analyse de Fourier*. – Ellipses Marketing, 2000.
- [2] Ladjal (S.) et Morel (J.M.). – Notes sur l'analyse de Fourier et la théorie de Shannon en traitement d'images. – Journées X-UPS 1998. <http://math.polytechnique.fr/xups/xups98.02.ps.gz>.
- [3] Mallat (S.). – *Une exploration des signaux en ondelettes*. – Ellipses diffusion, 2000, éditions de l'École polytechnique édition.
- [4] Marion (A.). – *Acquisition & visualisation des images*. – Eyrolles, 1997.
- [5] Moisan (L.) et Morel (J.M.). – Les défauts du DVD sous l'œil de l'équation. *La Recherche*, vol. 342, Mai 2001, p. 56.
- [6] Shannon (C.E.). – A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, vol. 27, 1948, pp. 379–423, 623–656.