L.G.Vidiani 64 rue de l'EUROPE 21121 FONTAINE LÈS DIJON TEL : 03 80 56 65 54 (zip TEX jue2smf.tex)

Adresse email Internet : *lg_vidiani@club – internet.fr*

Le théorème de JUEL et la surface de CLEBSCH

(version d: travail zip defaillant jue2smf.tex 20 02 06 11h16)

Introduction.

Lorsque j'étais jeune débutant (il y a hélas bien longtemps), une phrase d'un petit livre d'André DELACHET [17], m'avait frappé : "La surface du troisième ordre (non réglée) contient au plus vingt-sept droites. Une telle surface en argent, non analytique, a été offerte à JUEL pour son jubilé scientifique ; elle comportait les 27 droites."

(On dit qu'une surface est réglée, si elle peut être engendrée, comme les cônes, les cylindres, les conoïdes,.., par des droites)

De multiples exercices d'oraux ou de Travaux Pratiques ou de colles, en classe de mathématiques spéciales [2,3,5,7,15,37,41,43,53], proposent de démontrer ce résultat sur des surfaces cubiques particulières et maintinrent mon intérêt pour cette question.

Dans le livre "les nombres remarquables" de Jean Brette [9], à l'entrée **27** il est dit que c'est SALMON qui en 1884, détermina le nombre maximum de droites sur une surface cubique (c'est à dire dont l'équation est de degré 3 par rapport aux coordonnées), non réglée, après que CAYLEY eût démontré qu'il était fini. Ce qui provoqua une remarque admirative de SYLVESTER (Cayley et Sylvester "les jumeaux des invariants" comme le dit E.T. BELL) "Avec la même raison, qu'Archimède a sur sa pierre tombale, gravés un cylindre, un cône et une sphère, nos distingués concitoyens pourraient laisser des dispositions testamentaires pour que l'eikosiheptagramme soit gravée sur les leurs".

(L'eikosiheptagramme est la figure formée par les 27 droites d'un cubique non réglée : eikosihepta signifie 27 *en grec : au risque de provoquer une crispation des lèvres et une crampe de la glotte chez les puristes, voici comment j'écrirais* 27 *en grec : -il faut un accent inverse du circonflexe sur le i- εικοσι επτα).*

Voulant en savoir plus sur l'objet offert à Juel, j'entrepris début 1985 des recherches et finis par être dirigé sur l'Institut Mathématique de Copenhage et après quelques échanges je reçus le 23 août 1985 une lettre et des photos, envoyées par le professeur Thoger Bang professeur à l'Université de Copenhage. Ces photos que je joins à cet article feraient une bonne illustration pour cet article, avec le titre "Un Eikosiheptagramme ?" (ainsi que l'image d'un fichier gif de la surface de Clebsch). C'était un cadeau du professeur J. HJELMSLEV à Christian JUEL pour son 70ème anniversaire et son jubilé scientifique (25 janvier 1925). La pièce fut ciselée par le joaillier bien connu Evald NIELSEN de COPENHAGE. Après la mort de JUEL, l'objet fût donné à l'Institut Mathématique de COPENHAGE, où le professeur BANG l'a, suite à ma demande, retrouvée, nettoyée et polie. La grandeur totale (diamètre) est de 14 centimètres et le poids 85 grammes. Au verso trois droites séparent les indications : Til C. JUEL ; Fra J. HJELMSLEV ; 25 janvier 1925. Robert Férréol l'a mis sur son site [25]. (*)

Juel, initiateur avec Darboux, de la "géométrie finie", qui s'évadant des notions de degré et même du cadre algébrique, considère les réunions d'un nombre fini de morceaux de surfaces analytiques (voir le glossaire), pour rechercher les propriétés établies dans le cadre algébrique, qui subsistent dans des cas plus généraux. Ainsi par exemple la notion d'ordre d'une courbe ou d'une surface, est le nombre maximum de points d'intersection réels avec une droite, et coïncide avec le degré, dans le cas algébrique, justifiant la confusion des deux notions dans ce cas.

Le résultat [32], [35], extraordinaire obtenu par Juel, raison de l'intitulé de cet article est que toute surface d'ordre 3, non réglée, en géométrie finie, possède 3, 7, 15 ou 27 droites.

Juel a effectivement construit une telle surface qui ne soit pas une surface algébrique, d'ordre 3 comportant 27 droites. Elle est réunion d'un nombre fini de morceaux de surfaces analytiques, et c'est en ce sens qu'il faut comprendre le terme employé par Delachet, de "surface non analytique".

Le bijou offert à Juel (dont la forme n'a rien à voir avec celle de la surface de Clebsch, qui était pourtant connue à l'époque, et ceci sans logiciel informatique, puisque la firme Martin Schilling à Leipzig diffusait depuis 1890 un modèle en plâtre, dont un exemplaire doit être dans la bibliothèque de l'Institut Henri Poincaré, puisqu'il y en avait dans toutes les universités, y compris aux USA) comporte effectivement 27 droites, dont trois à peine visibles, car reflets blancs de droites plus visibles.

On trouvera tous les renseignements biographiques (et des portraits) sur CAYLEY, JUEL, SALMON, SCHLÄFLI, SYLVESTER, sur le site historique [51] et [8], [28], [38].

Aussi est-ce avec un intérêt renouvelé, que je lus dans la gazette des mathématiciens 32 de janvier 87 pages 84-85, sous la plume de mon collègue et ami François Apéry (de l'Université de Mulhouse) un article annonçant l'édition, par la maison Vieweg pour fêter son bicentenaire, de deux tomes de Mathematical Models (Vieweg 1986) [26] avec 132 photographies de surfaces en plâtre. J'ai même eu en main en 1991 le plâtre de la surface de Clebsch, mais l'emballage

(*) *http://www.mathcurve.com/surfaces/clebsch/clebsch.shtml,*

Le lecteur désireux de se rincer l'oeil de splendides illustrations, de s'abreuver l'esprit de remarques et de liens constructifs peut aussi aller à http://www.mathcurve.com/surfaces/cubic/cubic.shtml insuffisant de l'expéditeur, et la douceur des manipulations postales, a fait qu'il n'est pas arrivé intact et que j'ai été obligé de le renvoyer et de me faire rembourser (105 FF ce qui fût fait sans problème, contrairement à ce qui se passe en France où il aurait fallu donner des tas d'explications....)

Mais ce n'est pas tout : en février 1999, mon collègue et ami Alain JUHEL (sic avec H) trouva sur le Web (mais le site semble maintenant fermé) un fichier 27cubic.gif qui reproduit la surface de Clebsch, avec en prime, c'est ce qui fait son intérêt, le tracé des 27 droites formant le double six de Schläfli (voir plus loin) ; fichier dont je joins un tirage papier (qui ferait aussi une excellente illustration pour cet article ; on peut aussi utiliser la magnifique image faite par Esculier en utilisant le logiciel libre Povray (*)

C'est la même représentation que dans Mathematical Models, et c'est pour les raisons de présence des droites, la meilleure représentation de cette surface. Le Palais de la Découverte, a longtemps exposé un tel modèle en platre, mais il n'est plus maintenant visible du public, stocké sans doute dans un placard des combles ou des caves, connu des seuls initiés, où il prend sans doute la poussière ?

Il y a même un sculpteur aux USA, qui a réalisé une telle surface avec un gros morceau de béton et tracé les 27 droites dessus, voir par exemple [51] ou rechercher avec google avec les mots concrete (béton), 27 lines et cubic surfaces, on peut aussi taper "Kaenders" sous google, pour voir un tel objet érigé à Dusseldorf en 1999 pour commémorer les 150 ans de la naissance de Klein.

Le but de cet article est de préciser le lien entre les composantes projectives et les coordonnées ordinaires, incidemment d'évoquer l'équation pentahédrale, et d'établir pourquoi elle est non réglée (quelles sont les cubiques réglées, y a t-il une équation aux dérivées partielles des surfaces réglées ?), la présence maximale des 27 droites, l'explication du double six de Schläfli, les dix points d'ECKARDT, et d'indiquer des pistes ou des références ou des demandes sur le calcul du cardinal du groupe qu'elles engendrent, la recherche des symétries et le décompte des trous de la surface.

Remarquons enfin que la recherche des droites d'une surface, outre le lien avec différentes théories (Groupes, géométrie symplectique,....) n'est pas artificielle, elle permet par exemple de rechercher les coniques et en particulier les cercles d'une surface cubique (par exemple [37] $z(x^2+y^2+z^2)-a(x^2-y^2)-a^2z=0$) et plus généralement des cyclides de Dupin, puisque tout plan contenant une conique de cette surface contient une courbe de degré $3-2=1$, c'est à dire une droite ! (**)

Je remercie mes collègues Alain Esculier et Robert Ferréol, qui m'ont aidé en particulier pour toute la partie illustration Maple (voir leur site référencié ci-après), puis par des échanges quotidiens, parfois jusqu'à 10 par jour, leurs questions, leurs remarques, leurs idées, m'ont aidé à préciser et au besoin étendre et compléter certains points de cet article. Le travail en commun (je ne comprends pas tel point, je ne sais pas où trouver telle notion, telle illustration,....) lorsqu'il est fait entre passionnés (chercheurs, professeurs, étudiants, lycéens,..) de même niveau et sans arrière pensée, profite à tous : les questions, les critiques constructives et argumentées, obligent à préciser, à être plus clair, à généraliser, à améliorer, à concevoir de manière différente,.... Il n'y a qu'industriels et commerciaux avec cloisonnement et brevets et droits, qui n'ont pas encore compris, que l'échange profite à tous et au pays.

Je remercie également Madame Bonhomme bibliothécaire à la Bibliothèque universitaire sciences de Dijon, qui m'a constamment aidé à trouver les articles parfois très anciens, ou les livres rares, qui m'ont permis d'élucider certains points importants.

Le plan suivi est le suivant :

(1) Relations entre composantes projectives et coordonnées ordinaires, justifiant les équations les plus courantes de la surface de CLEBSCH.

(2) Recherche des seules surfaces cubiques réglées.

(3) La surface de Clebsch est non réglée.

(4) Recherche de toutes les droites de la surface de Clebsch.

(5) Représentation paramétrique de la surface de Clebsch.

(6) Double six de Schläfli.

(7) Lien avec la théorie des groupes.

(8) Conclusion.

(9) Annexe I : problèmes soulevés.

(10) Annexe II : mini glossaire.

(11) Annexe III : Bibliographie et références.

(*) *Les explications pour obtenir les instructions Povray à partir de Maple sont à la fin du fichier texte de la page "Povray/Clebsch" du site magnifique d'Alain Esculier [23]. De même le fichier permettant de calculer les double six, les points d'intersection, les points d'Eckardt sont dans la page "Maple/calculsClebsch". Une animation de la surface de Clebsch et ses 27 droites est visible et téléchargeable dans le répertoire Divers/Animations de Clebsch. Voir aussi [14].*

(**) *Potron (Hermann 1926) exercices de CDI numéro 79 p 22, licence Besançon 1909, dont l'énoncé est repris sans le dire dans de nombreux livres d'oral...*

(1) Relations entre composantes projectives et coordonnées ordinaires, justifiant les équations les plus courantes de la surface de CLEBSCH

Annoncée par Sylvester (1851) et Steiner (***) et démontrée par Clebsch en 1861, l'équation générale d'une cubique en composantes pentahédrales est $a_0x_0^3 + a_1x_1^3 + a_2x_2^3 + a_3x_3^3 + a_4x_4^3 = 0$, où les x_i sont des formes linéaires en les quatre composantes projectives, et $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

Aussi bien le dictionnaire Weisstein [57] à l'entrée Clebsch, que le site du mathématicien italien Todesco [54] que l'on trouve en demandant à google "superficie diagonale di Clebsch, s'ils partent de la même équation pentahédrale $x_0^3+x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3 = 0$ et $x_0+x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$ ne donnent pas les relations entre les coordonnées ordinaires et les composantes projectives x_0, x_1, x_2, x_3. La donnée du plan de l'infini comme dans Weisstein [57], ne suffit pas, loin de là ! pour déduire de l'équation pentahédrale, celle en coordonnées ordinaires obtenue par Hunt. La logique interne, et les raisons stratégiques du choix des formules exprimant x, y, z en fontion des composantes projectives x_0, x_1, x_2, x_3, en particulier celui du plan de l'infini, (dans le but d'obtenir une modification de la forme de la surface à distance finie ? dans celui de rechercher ou de créer des symétries, ou de rejeter des points singuliers à l'infini ?...) qui préside à ces changements, nous échappent, et nous intéresseraient au plus haut point. En l'absence de la transparence d'un choix pensé, élaboré, raisonné, expliqué, justifié on peut tout imaginer : l'humeur du moment, la coincidence avec une éclipse ou une aurore boréale, la vitesse du vent, l'épaisseur de brouillard.

L'équation ordinaire de la surface de Clebsch donnée par le dictionnaire Weisstein [57] est :

$$\boxed{\mathbf{81(x^3+y^3+z^3) - 189(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y) + 54xyz + 126(xy+yz+zx) - 9(x^2+y^2+z^2) - 9(x+y+z) + 1 = 0}}$$

Or pour obtenir cette équation, à partir de l'équation pentahédrale, il faut savoir (et ce n'est pas évident ni donné : la seule piste (et encore non directement explicite) qui m'a permis de le trouver (avec Maple et un fil directeur, et plus des astuces techniques qu'une argumentation stratégique) est de taper sous google "Clebsch cubic et après avoir essayé tous les autres, de tomber sur le dernier site [30] de la dernière page de Google. où dans le chapitre 4 page 93 la légende de la figure 4.4 donne un renvoi à des formules très indirectes, voire hermétiques, pages 94 et 97) qu'il faut poser :

$\boxed{\mathbf{x = \frac{x_1+x_2+x_3}{6x_0+6x_1+6x_2+3x_3}}}$ $\boxed{\mathbf{y = \frac{x_0+x_2+x_3}{6x_0+6x_1+6x_2+3x_3}}}$ $\boxed{\mathbf{z = \frac{x_0+x_1+x_2}{6x_0+6x_1+6x_2+3x_3}}}$

Puis une inversion à la main, ou mieux par maple avec solve donne

$x_0 = -\frac{1}{2}\frac{x_3(9x-3y-3z-1)}{3x+3y+3z-1}$, $x_1 = -\frac{1}{2}\frac{x_3(-3x+9y-3z-1)}{3x+3y+3z-1}$, $x_2 = -\frac{1}{2}\frac{x_3(-3x-3y+9z-1)}{3x+3y+3z-1}$

Prenant alors $x_3 = -\frac{1}{\sqrt[3]{6}}(6x+6y+6z-2)$ et reportant (au moyen de subs de Maple) dans l'équation en composantes projectives x_0, x_1, x_2, x_3 de la surface de Clebsch : $x_0^3+x_1^3+x_2^3+x_3^3-(x_0+x_1+x_2+x_3)^3 = 0$, on obtient (directement, sans division par -6 d'où mon inclusion (par pure coquetterie !) du $-\sqrt[3]{6}$) l'équation sous la forme donnée par le dictionnaire Weisstein [57] (obtenue par Hunt). (*)

L'équation donnée sur le site Todesco [54] est :

$$\boxed{\mathbf{16x^3 + 16y^3 - 31z^3 + 24x^2z - 48x^2y - 48xy^2 + 24y^2z - 54\sqrt{3}z^2 - 72z = 0}}$$

On pose (avouez que les raisons hermétiques de ce choix de formules ne sont pas évidentes, non plus que leur reconstitution qui m'a demandé un certain temps, car elles n'étaient pas données et poser $\frac{X}{T} = \frac{x}{1}$, quand T n'est pas connu, ni X, n'aide pas à trouver X...)

$\boxed{\mathbf{x = \frac{(3-\sqrt{3})x_0+(-3+\sqrt{3})x_1-2\sqrt{3}x_2}{6x_0+6x_1+6x_2-6x_3}}}$ $\boxed{\mathbf{y = \frac{(-3+\sqrt{3})x_0+(3+\sqrt{3})x_1-2\sqrt{3}x_2}{6x_0+6x_1+6x_2-6x_3}}}$ $\boxed{\mathbf{z = \frac{8\sqrt{3}(x_0+x_1+x_2)}{6x_0+6x_1+6x_2-6x_3}}}$

Une inversion à la main, ou au moyen de solve de Maple donne :

$x_0 = -x_1\frac{-2x-2x\sqrt{3}+2y\sqrt{3}-z-2y}{2x-2x\sqrt{3}+2y\sqrt{3}+z+2y}$, $x_2 = -x_1\frac{4y+4x-z}{2x-2x\sqrt{3}+2y\sqrt{3}+z+2y}$, $x_3 = x_1\frac{3z-4\sqrt{3}}{2x-2x\sqrt{3}+2y\sqrt{3}+z+2y}$.

Pour chasser le dénominateur, nous prenons $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{12}(2x - 2x\sqrt{3} + 2y\sqrt{3} + z + 2y)$ et nous obtenons

$$\begin{cases} x_0 = \frac{\sqrt{3}}{12}(2x + 2x\sqrt{3} - 2y\sqrt{3} + 2y + z) \\ x_1 = \frac{\sqrt{3}}{12}(2x - 2x\sqrt{3} + 2y\sqrt{3} + z + 2y) \\ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{12}(-4x - 4y + z) \\ x_3 = \frac{\sqrt{3}}{12}(3z - 4\sqrt{3}) \end{cases}$$

Reportant ces formules (au moyen de subs de Maple) dans l'équation en composantes projectives x_0, x_1, x_2, x_3 de la surface de Clebsch : $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)^3 = 0$, on obtient bien l'équation ordinaire :

(***) *Stylisé en "ce celèbre sphynx", par Luigi Cremona, car il donnait ses théorèmes sans démonstration, ou tout au plus un plan hermétique.*

(*) *Pour respecter les notations des indications du chapitre 4 de Hunt p 93, dans le calcul en Maple juel.mws, les y_i sont les x_{i-1}.*

$\mathbf{16x^3 + 16y^3 - 31z^3 + 24x^2z - 48x^2y - 48xy^2 + 24y^2z - 54\sqrt{3}z^2 - 72z = 0}$

Avant de continuer, cherchons quelles peuvent être les surfaces cubiques réglées ?

---

(2) Recherche des seules surfaces cubiques réglées.

Il y a d'abord les cas évidents exotiques et parasites, de surface cubiques décomposées ($3 = 1+1+1$ ou $3 = 1+2$) en trois plans, ou un plan et une quadrique propre. On sait que toute quadrique propre est réglée et comporte deux familles de droites, celles ci pouvant être imaginaires (comme par exemple pour la sphère), les seules quadriques propres à droites réelles étant l'hyperboloïde à une nappe (chateau d'eau de Fedala, tours de centrales thermiques : l'existence des droites permet de les construire avec coffrage et béton précontraint), et le paraboloïde hyperbolique (tout bonne planche à dessin faussée).

Hors ces cas évidents, envisageons celui d'une variété S, non décomposée de degré 3.

Soit g une génératrice générique ; soit π un plan tangent à S, contenant g. (ce plan existe en tout point de S, donc de g).

Soit $C_{g,\pi}$ le reste de son intersection avec S, qui est donc une courbe plane (dans π) de degré $3-1=2$, donc une conique.

$C_{g,\pi}$ et g ont en commun un certain nombre de points, doubles pour la section complète. L'un d'eux est le point de contact de S avec π. Les autres sont nécéssairement doubles pour la surface, puisque un plan ne peut être tangent en deux points d'une même génératrice (résultat classique sur les surfaces réglées non développables : le plan tangent en un point d'une génératrice "tourne" autour de cette génératrice, lorsque ce point parcourt toute cette droite, et de plus les plans tangents en des points distincts sont eux mêmes distincts) sauf si S est développable (cône, cylindre, ou engendré par les tangentes à une courbe gauche appelée l'arête de rebroussement de la développable).

S est donc soit un cône (du troisième degré), le cas du cylindre comme nous sommes dans espace projectif en est un cas particulier, la courbe double est alors réduite dans ce cas à un singleton réduit au sommet du cône, soit une surface engendrée par les tangentes à une courbe gauche (si c'est une courbe plane, la surface engendrée est incluse dans un plan).

Il est bien connu ([55], [6], [24]) que l'arête de rebroussement d'une surface réglée développable non conique est une courbe double (de points singuliers de la surface).

Donc hors du cas conique, une surface réglée cubique, ou algébrique de degré $n \geq 3$, car le raisonnement précédent est généralisable, a une courbe double K, ayant au moins deux points notés A et B.

Montrons que dans le cas cubique, cette courbe double est une droite !

D'abord la droite AB coupant S en quatre points (deux en A, et deux en B), est incluse dans S. Notons (R) ce type d'argument, pour qu'une droite soit dans S, car nous allons l'utiliser plusieurs fois, en remplaçant éventuellement A et B par d'autres points de K.

Supposons que K ne soit pas la droite AB, elle contiendrait un point I hors de la droite AB. Par (R), les droites IA et IB seraient dans S.

M étant un point quelconque de l'arc IA, puis de l'arc IB de K, (R) implique que toutes ces droites IM sont dans S.

Donc K entre A et B (que l'on peut y prendre "extrémaux") est plane, puisque toutes ces droites IM sont dans "le" plan tangent à la nappe de S qui contient I (densité et continuité).

Une sécante, dans ce plan aux droites IA et IB, est également dans S par le raisonnement (R), puisque rencontrant S en six points (ceux sur IA et sur IB et les doubles sur les arcs de K rencontrés d'après le théorème des valeurs intermédiaires).

Donc S contiendrait tout le plan tangent en I, donc serait décomposée, ce qui est écarté.

(R) prouve que la droite AB est dans S, parce que les trois quadriques, (une quadrique dans l'espace projectif est toujours réglée) permettant de déterminer les points doubles de S, d'équations $f'_x = f'_y = f'_z = 0$, contenant tout le segment AB contiennent toute la droite AB, qui est donc double : K est donc une droite double.

(Toute simplification, critique constructive de ce raisonnement permettant de montrer que la courbe double K est une droite, m'intéresserait au plus haut point, car ces arguments que j'ai trouvés (datant de 1890 et 1925) me semblaient avoir une affirmation trop rapide. C'est sans doute pour cela qu'Abhyankar, organise sa classification d'emblée en occultant cette preuve, puisqu'il suppose que les surfaces cubiques ont une droite double)

Toute surface cubique réglée, contient une droite double.

Réciproquement, toute surface cubique contenant une droite double K est réglée, car un plan quelconque contenant K, coupant S suivant une courbe du troisième degré, qui contient déja K comptée deux fois : le reste de l'intersection est une courbe de degré $3 - 2.1 = 1$ c'est donc une droite : chaque plan contenant K coupe S suivant une génératrice de S qui est donc réglée.

Mais quelles sont, les catégories de surfaces réglées de degré 3 ? Nous avons vu qu'il y a les cônes à base cubique (qui peut avoir un point double à tangentes différentes, ou à tangente unique de rebroussement). Les classifications que j'ai trouvées en particulier dans les travaux de Salmon ne me convainquaient pas, car il ou bien il manquait un cas (que d'ailleurs Cayley a signalé à Salmon, et qui est le cas spécial d'Abhyankar) ou des étapes dans les preuves me semblaient occultées. Je restai un mois et demi, à ne pas avancer, bien que je ne reste pas inactif, lorsque par des interrogations sur le web, du style "ruled cubic" je tombai sur des articles intéressants qui me permettaient d'avancer [10], [16], ou d'autres sans démonstrations mais qui avaient dans leur bibliographie Abhyankar, savant mathématicien comptemporain (il a même un site), que nous évoquerons aussi dans le paragraphe donnant une représentation paramétrique des surfaces cubiques non réglées. À cause d'une faute de référence, le délai pour obtenir cet article fut long. Mais alors quelle surprise, quelle clarté, et surtout une classification où les deux principaux cas non coniques, ont des équations très similaires. Je vous incite d'ailleurs à cette occasion d'avoir toujours, comme je l'ai eu toute ma vie, ce principe : aller tout de suite à l'auteur d'une théorie (pour les distributions : Schwartz, etc...), car lui seul a une vue d'ensemble et la clarté d'exposition de son invention.

Aussi je vous renvoie aux pages 455-467 de son article [1].

Je vais me contenter de donner sa classification et l'exploiter.

Abhyankar choisit un repère projectif où la droite double soit d'équations $X = 0,\ Y = 0$, et s'il y a (il peut ne pas il y en avoir) un point singulier supplémentaire P il est obligatoirement sur la droite double et on impose qu'il soit dans le plan $T = 0$.

Alors toutes les surfaces cubiques ayant cette droite double K, peuvent à une transformation projective près se ramener aux quatre formes suivantes non projectivement équivalentes.

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{F_1 : Y^3 + XYT + X^3} & \mathbf{= 0} \quad \textbf{cône de sommet P "nodal"} \\ \mathbf{F_2 : Y^3 + X^2T} & \mathbf{= 0} \quad \textbf{cône de sommet P "cuspidal"} \\ \mathbf{F_3 : Y^3 + XYT + X^2Z} & \mathbf{= 0} \quad \textbf{cubique spéciale, sans droite simple d'appui} \\ \mathbf{F_4 : Y^3 + XYT + X^2Z + Y^2T} & \mathbf{= 0} \quad \textbf{cubique non spéciale, à droite simple d'appui} \begin{cases} \mathbf{X - Y - T = 0} \\ \mathbf{Y + Z = 0} \end{cases} \end{cases}}$$

Nodal signifie que la base du cône a un point double à tangentes distinctes,

Cuspidal signifiant que la base du cône a un point double à tangente de rebroussement.

F_3 a en outre une seule génératrice associée à chaque point de la droite double K. Cette surface est souvent appelée surface (réglée) de Cayley. Segré a démontré ([46] p141) qu'elle était limite des autres cas, lorsque la droite simple tendait vers la droite double. Brundu [11, 12] a montré en 1991 que c'était le seul type de surface cubique, dont l'équation ne pouvait pas se mettre sous la forme d'un déterminant d'ordre 3, dont les coefficients seraient des formes linéaires. Ce ne peut être un conoïde, car si elle l'était, il y aurait une droite simple d'appui pour toutes les génératrices : la droite de l'infini du plan directeur. La dénomination sous ce vocable donnée dans Knörrer und Miller Mathematische Zeitschrift. 195 1987, page 61 est donc à interpréter.

F_4 a deux génératrices distinctes associées à chaque point de la droite double K.

On remarque la concision de cette classification, qui aboutit même au fait que les premiers membres des équations de F_3 et F_4 ne diffèrent que d'un terme supplémentaire dans le cas non spécial !

Avant d'exploiter cette classification, pour cataloguer des surfaces cubiques, posons nous la question légitime, du lien entre la ligne double d'une surface réglée, et sa ligne de striction éventuelle. Il est bien connu par exemple que la ligne de striction d'un conoïde droit (c'est à dire que l'axe est orthogonal au plan directeur) est son axe, qui est ligne de croisement donc ligne double par exemple dans le cas du conoïde de Plücker, mais est-ce général ? La réponse est positive : Kentaro Saji (*) cite page 312 un article récent (2001) du japonais Izumiya qui démontre ([31] page 4) que tout point de la ligne double est inclus dans la ligne de striction. Cet article se trouve même sur le web, et contrairement à la double extension de son fichier, il n'est même pas compréssé !

Nous cherchons au moyen de l'équation différentielle, $rt - s^2 = 0$ (notations de Monge $r = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ t = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, avec $z = f(x, y)$ au besoin solution implicite de l'équation de la surface $F(x, y, z) = 0$), toutes les surfaces cubiques développables. On peut procéder pour cela, à une recherche des surfaces cubiques développables, par la mathéode des coefficients indéterminés, au moyen de Maple. Mais le calcul effectif donne un polynôme développé de 30 pages, dont il faut annuler les coefficients. En fait il est inutile, si on se souvient qu'une transformation homographique, laisse invariante la notion de plan, d'intersection, et de droite, de contact, de bi-rapport, de distinction (un plan est transformé en plan, une droite intersection de deux plans distincts, en une droite, un plan tangent à une surface devient plan tangent à la surface transformée,....). En effet la réduction d'Abhyankar, ne fait appel qu'à des transformations homographiques : Si une surface est développable, cela signifie que le plan tangent à une surface réglée est invariant tout le long d'une génératrice, il en sera de même pour la famille transformée. (En d'autres termes, la nullité, la non nullité de $rt - s^2$, sont des invariants par transformation homographique !) Or pour F_3 et F_4, le calcul de $rt - s^2$ (puisque leurs équations respectives peuvent s'exprimer sous la forme $z = f(x, y)$) donne rapidement, et au besoin avec

(*) *Singularities of non degenerate 2-ruled hypersurface in 4-space article de 2002 accessible sur le web.*

Maple respectivement les deux valeurs non nulles $-\frac{1}{x^4}$ et $-\frac{4xy+4y^2+x^2}{x^6}$. **Nous constatons donc qu'on ne trouve que les cônes cubiques (catégories F_1 et F_2 dans la classification du savant indien) comme surfaces cubiques générales, développables.**

Examinons, maintenant quelques cas particuliers de surfaces réglées classiques, pour les intégrer dans la classificiation générale d'Abhyankar.

Il y a d'abord le cas des conoïdes, de Plücker $z(x^2+y^2)=2xy$, de Zindler (Konrad, 1866-1934) $z(x^2-y^2)=2xy$, de Whitney $zx^2=y^2$ (ce sont bien des conoïdes, car leur équation pour se mettre sous la forme $\Phi(z,\frac{y}{x})=0$, l'équation générale d'une telle surface de plan directeur R, d'axe, l'intersection des plans $P=0, Q=0$, étant de la forme $\Phi(R,\frac{P}{Q})=0$. Ferréol prouve que la transformation affine $x=x', y=y', z=\frac{1-z'}{1+z'}$ transforme le conoide de Whitney en le conoïde de Plücker $z'(x'^2+y'^2)=a(y'^2-x'^2)$, qui sont donc équivalents par une transformation projective réelle. Droite double et droite simple étant conservées.

La droite double est l'axe Oz car lorsqu'on coupe la surface par des plans le contenant, d'équation $y=\lambda x$, il y a alors x^2 en facteur et donc la solution $x=0 \Longrightarrow y=0$, est double. D'ailleurs si on coupe la surface par le plan $z=h$, on trouve une équation globale de deux droites qui se coupent en $(0,0,h)$.

Nous utilisons cette méthode de vérification de droite double, lorsque celle ci est connue ou évidente. Pour trouver, en général, les points singuliers de la surface, on recherche les points critiques du premier membre, et on vérifie qu'ils sont sur la surface.

Comme les génératrices sont des droites $y=\lambda x, z=h$, elles rencontrent toutes la droite à l'infini du plan xOy, **toutes ces surfaces - conoïde de Plücker, de Zindler et parapluie de Whitney - appartiennent donc à la catégorie non spéciale F_4 d'Abhyankar.**

Le problème [40] de Polytechnique 1977 étudiait le Ruban de Möbius $\begin{cases} x=(a+\rho\cos\frac{\theta}{2})\cos\theta \\ y=(a+\rho\cos\frac{\theta}{2})\sin\theta \\ z=\rho\sin\frac{\theta}{2} \end{cases}$ qui est une surface réglée, puisque les courbes $\theta=Cte$ sont des droites, et, une élimination rapide des paramètres ρ et θ, donne, après avoir posé, $r=a+\rho\cos\frac{\theta}{2}$, $cotan\frac{\theta}{2}=\frac{r-a}{z}=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{s}{r}+1}{\frac{y}{r}}=\frac{x+r}{y}$ soit $(r-a)y=(x+r)z$; Ce qui implique $r^2(y-z)^2=(ay+zx)^2 \Longleftrightarrow (x^2+y^2)(y^2-2yz+z^2)=a^2y^2+z^2x^2+2axyz \Longleftrightarrow y\big(-y^3+2y^2z-y(z^2+x^2-a^2)+2xz(a+x)\big)=0$

On pose $\boxed{\mathbf{M(x,y,z)=-y^3+2y^2z-y(z^2+x^2-a^2)+2xz(a+x)}}$

Une vérification rapide, permet de s'assurer que les points particuliers, rendant les dénominateurs rencontrés nuls, satisfont bien cette équation.

Pour la recherche ultérieure, de sections horizontales, il est commode d'écrire cette équation sous la forme : $(y-2z)(x^2+y^2)+(z^2-a^2)y-2azx=0$

Cerise sur le gateau : **nous avons constaté que le ruban de Möbius est une surface cubique, réglée !**

Analysons, dans quel type d'Abhyankar elle se classe ?

Le problème est de savoir si elle est rencontre une droite double et une droite simple pour la situer dans le cas non spécial d'Abhyankar.

Rappelons (programme de mathématiques spéciales) qu'une condition ncécéssaire et suffisante pour que deux droites (A,s) et (B,t) (définies par un point et un vecteur directeur non nul), soient coplanaires est que $det(AB,s,t)=0$, et appliquons ce critère, à une droite (A,s) inconnue avec $A=\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ et $s=\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, et à toutes les génératrices (B,t) avec $B=\begin{pmatrix} a\cos\theta \\ a\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ et $t=\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\cos\theta \\ \cos\frac{\theta}{2}\sin\theta \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$.

On obtient la condition $D(\theta)=\begin{vmatrix} p-a\cos\theta & u & \cos\frac{\theta}{2}\cos\theta \\ q-a\sin\theta & v & \cos\frac{\theta}{2}\sin\theta \\ r & w & \sin\frac{\theta}{2} \end{vmatrix}=0.$

Un développement à la main suivi d'une linéarisation des fonctions trigonométriques, ou plus rapidement un calcul Maple avec les procédures T:=combine(D(t),trig) puis TT:=collect(2*T,[cos(t/2), sin(t/2), cos(3*t/2), sin (3t/2)]) nous donne : $TT=(qw+ua-rv)\cos\frac{t}{2}+(2vp-pw+va-2qu+ru)\sin\frac{t}{2}+(-ua+qw-rv)\cos(3\frac{t}{2})+(-wp+ru-av)\sin(3\frac{t}{2})$.

L'indépendance des fonctions 4 fonctions trigonométriques intervenant ci-dessus, donne le système : $\begin{cases} qw+au-rv=0 \\ 2vp-pw+va-2qu+ru=0 \\ -ua+qw-rv \\ -wp+ru-av=0 \end{cases}$ et une résolution de ce système en (p,q,r,u,v,w) à la main ou plus rapidement avec Maple par solve, donne deux solutions distinctes, après avoir écarté la solution qui ne peut convenir avec le vecteur (u,v,w) nul : (1) $(p=0,q=0,r=r,u=0,v=0,w=w)$, qui est l'axe Oz et (2) $(p=-a,q=q,r=q,u=0,v=v,w=v)$.

Pour rechercher laquelle des deux correspond à une droite double, cherchons les points critiques de la fonction M, en résolvant le système : $M'_x=M'_y=M'z=0$ soit $yx-z(x+a)-xz=3y^2-4yz+z^2+x^2-a^2=-y^2+yz-x(x+a)=0$.

Un calcul à la main ou plus rapide avec Maple donne $x=-a, y=z$ qui donne tous les points de la seconde droite, et les deux points $(-\frac{a}{3},\frac{a}{3},-\frac{a}{3})$ et $(-\frac{a}{3},-\frac{a}{3},\frac{a}{3})$, qui ne sont pas sur le ruban puisque $M(-\frac{a}{3},\frac{a}{3},-\frac{a}{3})=-\frac{8}{27}a^3\neq 0$ et $M(-\frac{a}{3},-\frac{a}{3},\frac{a}{3})=+\frac{8}{27}a^3\neq 0$.

Le ruban de Möbius est donc une surface cubique, réglée, $\mathbf{F_4}$ non spéciale d'Abhyankar, la droite simple d'appui étant dans ce cas l'axe Oz.

Remarquons, qu'une condition nécéssaire et suffisante (par raison de degré de la section) pour qu'un plan coupe le ruban suivant une conique, est qu'il passe par une droite de la surface cubique en question. Si ce plan contient la droite double le reste de la section est une génératrice. Si ce plan contient la droite simple, il coupe, puisque la droite simple et la droite double ne sont pas coplanaires, cette dernière en un point A. Les deux génératrices issues de A s'appuyant sur la droite simple, sont dans le plan considéré, et constituent la conique cherchée qui est donc décomposée en deux droites réelles : les deux génératrices qui sont dans le plan contenant la droite simple.

Un calcul rapide d'intersection de la surface de Möbius par le plan $y=kx$, donne l'axe Oz et la conique, dont l'équation $Q=0$, est après utilisation de la méthode de Gauss, ou mieux, $\underline{factor}(Q,(k^2+1)^{1/2})$, $Q=[(k^3+k)x+(\sqrt{k^2+1}-k^2-1)z+ka\sqrt{k^2+1}][(k^3+k)x+(-\sqrt{k^2+1}-k^2-1)z-ka\sqrt{k^2+1}]$.

Comme les seules droites du ruban, sont les droites d'appui et les génératrices les seules sections coniques (par raison de degré) non dégénérées possibles le sont par des plans contenant une génératrice et une seule, mais ni la droite simple ni la droite double. En effet si elle était décomposée (nécéssairement en deux droites), par raison combinatoire, ces deux droites seraient ou la droite double (auquel cas le plan est un plan du faisceau de la droite double, cas déja vu), ou une génératrice et la droite simple (cas également déja vu, puisqu'alors le plan contient la droite simple), ou deux génératrices (cas se ramenant au précédent, puisque les deux génératrices s'appuient sur la droite simple !).

Il reste à voir la nature de la conique de section, lorsque que le plan contient une génératrice et pas d'autre droite. Ce qui se fait en utilisant la méthode de Gauss, sur la forme quadratique premier membre de la section par un tel plan variable (après avoir éliminé le terme du premier degré, correspondant à la génératrise). Cette méthode donne la signature de la forme quadratique considérée. Alain Esculier a fait un programme Maple V 5 (que vous pouvez lui ou me demander), coupant le ruban par un plan variable $P(t)$ contenant une génératrice $D(u)$ donnée. Ce qu'il y a de remarquable, c'est que contrairement au conoïde de Plücker où les sections sont uniquement elliptiques, et au conoïde de Zindler où les sections sont hyperboliques, dans le cas du ruban, pour toutes les génératrices, les trois possibilités (Ellipse, Hyperbole, Parabole) se présentent pour toute génératrice, et suivant le choix du plan $P(t)$. Un suivi précis, illustré par Maple (non reproduits ici) de la méthode de Gauss appliquée sur l'équation de la section dans le plan $P(t)$, de la forme $ay^2+bz^2+cyz+dy+fz+g$, où les coefficients sont des fonctions explicitées en $v=\frac{u}{2}$ et t, montre qu'en général tous les types (elliptique, hyperbolique, parabolique) sont obtenus, mais que pour certaines génératrices et certains plans les contenant les sections sont uniquement hyperboliques ou paraboliques.

Le problème d'Agrégation 1929 [20], montre que les sections horizontales du ruban par les plans $z=h$, sont les courbes $(y-2h)(x^2+y^2)+(h^2-a^2)y-2ahx=0$, qui sont des cubiques circulaires du type strophoïdes droites (c'est à dire que les tangentes en leur point double sont orthogonales), recherche les intersections du ruban avec les quadriques d'un faisceau linéaire particulier et même leurs courbes asymptotiques. (Voir le livre de Dollon, ou RMS février 1930).

Ceci semble utilisé en R.P.T. (Rapid Prototyping Techniques) Technique de sculpture utilisant l'infographie.

Enfin terminons par la recherche de toutes les transformations projectives qui échangent conoïde de Zindler, Parapluie de Whitney et ruban de Möbius

Robert Férréol (dont l'adresse du site a été donnée par ailleurs) a réussi à démontrer le 25 janvier 2004 que la transformation projective réelle définie par $X=T', Y=Z', Z=X'+Z', T=Y'-T'$ transformait l'équation homogène du ruban de Möbius étudié, en celle du conoïde de Zindler (en envoyant la droite simple Oz à l'infini et la droite double $x=-1, y=z$ en Oz).

Alain Esculier a trouvé de multiples transformations homographiques réelles transformant le parapluie de Whitney en le conoïde de Plücker. Par exemple $\begin{cases} X=X'+Y' \\ Y=-X'+Y' \\ Z=\frac{1}{2}Z'-\frac{1}{2}T' \\ T=-\frac{1}{2}Z'-\frac{1}{2}T' \end{cases}$ ou $\begin{cases} X=-X'+Y' \\ Y=X'+Y' \\ Z=\frac{1}{2}Z'+\frac{1}{2}T' \\ T=-\frac{1}{2}Z'+\frac{1}{2}T' \end{cases}$.

De même les deux transformations réelles $\begin{cases} X=-2Z' \\ Y=-2T' \\ Z=-\frac{1}{2}X'-\frac{1}{2}Y'-2T' \\ T=-\frac{1}{4}X'+\frac{1}{4}Y'+Z' \end{cases}$ et $\begin{cases} X=-2Z' \\ Y=2T' \\ Z=\frac{1}{2}X'-\frac{1}{2}Y'+2T' \\ T=+\frac{1}{4}X'+\frac{1}{4}Y'+Z' \end{cases}$ transforment le ruban de Môbius en le conoïde de Zindler.

On peut aussi chercher les matrices des transformations homographiques réelles qui réalisent l'un ou l'autre de ces échanges. On pourra les noter les W-P morphismes et les M-Z morphismes, par analogie avec les morphismes u, généralisation des isométries, qui échangent deux formes quadratiques q_1, q_2 vérifiant $q_1(u(x)) = q_2(x)$, (ici échangent deux polynômes homogènes cubiques).

Alain Esculier avec un programme Maple, qui peut être envoyé à tout lecteur en faisant la demande par courrier électronique, a trouvé par exemple 4 familles de transformations (y en a t-il d'autres ?) homographiques réelles, transformant le ruban de Möbius en le conoïde de Zindler par les formules $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ T_1 \end{bmatrix}$, où A est une matrice régulière réelle d'ordre 4.

Les quatre familles de solutions trouvées sont :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{2,3}^2 \\ 0 & 0 & -a_{2,3}^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{2,3}} & -a_{2,3}^2 & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{1}{a_{2,3}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}a_{2,3}^2 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_{2,3}^2 \\ 0 & 0 & -a_{2,3}^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{2,3}} & -a_{2,3}^2 & 0 \\ -\frac{1}{2}\frac{1}{a_{2,3}} & 0 & 0 & \frac{1}{2}a_{2,3}^2 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2a_{2,1}a_{2,2} & a_{2,2}^2 - a_{2,1}^2 \\ 0 & 0 & -a_{2,2}^2 + a_{2,1}^2 & -2a_{2,1}a_{2,2} \\ -\frac{a_{2,1}}{a_{2,2}^2+a_{2,1}^2} & -\frac{a_{2,2}}{a_{2,2}^2+a_{2,1}^2} & a_{2,1}^2 - a_{2,2}^2 & -2a_{2,1}a_{2,2} \\ -\frac{1}{2}\frac{a_{2,2}}{a_{2,2}^2+a_{2,1}^2} & \frac{1}{2}\frac{a_{1,2}}{a_{2,2}^2+a_{2,1}^2} & a_{2,1}a_{2,2} & \frac{1}{2}(a_{2,1}^2 - a_{2,2}^2) \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2a_{2,1}a_{2,2} & -a_{2,2}^2 + a_{2,1}^2 \\ 0 & 0 & -a_{2,2}^2 + a_{2,1}^2 & 2a_{2,1}a_{2,2} \\ \frac{a_{2,1}}{a_{2,2}^2+a_{2,1}^2} & -\frac{a_{2,2}}{a_{2,2}^2+a_{2,1}^2} & a_{2,1}^2 - a_{2,2}^2 & 2a_{2,1}a_{2,2} \\ \frac{1}{2}\frac{a_{2,2}}{a_{2,2}^2+a_{2,1}^2} & \frac{1}{2}\frac{a_{1,2}}{a_{2,2}^2+a_{2,1}^2} & a_{2,1}a_{2,2} & \frac{1}{2}(a_{2,2}^2 - a_{2,1}^2) \end{bmatrix}.$$

Bien sûr les matrices associées aux transformations du conoïde de Zindler vers le ruban de Möbius sont les matrices inverses des précédentes.

On peut établir des formules analogues de transformations réelles du parapluie de Whitney vers le conoïde de Plücker.

Enfin de manière similaire on peut établir 5 familles de transformations homographiques complexes, transformant le conoïde de Zindler en le conoïde de Plücker. Elles sont beaucoup plus simples que les précédentes. Un programme fait par Alain Esculier en trouve 40, y en a-t-il d'autres ?

On trouve : $A_1 = \begin{bmatrix} ia_{2,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a_{2,2}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\frac{1}{a_{2,2}^2} \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} ia_{2,2} & -a_{2,2} & 0 & 0 \\ ia_{2,2} & a_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\frac{1}{2a_{2,2}^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{2,2}^2} & 0 \end{bmatrix}$,

$$A_3 = \begin{bmatrix} ia_{2,2} & a_{2,2} & 0 & 0 \\ -ia_{2,2} & a_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\frac{1}{2a_{2,2}^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2a_{2,2}^2} & 0 \end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix} 0 & ia_{2,1} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a_{2,1}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\frac{1}{a_{2,1}^2} \end{bmatrix},$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} a_{1,1} & -ia_{2,1} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & ia_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-a_{2,1}^2+a_{1,1}^2}{a_{1,1}^2+a_{2,1}^2} & -2i\frac{a_{2,1}a_{1,1}}{a_{1,1}^2+a_{2,1}^2} \\ 0 & 0 & -2\frac{a_{2,1}a_{1,1}}{a_{1,1}^2+a_{2,1}^2} & -i\frac{-a_{2,1}^2+a_{1,1}^2}{a_{1,1}^2+a_{2,1}^2} \end{bmatrix}.$$

Et bien sûr les 5 formules qui s'en déduisent en changeant i en $-i$.

Le lecteur pourra s'exercer à classer les surfaces cubiques réglées qu'il rencontrera, en vérifiant, avec la même technique, les résultats donnés pour F_3 et F_4, de non existence dans le premier cas d'existence dans le second (et alors la préciser) d'une droite simple d'appui commune à toutes les génératrices.

(Le lecteur curieux, voulant en savoir plus sur les surfaces réglées pourra entrevoir la richesse et la modernité, de cette notion dans les travaux de Klein et Grassmann [36, 39, 56] présentés dans les livres de Munford, Pottmann et Waerden, utilisant les coordonnées plückériennes (voir ce mot dans le glossaire), pour montrer en particulier que les

droites d'une telle surface sont des points de la quadrique de Klein d'équation homogène $p_{1,4}p_{2,3}+p_{2,4}p_{3,1}+p_{3,4}p_{1,2}=0$ *dans l'espace à 5 dimensions)*

---

(3) La surface de CLEBSCH est non réglée :

(Attention à ne pas faire l'erreur de débutant, de croire que toutes les surfaces réglées sont développables : les familles de droites à un paramètre n'ont pas nécéssairement une enveloppe !)

En effet si elle l'était, elle aurait une droite double (voir la démonstration précédente) dont les points sont singuliers sur la surface,

Or soit directement sous la forme de son équation en composantes projectives, soit en coordonnées ordinaires (La cohérence se faisant en remarquant qu'en coordonnées homogènes $f(x=\frac{X}{T}, y=\frac{Y}{T}, z=\frac{Z}{T}) = G(X,Y,Z,T)$ est 0-homogène et que $G'_X(X,Y,Z,T) = \frac{1}{T}f'_x(\frac{X}{T},\frac{Y}{T},\frac{Z}{T})$, $G'_Y(X,Y,Z,T) = \frac{1}{T}f'_y(\frac{X}{T},\frac{Y}{T},\frac{Z}{T})$, $G'_Z(X,Y,Z,T) = \frac{1}{T}f'_z(\frac{X}{T},\frac{Y}{T},\frac{Z}{T})$, et que $G'_T(X,Y,Z,T) = -\frac{1}{T^2}(Xf'_x(\frac{X}{T},\frac{Y}{T},\frac{Z}{T}) + Yf'_y(\frac{X}{T},\frac{Y}{T},\frac{Z}{T}) + Zf'_z(\frac{X}{T},\frac{Y}{T},\frac{Z}{T})$ est cohérent avec l'identité d'Euler des fonctions 0-homogènes) ; le passage des composantes homogènes aux composantes projectives générales, se faisant par le théorème de composition des dérivations et la multiplication par le jacobien égal au déterminant de la transformation projective associée, comme le vérifieront rapidement nos lecteurs)

La surface de Clebsch ayant son équation en coordonnées homogènes sous la forme $F(X,Y,Z,T) = X^3+Y^3+Z^3+T^3-(X+Y+Z+T)^3 = 0$, les points singuliers éventuels vérifieraient $X^2 = (X+Y+Z+T)^2$, $Y^2 = (X+Y+Z+T)^2$, $Z^2 = (X+Y+Z+T)^2$, $T^2 = (X+Y+Z+T)^2$, ce qui donnerait avec des notations classiques évidentes et posant $D = (X+Y+Z+T)$: $X = \varepsilon D$, $Y = \varepsilon' D$, $Z = \varepsilon" D$, $T = \varepsilon"' D$; or un tel point singulier doit être sur la surface, par conséquent (puisque $\varepsilon^3 = \varepsilon$) $D^3(\varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon" + \varepsilon"' - 1) = 0$; mais le coefficient de D est impair donc jamais nul. Donc $D = 0$ ce qui est écarté puisque les composantes homogènes ne doivent pas être toutes nulles.

On aurait un système beaucoup moins simple, si on prenait les équations en coordonnées ordinaires. Mais on peut le faire quand même en s'aidant de Maple par solve(diff(H,x)=0,diff(H,y)=0,diff(H,z)=0,x,y,z); et en montrant que les points de gradient nul, ne sont pas sur la surface. Cela se fait avec Maple en quelques lignes aussi bien avec la forme H de Hunt que la forme de Todesco.

En prime nous avons démontré que la surface de CLEBSCH est lisse, sans point singulier : en anglais on dit "smooth".

---

(4) Recherche de toutes les droites de la surface de Clebsch :

Recherche théorique :

Considérons une surface cubique non réglée S ; Supposons (ce qui sera prouvé par le calcul (*)) qu'elle contienne un nombre non nul, fini de droites. Considérons une droite particulière L. Tout plan H coupe S suivant une courbe du troisième degré ; en particulier tout plan contenant L. Comme L est du premier degré, le reste de la section est une conique, qui elle même, moyennant un choix convenable (ce choix est possible : il suffit de prendre la première droite trouvée par le calcul explicite) de H, peut être décomposée en deux droites.

(En fait, je n'ai trouvé de démonstration rigoureuse, de l'existence de droites dans le cas général, sur une surface cubique, non réglée que dans les livres de Reid et Shafarevich, Munford [42, 48, 36] et l'article de Sedeberg [47], le premier montrant que le résultant des équations trouvées est du vingt septième degré, le deuxième pour démontrer qu'il y a au moins une droite, en utilisant les coordonées plückériennes, prouvant que la dimension de la fibre associée est ≥ 1, *le troisième lui montre que toutes les cubiques lisses, ont le même nombre de droites et en calcule le nombre pour celle qui est la plus simple* $x^3+y^3+z^3+t^3=0$, *le quatrième par un calcul algébrique mené par un logiciel informatique ; Char et Al [13] ont en 1990, (voir Bajaj, [4] p 9) fait un calcul avec Maple, du résultant des équations, associées à la recherche des droites sur une cubique : le résultat comprend plusieurs centaines de milliers de termes...., comme quoi l'intelligence, le suivi de l'interprétation est primordial pour la compréhension et la signification des résultats !)*

Comme une droite est sa propre tangente, un tel plan, sera appelé "tritangent", car tangent à S aux trois sommets du triangle en lequel se décompose alors la section de S par H.

Choisissons une droite L quelconque de S. Moyennant un choix convenable du tétraèdre de référence, elle a pour équations $x_3 = x_4 = 0$ (une droite étant définie comme intersection de deux plans).

Comme S la contient, son équation $f = 0$, où f est une forme cubique en $x_1, ..., x_4$, prend la forme $x_3U + x_4V = 0$, où U, V sont, par raison de degré, des formes quadratiques en $x_1, ..., x_4$.

Un plan H_μ du faisceau de L a pour équation, $x_3 = \mu x_4$. (on permet $\mu = \infty$) ; L'équation de la cubique de section de ce plan et de S est : $x4\big(\mu U(x_1, x_2, \mu x_4, x_4) + V(x_1, x_2, \mu x_4, x_4)\big) = 0$.

(*) *Je n'ai pas trouvé d'autre méthode, car l'argumentation imprimée des auteurs des années 1860, me laisse perplexe, pour question de compatibilité : Une droite dépend de 4 paramètres, or le report dans une équation du troisième degré donne 4 conditions : il y a autant d'inconnues que d'équations, donc le problème est possible.... : en fait ils utilisaient sans le clamer, la théorie de "l'apolarité" (voir quelques détails sur ce mot au moment de l'évocation de l'équation pentahédrale au début du thème des double-sixains).*

$x_4 = 0$ correspond à la ligne L. Le reste de la section est la conique : d'équation : $\mu U(x_1, x_2, \mu x_4, x_4) + V(x_1, x_2, \mu x_4, x_4) = 0$.

Comme il a été dit plus haut, pour que H_μ soit tri-tangent, il faut et il suffit que cette conique soit décomposée en deux droites, donc que le discrimiminant de la forme quadratique du premier membre soit nul.

On trouve une équation du cinquième degré en μ. Il y a donc cinq plans tritangents à S, contenant une droite donnée L quelconque de S.

Pour les petits curieux, voici le premier membre de cette équation, donné par Maple en quatre centièmes de seconde :

restart: $U := (x1, x2, x3, x4)- > a11 * x1^2 + a22 * x2^2 + a33 * x3^2 + a44 * x4^2 + 2 * a12 * x1 * x2 + 2 * a13 * x1 * x3 + 2 * a14 * x1 * x4 + 2 * a23 * x2 * x3 + 2 * a24 * x2 * x4 + 2 * a34 * x3 * x4;$

$V := (x1, x2, x3, x4)- > b11 * x1^2 + b22 * x2^2 + b33 * x3^2 + b44 * x4^2 + 2 * b12 * x1 * x2 + 2 * b13 * x1 * x3 + 2 * b14 * x1 * x4 + 2 * b23 * x2 * x3 + 2 * b24 * x2 * x4 + 2 * b34 * x3 * x4;$

$Q := (x1, x2, x4)- > (mu * U(x1, x2, mu * x4, x4) + V(x1, x2, mu * x4, x4));$

with(linalg):

$st := time() : H := hessian(Q(x1, x2, x4), [x1, x2, x4]); DD := det(H); collect(\%, mu);$

chrono:=(time()-st)*seconde(s);

$$H = \begin{bmatrix} 2 * \mu a_{11} + 2b_{11} & 2\mu a_{12} + 2b_{12} & \mu(2a_{13}\mu + 2a_{14}) + 2b_{13}\mu + 2b_{14} \\ 2\mu a_{12} + 2b_{12} & 2\mu a_{22} + 2b_{22} & \mu(2a_{23}\mu + 2a_{24}) + 2b_{23}\mu + 2b_{24} \\ \mu(2a_{13}\mu + 2a_{14}) + 2b_{13}\mu + 2b_{14} & \mu(2a_{23}\mu + 2a_{24}) + 2b_{23}\mu + 2b_{24} & \mu(2a_{33}\mu^2 + 2a_{44} + 4a_{34}\mu) + 2b_{33}\mu^2 + 2b_{44} + 4b_{34}\mu \end{bmatrix}$$

Le déterminant de H occupe 19 lignes en Maple.

$D1 := (8 * a11 * a22 * a33 - 8 * a12^2 * a33 - 8 * a13^2 * a22 - 8 * a11 * a23^2 + 16 * a12 * a13 * a23)\mu^5$
$+(-8 * a13^2 * b22 - 16 * a13 * a14 * a22 - 16 * a12 * b12 * a33 - 8 * b11 * a23^2 + 16 * b12 * a13 * a23 - 16 * a12^2 * a34 + 8 * b11 * a22 * a33 + 8 * a11 * a22 * b33 + 16 * a12 * a14 * a23 + 8 * a11 * b22 * a33 + 16 * a11 * a22 * a34 + 16 * a12 * a13 * b23 - 16 * a11 * a23 * b23 + 16 * a12 * a13 * a24 - 16 * a13 * b13 * a22 + 16 * a12 * b13 * a23 - 8 * a12^2 * b33 - 16 * a11 * a23 * a24)\mu^4$
$+(8*a11*a22*a44-8*a11*a24^2-8*a11*b23^2-8*a12^2*a44-16*a12^2*b34-8*a14^2*a22-8*b13^2*a22+8*b11*b22*a33-16*b11*a23*a24-16*b11*a23*b23-32*a12*b12*a34-16*a12*b12*b33+16*a12*a14*a24+16*a12*a14*b23+16*a12*b13*a24+16*a12*b13*b23+16*a12*a13*b24+16*a12*b14*a23+16*b12*a13*a24+16*b12*a13*b23+16*b12*a14*a23+16*b12*b13*a23-16*a13*a14*b22-16*a13*b13*b22-16*a13*b14*a22-16*a14*b13*a22-8*b12^2*a33+16*a11*a22*b34+16*a11*b22*a34+8*a11*b22*b33-16*a11*a23*b24-16*a11*a24*b23+16*b11*a22*a34+8*b11*a22*b33)\mu^3$
$+(8*a11*a22*b44-8*b11*b23^2-16*b12^2*a34-8*b12^2*b33-8*a14^2*b22-8*b13^2*b22-8*b11*a24^2-8*a12^2*b44+16*b11*a22*b34+16*b11*b22*a34+8*b11*b22*b33-16*b11*a23*b24-16*b11*a24*b23-16*a12*b12*a44-32*a12*b12*b34+16*a12*a14*b24+16*a12*b13*b24+16*a12*b14*a24+16*a12*b14*b23+16*b12*a14*a24+16*b12*a14*b23+16*b12*b13*a24+16*b12*b13*b23+16*b12*a13*b24+16*b12*b14*a23-16*a13*b14*b22-16*a14*b13*b22-16*a14*b14*a22-16*b13*b14*a22+8*a11*b22*a44+16*a11*b22*b34-16*a11*a24*b24-16*a11*b23*b24+8*b11*a22*a44)\mu^2$
$+(16 * a12 * b14 * b24 + 8 * a11 * b22 * b44 + 8 * b11 * b22 * a44 + 16 * b12 * b14 * a24 + 16 * b12 * a14 * b24 + 16 * b11 * b22 * b34 - 8 * b14^2 * a22 + 16 * b12 * b13 * b24 + 16 * b12 * b14 * b23 + 8 * b11 * a22 * b44 - 16 * a14 * b14 * b22 - 16 * b13 * b14 * b22 - 8 * a11 * b24^2 - 8 * b12^2 * a44 - 16 * b11 * a24 * b24 - 16 * b12^2 * b34 - 16 * a12 * b12 * b44 - 16 * b11 * b23 * b24)\mu$
$+8 * b11 * b22 * b44 - 8 * b14^2 * b22 + 16 * b12 * b14 * b24 - 8 * b11 * b24^2 - 8 * b12^2 * b44$

On peut donc compter le nombre de droites portées par S.

Un plan tritangent étant donné (Si L existe, ce qui sera assuré par le calcul explicite ci dessous, il en existe au moins un), il est le cinquième plan tritangent associé à chacune des trois droites de S qu'il contient : Il rencontre donc $4.3 = 12$ autres plans tritangents, dans chacun desquels il y a deux autres droites de S : au total il y a donc $\boxed{\mathbf{12 * 2 + 3 = 27}}$ droites sur S. (le 3 ajouté, comptant les trois droites du plan tritangent donné).

Bien que cela ne concerne pas directement notre propos, on peut remarquer que comme chaque droite est contenue dans cinq plans tritangents, et que chaque plan tritangent, contient trois droites, le principe des bergers (*) (on compte le nombre de pattes et on divise par quatre pour avoir le nombre de moutons) nous dit qu'il y a $\frac{27*5}{3} = 45$ plans tritangents à S.

Dans son monumental [45] Schläfli, (**) utilisant un procédé dû à Steiner (en déterminant la classe t de l'enveloppe

---

(*) *("La culture c'est comme la confiture, moins on en a plus on l'étale" seule, "conquète", avancée, réduite à un simple aphorisme, de "mai 1968"")*

(**) *(En lisant les travaux de Schläfli, Salmon,....au 19ème siècle on est surpris d'une part par leur hauteur de vue, leur modernité (on rencontre des déterminants, des fractions continues, des jacobiens, des opérateurs de dérivation, théorème des fonctions implicites, parallèlisme de Clifford, syzygie.... et ceci sans pudibonderie ni hypocrisie Tartufienne "Cachez ce jacobien que je ne saurais voir" : puisque ces outils sont connus et rodés utilisons les !) et on ne peut que regretter que des programmes ou débiles ou volontairement tronqués, cachent tout ce qui est intéréssant aux élèves, réservant les bonnes informations à une caste doctrinaire, dogmatique donc sectaire et primaire qui auto-protège ainsi ses privilèges (en particulier en érigeant en pseudo science (sinistre car basée sur un formatage artificiel des individus) la pédagogie : la vraie, la seule est d'être de niveau suffisant pour expliquer bien aux autres, il faut d'abord bien* des plans bitangents) et (Segré [46]) remarquant que le nombre de droites d'une surface algébrique de degré $n=3$ est égal à celui des plans bitangents passant par un point quelconque, a même démontré que le nombre de plans bi-tangents à une telle surface, passant par un point donné, était $\boxed{\mathbf{t(n)=\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n^3-n^2+n-12)}}$; Le lecteur vérifiera que $t(3)=27$.

Ènumération explicite des droites de la surface de Clebsch :

Une première méthode consiste à utiliser l'équation de la surface de Clebsch sous la forme $X^3+Y^3+Z^3+T^3=D^3$ avec $D=X+Y+Z+T$, mais les factorisations sont délicates avec le risque d'équations complexes, qui masqueraient la réalité des droites ; aussi nous préférons utiliser la surface sous la forme de Hunt ; Le calcul est aussi possible sous la forme de Todesco [54] mais la présence du $\sqrt{3}$ et la moindre symétrie de l'équation, rendent le calcul plus lent et il y a seulement 18 droites non horizontales au lieu de 22.

Nous nous aidons de Maple, mais le calcul peut être mené à la main.

• Recherche des droites non horizontales : On pose $H:=(x,y,z)->81(x^3+y^3+z^3)-189(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)+54xyz+126(xy+yz+zx)-9(x^2+y^2+z^2)-9(x+y+z)+1=0$;

Puis les commandes maple res:=H(a*z+p,b*z+q,z); H1:=expand(res); H2:=collect(H1,z): permettent d'obtenir les équations en (a,b,p,q)

$$\begin{cases} 1+81*p^3+81*q^3-189*q^2*p-9*q^2+126*q*p-9*p^2-9*p-189*q*p^2-9*q=0 \\ -9+126*q*a+126*p-189*p^2+243*b*q^2-9*a-18*b*q-378*q*a*p-378*b*q*p \\ +126*b*p-9*b-18*a*p-189*q^2*a-189*q^2-189*b*p^2+126*q+54*q*p+243*a*p^2=0 \\ -378*b*q+243*a^2*p-189*b^2*p-9+126*b-378*a*p-378*b*q*a-189*q+126*b*a \\ +54*b*p-189*p+54*q*a-378*b*a*p-9*b^2-9*a^2+126*a-189*q*a^2+243*b^2*q=0 \\ -189*b^2+81-189*b^2*a-189*b+81*b^3-189*a-189*a^2-189*b*a^2+54*b*a+81*a^3=0 \end{cases}$$

Alors les commandes :

C:=[seq(coeff(H2,z,i),i=0..3)]; solutions :=map(allvalues,[solve(seq(C[i]=0,i=1..4),a,b,p,q)]); permettent d'obtenir 22 solutions (que l'on compte à la main ou par nops) en cinq secondes ! et solutions qui sont

$$\begin{cases} (1)\ a=-1, b=0, p=\frac{1}{3}, q=0 \\ (2)\ a=0, b=-1, p=0, q=\frac{1}{3} \\ (3)\ a=-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{5}, b=-\frac{3}{4}\sqrt{5}-\frac{5}{4}, p=-\frac{1}{12}\sqrt{5}+\frac{1}{4}, q=\frac{1}{12}\sqrt{5}+\frac{1}{12} \\ (4)\ a=-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}, b=-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\sqrt{5}, p=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\sqrt{5}, q=\frac{1}{12}-\frac{1}{12}\sqrt{5}, \\ (5)\ a=-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\sqrt{5}, b=-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}, p=\frac{1}{12}-\frac{1}{12}\sqrt{5}, q=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\sqrt{5}, \\ (6)\ a=-\frac{3}{4}\sqrt{5}-\frac{5}{4}, b=-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{5}, p=\frac{1}{12}\sqrt{5}+\frac{1}{12}, q=-\frac{1}{12}\sqrt{5}+\frac{1}{4} \\ (7)\ a=3, b=0, p=-\frac{1}{3}, q=0 \\ (8)\ a=0, b=-1, p=-\frac{1}{3}, q=0 \\ (9)\ a=-1, b=0, p=\frac{2}{3}, q=\frac{1}{3} \\ (10)\ a=0, b=\frac{1}{3}, p=0, q=\frac{1}{9} \\ (11)\ a=-3-\sqrt{5}, b=-\sqrt{5}, p=\frac{7}{6}+\frac{1}{2}\sqrt{5}, q=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{5} \\ (12)\ a=-3+\sqrt{5}, b=\sqrt{5}, p=\frac{7}{6}-\frac{1}{2}\sqrt{5}, q=\frac{1}{2}-\frac{1}{/}6\sqrt{5} \\ (13)\ a=-\frac{1}{5}\sqrt{5}, b=1+\frac{3}{5}\sqrt{5}, p=\frac{1}{6}+\frac{1}{10}\sqrt{5}, q=\frac{1}{6}+\frac{1}{30}\sqrt{5} \\ (14)\ a=\frac{1}{5}\sqrt{5}, b=1-\frac{3}{5}\sqrt{5}, p=\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\sqrt{5}, q=\frac{1}{6}-\frac{1}{30}\sqrt{5} \\ (15)\ a=0, b=3, p=0, q=-\frac{1}{3} \\ (16)\ a=-1, b=0, p=0, q=-\frac{1}{3} \\ (17)\ a=\frac{1}{3}, b=0, p=\frac{1}{9}, q=0 \\ (18)\ a=0, b=-1, p=\frac{1}{3}, q=\frac{2}{3} \\ (19)\ a=-\sqrt{5}, b=-3-\sqrt{5}, p=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{5}, q=\frac{7}{6}+\frac{1}{2}\sqrt{5} \\ (20)\ a=\sqrt{5}, b=-3+\sqrt{5}, p=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{5}, q=\frac{7}{6}-\frac{1}{2}\sqrt{5}, \\ (21)\ a=1+\frac{3}{5}\sqrt{5}, b=-\frac{1}{5}\sqrt{5}, p=\frac{1}{6}+\frac{1}{30}\sqrt{5}, q=\frac{1}{6}+\frac{1}{10}\sqrt{5} \\ (22)\ a=1-\frac{3}{5}\sqrt{5}, b=\frac{1}{5}\sqrt{5}, p=\frac{1}{6}-\frac{1}{30}\sqrt{5}, q=\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\sqrt{5} \end{cases}$$

Il suffit d'écrire $x=az+p, y=bz+q$ pour obtenir 22 droites portées par la surface ; ces 22 droites sont toutes réelles.

On recherche maintenant les droites horizontales sous la forme $z=h, x=at+p, y=bt+q$, avec les commandes Maple HH:=H(a*t+p,b*t+q,h); puis HH2:=collect(HH,t); qui donnent les équations

comprendre pour soi !) : tout ceci nuit d'une part aux individus démotivés par des sujets ternes, d'autre part au pays, en réduisant l'effectif d'une véritable élite intellectuelle. Comme disait un collègue "les élèves votent avec leurs pieds en se détournant des vraies mathématiques qu'ils ne peuvent connaître, en ayant marre, qu'en fin de compte on les "méprise" avec de tels programmes")

$$\begin{cases} 126*h*p-189*h^2*q+1-189*h*q^2+54*h*q*p-189*q^2*p-189*h*p^2-189*h^2*p-9*q \\ +126*h*q-9*h^2+81*p^3-9*q^2-9*p+126*q*p-9*p^2-189*q*p^2-9*h+81*q^3+81*h^3=0 \\ 126*h*b-189*h^2*b+126*h*a+54*h*q*a+54*h*b*p-189*q^2*a-378*b*q*p-378*h*b*q \\ -18*b*q-9*b+126*q*a+126*b*p-189*h^2*a-378*q*a*p-189*b*p^2+243*a*p^2 \\ +243*b*q^2-9*a-18*a*p-378*h*a*p=0 \\ -9*b^2-378*b*q*a-189*b^2*p-189*h*b^2+54*h*b*a+243*b^2*q-189*q*a^2 \\ -378*b*a*p+126*b*a+243*a^2*p-189*h*a^2-9*a^2=0 \\ -189*b*a^2-189*b^2*a+81*a^3+81*b^3=0 \end{cases}$$

Puis les commandes CC:=[seq(coeff(HH2,t,i),i=0..3)];

solhorizont :=map(allvalues,[solve(seq(CC[i]=0,i=1..4),a,b,p,q,h)]);

donnent 8 solutions dont les trois premières sont parasites, ne représentant pas des droites car (avec $a=b=0$) mais des points, et à la rigueur, qu'on peut utiliser pour former une représentation paramétrique de la nappe avec (mais les formules sont très lourdes, avec des giga-radicaux) les paramètres (p,q). Chacune de ces solutions parasites fournit une représentation paramétrique de chacune des branches de la nappe.

Les cinq nouvelles droites que nous obtenons sont données par $z=h, x=at+p, y=bt+q$,

soit $\boxed{\mathbf{ay-bx=aq-bp} \text{ ou } \mathbf{y=\frac{b}{a}x+q-\frac{b}{a}p}}$ avec :

$$\begin{cases} (1h)\ h=0, a=\frac{1}{3}b, b=b, p=\frac{1}{3}q+\frac{1}{9}, q=q \ \boxed{\mathbf{y=3x-\frac{1}{3},\ z=0}} \\ (2h)\ h=-\frac{1}{3}, a=-b, b=b, p=-q, q=q \ \boxed{\mathbf{y=-x,\ z=-\frac{1}{3}}} \\ (3h)\ h=\frac{1}{3}, a=-b, b=b, p=-q+\frac{2}{3}, q=q \ \boxed{\mathbf{y=-x+\frac{2}{3},\ z=\frac{1}{3}}} \\ (4h)\ h=0, a=-b, b=b, p=\frac{1}{3}-q, q=q \ \boxed{\mathbf{y=-x+\frac{1}{3},\ z=0}} \\ (5h)\ h=0, a=3b, b=b, p=-\frac{1}{3}+3q, q=q \ \boxed{\mathbf{y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{9},\ z=0}} \end{cases}$$

Le fait qu'il y ait des paramètres libres, tient au choix du paramètre : par exemple la première droite est $z=0, x=\frac{1}{3}bt+\frac{1}{3}q+\frac{1}{9}, y=bt+q$, donc $x=\frac{1}{3}y+\frac{1}{9}$.

La surface de Clebsch (nous avons illustré le cas sous la forme de Hunt) contient donc $\mathbf{22+5=27}$ droites toutes réelles et seulement $\mathbf{27}$. Ce qui prouve aussi, d'une autre manière que plus haut, qu'elle est donc non réglée (sinon elle aurait une infinité de droites).

---

(5) Représentation paramétrique de la surface de Clebsch :

Première représentation

(Ce n'est pas la plus belle, mais elle a l'avantage d'être la première établie, de montrer la voie !)

Après une idée suggérée par Ferrarese, mathématicien de Turin qui a fait les calculs des programmes permettant le site Todesco, voici la méthode suivie.

Je prend, par exemple, comme droites D_1 $x+y=\frac{2}{3},\ z=\frac{1}{3}$ (la troisième droite horizontale) et D_2 $x=-\frac{1}{3},\ y=-z$ (la huitième droite non horizontale) ; simples ne se rencontrant pas et non contenues dans le plan $z=0$; je prend un point $P(u,v,0)$ dans ce plan ; je détermine les plans (par faisceaux) PD_1 et PD_2, ils déterminent une droite que je paramètre (par z) ; elle rencontre la surface cubique en deux points déja connus (ceux sur D_1 et D_2) : il reste un troisième point, ce qui fournit le paramétrage de la surface de Clebsch sous la forme de Hunt, en premère mondiale (mais Esculier m'a signalé qu'au tracé, il y avait des plans parasites, donc le pétard est actuellement mouillé).

L'équation du faisceau des plans qui contiennentt D_1 est $x+y-\frac{2}{3}+\lambda(z-\frac{1}{3})=0$; la condition de contenir P donne $u+v-\frac{2}{3}-\frac{\lambda}{3}=0$ et donc $\lambda=3-u+v)-2$ et l'équation du plan D_1P est $\boxed{\mathbf{x+y-\frac{2}{3}+(3u+3v-2)(z-\frac{1}{3})=0}}$

De même l'équation du faisceau des plans qui contiennent D_2 est $x+\frac{1}{3}+\mu(y+z)=0$; la condition de contenir P donne $u+\frac{1}{3}+\mu(v)=0$ soit $\mu=-\frac{u+1/3}{v}$ et l'équation du plan D_2P est $\boxed{\mathbf{v(x+\frac{1}{3})-(u+\frac{1}{3})(y+z)=0}}$.

Ces plans ne sont jamais parallèles ni confondus, et ils ont en commun le point $P(u,v,0)$.

Ils se coupent suivant une droite Δ_P, qui contient P.

solve(x+y-2/3+(3*(u+v)-2)*(z-1/3)=0,v*(x+1/3)-(u+1/3)*(y+z),x,y);

donne $x=-\frac{(3u+1)(u+v-1)}{u+v+1/3}z+u$ et $y=-\frac{3uv+3v^2-2v+u+1/3)}{u+v+1/3}z+v$. ($z=0$ donne bien le point P)

Comme prévu on vérifie (à la main ou par solve de Maple) qu'elle rencontre D_1 avec $z=\frac{1}{3}$ et D_2 avec $z=\frac{1}{9}\frac{3v+3u+1}{u+v-1}$.

Pour cherche le troisième point de rencontre de Δ_P avec la surface H, on reporte cette représentation paramétrique en fonction de z dans l'équation de H.

$H:=(x,y,z)->126*z*x+1-189*z*y^2-189*z*x^2-189*y^2*x+126*z*y-9*x^2-189*z^2*y-189*z^2*x+126*y*x-9*y^2+81*z^3-189*y*x^2+81*y^3+81*x^3-9*x+54*z*y*x-9*z-9*y-9*z^2$;

$F := H(-(9*v*u*z-3*v*u+3*v*z-6*u*z-3*z+9*u^2*z-3*u^2-u)/(3*v+3*u+1), -(9*v*u*z-3*v*u+9*v^2*z-3*v^2-6*v*z-v+3*u*z+z)/(3*v+3*u+1), z)$:

solve(F=0,z); donne, comme attendu les deux points précédents, et le troisième point sur la surface cubique (une droite la rencontre en trois points et trois points seulement) donné par :

$zc = \frac{1}{3} \cdot \frac{243u^4+54u^3-324vu^3-36u^2-1134v^2u^2+162vu^2+162v^2u-6u+72vu-324v^3u-6v-36v^2+54v^3+243v^4+1}{243u^4-324vu^3-324u^3-198u^2-1134v^2u^2+756vu^2-324v^3u-252vu+12u+756v^2u+243v^4+11-180v-324v^3+378v^2}$

Le report (avec l'utilisation de simplify de Maple) dans x et y donne aussi

$xc = -\frac{135u^4+108u^3+54u^3v+18u^2-216u^2v^2+126u^2v-4u+66uv-72uv^2-54uv^3-1-90v^3+81v^4+10v}{243u^4-324vu^3-324u^3-198u^2-1134v^2u^2+756vu^2-324v^3u-252vu+12u+756v^2u+243v^4+11-180v-324v^3+378v^2}$

$yc = -\frac{1}{3} \cdot \frac{243u^4+54u^3-162u^3v-36u^2-648u^2v^2+756u^2v-6u+126uv-378uv^2+162uv^3+1-1080v^3+405v^4-48v+594v^2}{243u^4-324vu^3-324u^3-198u^2-1134v^2u^2+756vu^2-324v^3u-252vu+12u+756v^2u+243v^4+11-180v-324v^3+378v^2}$

Ce qui constitue une représentation paramétrique rationnelle de la surface de Clebsch. Malheureusement le tracé avec Maple montre qu'il y a des bouts de plans parasites, ce qui incite à penser qu'il doit rester des facteurs parasites. Mais cette représentation semble inexploitable pour un tracé Maple, pour la raison suivante : pour u fixé, quand v varie, on passe d'une nappe de la surface à une autre d'où les parties de plans parasites !

Deuxième représentation

Voici une deuxième méthode, suggérée par Alain Esculier le 27 juin 03 après avoir reçu mon essai : Il est beaucoup plus simple de prendre les points courants $M(u)$ et $N(v)$ sur les droites D_1 et D_2 (rappel : D_1 $x+y=2/3,\ z=\frac{1}{3}$ (la troisième droite horizontale) et D_2 $x=-\frac{1}{3},\ y=-z$, la seconde droite non horizontale) et chercher l'intersection de la droite MN avec la surface, on a immédiatement la représentation paramétrique ; avantage supplémentaire, on peut prendre des droites horizontales ou non, la seule restriction est que D_1 et D_2 ne soient pas coplanaires (y compris parallèles).

C'est plus court et on peut ainsi obtenir une représention plus simple qu'avec la première méthode.

Nous menons le calcul en nous aidant de Maple :

On rappelle l'équation de la surface, et on demande que les résultats soient sans labels.

restart: interface(labelling=false);

$H := 81*x^3-189*x^2*y-189*x^2*z-189*x*y^2+54*x*y*z-189*x*z^2+81*y^3-189*y^2*z-189*y*z^2+81*z^3-9*x^2+126*x*y+126*x*z-9*y^2+126*y*z-9*z^2-9*x-9*y-9*z+1;$

On paramètre les deux droites : $M := [u, -u, -1/3]$: $N := [0, -v+1/3, v]$:

On paramètre la droite $M(u)N(v)$ au moyen du paramètre t et on cherche son intersection avec la surface :

$duv := expand(M+t*(M-N))$: $res := [solve(subs(x=duv[1], y=duv[2], z=duv[3], H), t)]$:

$para := simplify(subs(t=res[3], duv));$

On obtient alors la représentation paramétrique :

$\boxed{\mathbf{x = \frac{u(-12v+1+36v^2-36vu+108uv^2)}{(36v^2-108u^2v-36vu+108uv^2-1)}}}$ $\boxed{\mathbf{y = -\frac{1}{3}\frac{36v^2-18v+2-36vu+3u+108uv^2}{36v^2-108u^2v-36vu+108uv^2-1}}}$ $\boxed{\mathbf{y = -\frac{1}{3}\frac{324u^2v^2-6v+1-36vu+108uv^2}{36v^2-108u^2v-36vu+108uv^2-1}}}$

Troisième représentation

Ce calcul était terminé et intégré à l'article depuis plus de 5 mois, lorsqu'en fouinant sur le Web, glanant et butinant avec google et en recherchant des renseignements sur les cubiques réglées, je tombais, le 17 novembre de l'an de grâce 2003, sur des articles du mathématicien indien Abhyankar, savant conptemporain, mondialement connu pour ses travaux de dé-singularisation des variétés (le parallèle avec la renormalisation inventée par Feynmann en 1948 pour éliminer les infinis en électrodynamique quantique, serait intéressant). Après plusieurs tirs croisés sur google, pour éviter les sites réservés, qui vendent fort cher, leur accès à des articles (par exemple 198 dollards pour avoir le droit d'imprimer 30 pages), j'ai pu imprimer, sans autre frais que le papier et la consommation de mes cartouches d'imprimante, deux articles [4] de Bajaj (savant disciple et collaborateur d'Abhyankar).

Ces deux articles comprenaient des formules générales de paramétrisation des surfaces cubiques non réglées, ayant au moins deux droites non coplanaires. Le principe était le même que celui que j'avais utilisé, pour paramétrer la surface de Clebsch, ce qui fait toujours plaisir : Ces deux droites $\ell_1(u)$ et $\ell_2(v)$, étant paramétrées, on considère la sécante $P1(u)P_2(v)$ (P_i étant un point variable de ℓ_i). La sécante $P_1(u)P_2(v)$ qui coupe déja la cubique en ces deux points, la recoupe en un troisième $P(u,v)$, que l'on repère par une représentation barycentrique à points de base P_1 et P_2, sous la forme $\boxed{\mathbf{P(u,v) = \frac{a\ell_1(u)+b\ell_2(v)}{a+b}}}$.

Mais ce qui m'a le plus frappé, c'est que les valeurs de $a(u,v)$ et $b(u,v)$ étaient explicitées en fonction de l'opérateur différentiel nabla ∇. (*)

Bien sûr aucune démonstration précise n'était donnée, il fallait chercher des indices dans l'introduction, qui signalait un article [47] de Sederberg et Snoveny, qui lui même ne justifiait pas tous les calculs, article que j'ai reçu le premier décembre, avec l'impatience que vous devinez.

(*) *Opérateur bien connu des physiciens, et des mathématiciens, ainsi nommé car c'est le nom d'un instrument de musique hébraïque, qui a la forme d'un delta Δ renversé :*

on le voit sur le site http://www.rakkav.com/kdhinc/pages/instruments.htm

Il serait égoiste de ma part de vous les cacher (la réservation de certaines informations intellectuelles, qui était encore en usage par certains initiés, pourtant chargés d'une mission officielle, il y a dix ans, se réduit heureusement de plus en plus grâce à internet !).

$f(P)=0$ étant l'équation homogène de la surface cubique considérée, f étant un polynôme homogène, du troisième degré, des coordonnées homogènes de P, posons avec les notations ci dessus $s=\frac{a}{a+b}$ et $t=\frac{b}{a+b}$. $P=sP_1+tP_2$, et recherchons les paramètres barycentriques s,t de P au moyen de la condition $f(sP_1+tP_2)=0$.

L'identité de Taylor pour les polynômes de quatre variables (X,Y,Z,T) et de degré 3, donne, avec les notations symboliques classiques, et la convention d'affectation finale de sP_1 dans f et des dérivées :

$f(P)=f(sP_1)+((tP_2).\nabla)f(sP_1)+\frac{1}{2!}((tP_2).\nabla)^2f(sP_1)+\frac{1}{3!}((tP_2).\nabla)^3f(sP_1)$ soit par homogénéité des différents termes

$f(P)=s^3f(P_1)+s^2t((P_2).\nabla)f(P_1))+st^2\frac{1}{2!}((P_2).\nabla)^2f(P_1))+t^3\frac{1}{3!}((P_2).\nabla)^3f(P_1))$

Mais comme P s'écrit aussi bien tP_2+sP_1 on a aussi :

$f(P)=t^3f(P_2)+t^2s((P_1).\nabla)f(P_2))+ts^2\frac{1}{2!}((P_1).\nabla)^2f(P_2))+t^3\frac{1}{3!}((P_1).\nabla)^3f(P_2))$

Mais comme cette formule est valable quel que soit s, on a l'identification des coefficients des puissances de s : $\frac{1}{3!}(P_2).\nabla)^3f(P_1)=f(P_2)$ et $\frac{1}{2!}(P_2).\nabla)^2f(P_1)=((P_1).\nabla)f(P_2)$, ce qui donne en remplaçant dans la première formule :

$\boxed{\mathbf{f(P)=s^3f(P_1)+s^2t((P_2).\nabla)f(P_1))+st^2((P_1).\nabla)f(P_2))+t^3f(P_2)}}$

Comme $f(P_1)=f(P_2)=0$, la condition pour que P soit le troisième point de rencontre de P_1P_2 avec la surface cubique est : $st\big[s(P_2.\nabla)f(P_1)+t(P_1.\nabla)f(P_2)\big]=0$

Comme s,t ne sont pas nuls (les droites choisies ne passent pas par des points doubles), ou simplement par prolongement d'égalité par continuité, on a :

$s(P_2.\nabla)f(P_1)+t(P_1.\nabla)f(P_2)$ et l'on a (n'oublions pas que $s+t=1$)

$\boxed{\mathbf{s=\frac{(P_1.\nabla)f(P_2)}{(P_1.\nabla)f(P_2)-(P_2.\nabla)f(P_1)}\ \text{et}\ }t=\frac{(P_2.\nabla)f(P_1)}{(P_2.\nabla)f(P_1)-(P_1.\nabla)f(P_2)}}$

On peut prendre : $a=(P_1.\nabla)f(P_2)$ et $b=(P_2.\nabla)f(P_1)$, mais on remarque que d'après l'identité d'Euler $(P.\nabla)f(P)=3f(P)$ et donc $(P_2.\nabla)f(P_2)=(P_1.\nabla)f(P_1)=0$ ce qui permet les formules plus symétriques

$\boxed{\mathbf{a=(P_1-P_2).\nabla)f(P_2)\ \text{et}\ b=(P_1-P_2).\nabla)f(P_1)}}$

La troisième représentation paramétrique de la surface de Clebsch est donc

$\boxed{\mathbf{P(u,v)=\frac{[(P_1.\nabla)f(P_2)]\ell_1(u)+[(P_1-P_2).\nabla)f(P_1)]\ell_2(v)}{(P_1-P_2).\nabla)f(P_2)+(P_1-P_2).\nabla)f(P_1)}}}$

.

Il est facile de vérifier, que cela donne une représentation paramétrique rationnelle de la surface cubique, les numérateurs étant du quatrième degré en (u,v), les dénominateurs du troisième.

On peut aussi paramétrer, les surfaces cubiques en utilisant les polynômes de Bernstein-Bézier.

---

(6) Les doubles six de Schläfli :

(ou double sixain, suivant la terminologie du traducteur (Chemin) de Salmon)

Pour établir les propriétés souhaitées, il est souhaitable que l'équation de la surface cubique soit sous une forme la plus simple possible.

Dans les années 1850, Clebsch, Salmon [44] ont établi que toute surface cubique avait son premier membre qui pouvait s'écrire sous la forme dite "pentahédrale", c'est à dire comme somme des cubes de cinq formes linéaires. Malheureusement leur justification explicitée (20 équations avec 20 inconnues, "donc possible"), n'envisage pas un seul instant la possibilité d'incompatibilité. En fait, leur argumentation était implicitement cachée, derrière la théorie qu'on appelle maintenant "theory of apolarity", dont les initiateurs sont ..... Clebsch, Lasker (1904), Richmond (1902), Sylvester et Wakeford (1919). Des travaux récents (1993, 1999) de Richard Ehrenborg, Dolgachev [18] et Gian-Carlo Rota [21, 22], sont accessibles sur le Web et imprimables pour les lecteurs avides d'approfondir. C'est une théorie qui utilise les catégories, les opérateurs de dérivation et évalue le rang des matrices jacobiennes, pour utiliser le théorème des fonctions implicites.

Autrement, il nous faut donc chercher une argumentation irréfutable.

Envisageons tout d'abord un polynôme de n variables, homogène et de degré p. Le nombre de ses coefficients est (voir Comtet Analyse combinatoire tome I PUF 1970 page 25-26) est C^p_{n+p-1}. Dans le cas qui nous concerne $p=3$ et le nombre de coefficients est $C^3_{n+2}=\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{6}\begin{cases} n=1 & 1\text{ coefficient} \\ n=2 & 4\text{ coefficients} \\ n=3 & 10\text{ coefficients} \\ n=5 & 20\text{ coefficients}\end{cases}$

Or comme une forme linéaire à n variables dépend de n coefficients arbitraires, si nous voulons mettre le premier membre sous la forme de la somme de k cubes de telles formes, pour assurer les mêmes degré de liberté pour les deux membres, il faut que $k.n \geq C_{n+2}^3$. Donc $k \geq \frac{(n+2)(n+1)(n-1)}{6}$ $\begin{cases} n=1 & k=1 \\ n=2 & k=2 \\ n=3 & k \geq \frac{4}{3} \text{ Il faut prendre } k=4 \\ n=4 & k=\frac{20}{4}=5 \end{cases}$.

Dans le cas $n=4$, la forme pentahédrale assure donc, le même degré de liberté. Encore faut-il que le choix des coefficients des cinq formes linéaires $l_i = a_i x + b_i y + c_i z + d_i t$ telles que $f = \sum_{i=1}^{5} l_i^3$ soit possible. Par exemple que le jacobien des expressions des coefficients des monômes $x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta$ avec $\alpha+\beta+\gamma+\delta=3$, soit non nul, pour que nous puissions appliquer le théorème des fonctions implicites.

Maple par le programme suivant, nous aide à calculer ce déterminant d'ordre 20.

$A := sum((a[i]*x+b[i]*y+c[i]*z+d[i]*t)^3, i=1..5); A := collect(expand(A),[x,y,z,t]); B := convert(A, list)$: $Bx := map(u->coeffs(u,x), B)$: $By := map(u->coeffs(u,y), Bx)$: $Bz := map(u->coeffs(u,z), By)$: $Bt := map(u->coeffs(u,t), Bz); nops(Bt);$

$with(linalg)$: $Jac := jacobian(Bt, [seq(op([a[i],b[i],c[i],d[i]]), i=1..5)]); f :=' f'$: $for\ j\ from\ 1\ to\ 20\ do\ f[j] := [seq(Jac[j,i]/3, i=1..20)]; od;$

(le déterminant est divisé par 3^{20})

JacSimp:=array(1..20,1..20,[seq(f[i],i=1..20)]);$det(JacSimp)$; (En fait Maple V.5 patine et il faut avoir recours à un ordinateur puissant)

La seule analyse sérieuse des cas où l'équation pentahédrale est possible est dans le livre de Segré [46].

Schläfli (mathématicien Suisse rappelons le ! 1814-1895) dans une réponse manuscrite à Steiner, le 2 mai 1854, parle pour la première fois de son double-six, qui permet de mettre un peu d'ordre et de structure dans l'ensemble à priori fatras magmatique, style jeu de Mikado, des 27 droites.

Qu'est ce qu'un double-six ? c'est un ensemble de 12 droites de l'espace projectif, organisées en 6 couples (a_1,b_1), (a_2,b_2), (a_3,b_3), (a_4,b_4), (a_5,b_5), (a_6,b_6) noté, comme l'inventa, l'initia, Schläfli :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}$$

ayant la propriété que deux parmi ces douze droites sont sécantes si et seulement si elles ne sont pas placées ni dans la même ligne ni dans la même colonne.

On démontre que le nombre 6 est la valeur maximale de n tel qu'un ensemble de n couples de droites ait cette propriété.

Chaque droite du double six en rencontre exactement 5 autres.

Des doubles six articulés, animés par java, et indépendants du contexte d'une cubique porteuse, sont visibles en [51].

Vu la technicité des calculs mis en œuvre pour prouver ces résultats et ceux qui suivent et pour ne pas distraire de l'essentiel (les résultats) en les masquant, oblitérant par de longues démonstrations déja publiées et bien faites, je me contente d'indiquer où le lecteur peut trouver ces preuves— : [33], [34] p 36-41 qui s'inspire beaucoup des tableaux de [29] ; [18] p 42-59 et [19] très récents, qui utilise très subtilement la forme quadratique q, définie sur le réseau $\mathbb{Z}^7$, *associée à la matrice diagonale* $(1,-1,-1,-1,-1,-1,-1)$, *tous les doubles six correspondant à ce que l'auteur appelle une racine c'est à dire un vecteur vérifiant* $q(x)=-2$ *; l'existence des 27 droites est prouvée par celle de "vecteurs exceptionnels" c'est à dire vérifiant* $v^2=-1$ *; ; [46] p 7, 27, 35-39 ; et surtout [29] p 13-57 et enfin [30] p 94-97 qui simplifie tout (recherche des droites, des double six et points Eckardt) en utilisant une équation généralisant la forme pentahédrale, la forme hexaédrale de Coble. On peut lire aussi [49] et [50]. Le lecteur pourra trouver le détail sur les points Eckardt en [52] p 7, [34] p 20 et [18] p 101-103.*

Les plans $P_{i,j}$ (on peut aussi le noter $a_i b_j$) contenant deux droites a_i et b_j avec $i \neq j$ et $i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}$, coupent la cubique suivant une droite, puisque la section totale d'un plan et de la surface cubique, doit être du troisième degré. Appelons là momentanément la droite D. De même le plan $P_{j,i}$ (distinct du plan précédent, puisque par exemple a_i et a_j ne se coupent pas) recoupe la surface cubique suivant une droite D'. Mais $P_{i,j} \cap P_{j,i}$ est une droite D", qui est aussi sur la surface cubique, car elle la coupe en 4 points distincts (les deux respectifs avec a_i et b_j, et les deux, distincts des deux précédents à cause de la propriété de double six (a_i ne rencontre pas a_j ni b_i). Par transitivité $D = D' = D$".

Ainsi la droite que nous noterons $D_{i,j} = a_i b_j \cap a_j b_i$ est à la fois la droite d'intersection de la surface cubique avec le plan $a_i b_j$ et avec le plan $a_j b_i$ ce qui à priori n'était pas évident. (faire une figure)

Il y a autant de telles droites qu'il y a de façons de choisir deux indices distincts i et j dans $\{1,2,3,4,5,6\}$, soit $C_6^2 = 15$. Avec les 12 du double six initial noté $N = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}$, cela fait $12+15=27$. Un seul double six permet de déterminer les 15 droites restantes.

Remarquons qu'un plan tel que a_ib_j est "tritangent" (c'est ainsi que nous le qualifierons désormais) car une droite étant sa propre tangente, il est tangent à la surface cubique en $a_i \cap b_j$ mais aussi en $a_i \cap D_{i,j}$ et $b_j \cap D_{i,j}$. *(faire une figure, ou aller voir les sites d'Esculier et de Ferréol qui en ont fait de magnifiques !)*

On démontre qu'il existe une seule surface cubique contenant les 12 droites d'un double six , et les 27 droites de cette surface sont les 12 droites du double-six plus les 15 droites $D_{i,j}$ définies ci-dessus.

Occupons nous maintenant de mettre en évidence toutes les relations d'incidence pour en déduire tous les double six qu'on peut extraire des 27 droites.

Chaque droite, parmi ces 27 en rencontre exactement 10 autres :

- Chaque droite $D_{i,j}$ est sécante avec les 4 droites a_i, a_j, b_i, b_j, et avec les $C_4^2 = 6$ droites $D_{k,\ell}$ avec $k < \ell \in \{1, ..., 6\} - \{i, j\}$.
- Chaque droite a_i est sécante avec 5 droites b_j et les 5 droites $D_{i,j}$.

Il existe donc dans l'eikosiheptagramme 36 double-six (et seulement 36) et ils se déduisent les uns des autres de la façon suivante :

Il y a N bien sûr et les $C_6^2 = 15$ $N_{i,j}$ qui sont dits "syzygétiques" à N et les $C_6^3 = 20$ $N_{i,j,k}$ qui dont dits "azygétiques" à N, définis ci-après :

$N_{i,j} = \begin{pmatrix} a_i & b_i & D_{j,k} & D_{j,\ell} & D_{j,m} & D_{j,n} \\ a_j & b_j & D_{i,k} & D_{i,\ell} & D_{i,m} & D_{i,n} \end{pmatrix}$ (N et $N_{i,j}$ en syzygie ont 4 droites en commun a_i, a_j, b_i, b_j)

et

$N_{i,j,k} = \begin{pmatrix} a_i & a_j & a_k & D_{m,n} & D_{\ell,n} & D_{\ell,m} \\ D_{j,k} & D_{i,k} & D_{i,j} & b_\ell & b_m & b_n \end{pmatrix}$ (N et $N_{i,j,k}$ en azygie ont 6 droites en commun $a_i, a_j, a_k, b_\ell, b_m, b_n$)

ℓ, m, n étant imposés par les contraintes d'incidence (et de non incidence) imposées par la définition des double-six, dès que les droites a_i et b_j sont choisies.

Parmi tout cet ensemble de points de rencontre (il y en a 135, des tables sont dans [34] et surtout [29] p 23) des 27 droites, il peut en exister qui sont "triples" c'est à dire de rencontre de trois droites (qui sont forcément dans le plan tangent à la surface cubique, au point considéré). On les appelle les points "Eckardt" et on peut démontrer qu'il y en a au maximum 10 et que la surface de Clebsch est la seule qui en ait exactement 10.

Un complément intéréssant serait de faire un programme Maple, qui donne les numéros des droites et leurs équations et les place en légende adjacente à leur tracé et qui détermine tous les double-six comprenant une droite donnée par ses équations, et toutes les 15 droites complémentaires, et les coordonnées des points Eckardt.

Il y a encore beaucoup de propriétés que le lecteur peut découvrir dans les références que j'ai données, par exemple : il y a 120 façons de choisir 9 droites parmi les 27 de façon à ce que l'équation de la surface cubique s'écrive sous la forme $y_1y_2y_3 = z_1z_2z_3 = 0$, où les y_i, z_i sont des formes linéaires, et 23 sortes de surfaces cubiques, selon le classement de leurs diverses singularités.

On peut encore montrer qu'il y a 216 paires de droites non coplanaires, 45 plans tri-tangents, 120 triplets de double-six azygétiques et 270 paires de double-six en syzygie.

C'est fini ? Non car cerise sur le gateau, Luigi Cremona a été le premier (en 1877 Math annalen XIII) à établir un lien entre le double six et "l'hexagramme mystique" cette configuration de six cordes d'une ellipse, qui est l'objet du théorème de Pascal. Vous trouverez tout cela dans [56] p 139, [34] p 26, et surtout dans [29].

Petite annecdote au sujet de l'hexagramme mystique : un petit monument le représentant avait été érigé en 1962 place Edmond Lemaigre, pour fêter le tricentenaire de Blaise Pascal en sa ville natale de Clermont-Ferrand. *(Il était même la destination d'expiation pour de jeunes hypotaupins.)* Suite à des travaux d'aménagement, il fut déposé dans les années 90. Perdu ? non ! il se trouve actuellement entreposé au dépôt "La Charme" des services techniques de la ville, en attente d'un emplacement digne de lui (en 2062 ?) et à l'abri des irrévérences canines..... Le problème de Capes interne 1991 étudie les propriétés de l'hexagrame "mystique", ainsi qu'un article de Rideau dans Quadrature 51.

Il faut savoir aussi, que théorème de Pascal, et double six ont également un lien avec le théorème d'alignement de Pappus, qui depuis Artin équivaut à la commutativité dans le corps utilisé.

---

(7) Lien avec la théorie des groupes :

Puisque, comme nous venons de le voir, un double six décrit le comportement d'incidence des droites, le groupe symétrique d'ordre six, opère par permutations sur un double six en échangeant les colonnes, et en préservant les intersections mutuelles. Comme il y a 36 double dix, le groupe des automorphismes opérant sur les 27 droites de la surface cubique considérée est de cardinal $6!.2.36 = 51840 = 2 * 25920$.

Ce groupe est aussi le groupe de Weyl $W(E_6)$, pour cela voir [27] et [30].

Un algébriste, nous intéresserait en expliquant pourquoi la géométrie symplectique intervient dans cette question des 27 droites : notant $PSp_n(\mathbb{K})$ ou $(PSp(2r, \mathbb{K})$ le groupe projectif symplectique, quotient du groupe $Sp_n(\mathbb{K})$ par son centre, on constate qu'ils sont simples à l'exception de $PSp_2(F_2)$, $PSp_2(F_3)$ et $PSp_4(F_2)$.

Et justement ce dernier groupe $PSp_4(F_2)$ qui est d'ordre 25920 est le groupe des 27 droites d'une surface cubique non réglée ! (La première ligne $E_1, ..., E_6$ d'un double six étant donnée, il y a 27 choix pour E_1, 15 pour E_2, 10 pour E_3, 6 pour E_4, 2 pour E_5 et 1 pour E_6 soit l'ordre de G est $27.16.10.6.2 = 51840 = 2 * 25920$. (Il y a 25920 isométries positives et 25920 isométries négatives)

(Un groupe G est dit simple, s'il n'a pas d'autres sous groupes H distingués (gHg^{-1} reste dans H quel que soit $g \in G$), que lui même et $\{1\}$)

(8) Conclusion :

Paléo-mathématiques, sujet exotique ? thème désuet ou dépassé ? que nenni ! D'une part l'intervention du groupe célèbre $PSp_4(F_2)$, d'autre part des travaux récents (de Naschie en 2001 [51]) sur la théorie heterotic des cordes (sorte de théorie des hyper-cordes) tendant à donner une modélisation universelle de l'univers et de l'espace temps, montrent qu'il n'en est rien. Voir aussi [30] pour un "gem of the modular universe".

Sans entrer dans le détail, Naschie a montré que la dimension de Haussdorff (dimension fractale), du champ des cordes hétérotiques était $D^- = 26.18033989$. Et comme 27 est la dimension entière la plus proche et supérieure, une modélisation a fait le parallèle entre l'espace temps et l'algèbre des 27 droites d'une surface cubique, d'autant que pour un double six de Schläfli les 15 droites complémentaires rencontrent quatre lignes du double six, d'où un parallèle avec les quatre dimensions de l'espace temps !

Même les surfaces réglées sont d'actualité, avec l'utilisation de l'intersection de telles surfaces pour le tracé graphique par ordinateur. Ceci dans les notions de "ray tracing" méthode issue du "Computer Aided Graphic Design" du rendu des tracés en trois dimensions : on imagine un point d'où partent les rayons lumineux et un point où se trouve l'oeil de l'observateur, on suit chaque rayon émis, on calcule la façon dont il se reflète sur les obstacles, cela permet de rendre de manière réaliste les effets lumineux : reflets, influence d'une couleur sur une autre, moiré,.... Et donc dans l'infographie qui a de multiples applications (jeux vidéo, conception assistée par ordinateur, dessins animés (synthèse d'image), visualisation d'une cuisine, de l'intérieur d'une voiture, d'un immeuble, d'un grand projet (tracé d'autoroute,...), de son impact sur l'environnement ; le tout avant leur réalisation, et sans faire appel aux maquettes, visualisation de molécules, de la façon dont elles intéragissent,...)

La surface de Clebsch et les points Eckardt interviennent aussi récemment en addition et conservation des moments angulaires en théorie des semi-conducteurs, en injection du spin dans les métaux ferromagnétiques comme le Gallium nitride. Et grace au théorème de Wigner-Eckardt en spectroscopie et mécanique tensorielle et quantique.

Rappelons que dès 1887 Jordan établit le lien entre le groupe des 27 droites et la trisection des fonctions hyper-elliptiques, l'équivalence entre les deux problèmes étant montrée par Klein en 1887.

(9) Annexe I : Problèmes soulevés :

Georges VALIRON (Major d'Agrégation 1908) disait : "chaque problème résolu en soulève deux autres". Il n'est donc pas à craindre que la recherche s'arrête par épuisement des sujets ! Cette évidence est se confirme avec les questions que soulèvent ce travail.

Voici quelques unes des questions qui viennent à l'esprit en écrivant cet article.

- Trous D'évidence la surface de Clebsch (Hunt ou Todesco) a visuellement quatre trous (hole) un central et trois latéraux (voir figure) : comment le justifier ? Comment intervient le degré de l'équation ? comment interviennent les coefficients ? Le genre (nombre de trous) d'une surfaces algébrique, non bornée s'exprime t-il en fonction du degré ?

(Voir la théorie de Morse (théorème de Morse est un cas particulier de celui de Hopf lui même des résidus) ; Apéry dit que $\chi(S) = 2-2t$, encore faut-il calculer la caractéristique d'Euler Poincaré de la surface de Clebsch : Par la formule de Gauss-Bonnet pour une sous-variété compacte X de dimension d on a $\int_X K_d(X)\delta = \chi(X).VolumeS^{n-1}$; Voir Berger 153 297, Gramain, Godbillon, 185, rapport d'Agreg 1975, Rideau 21, Delachet Que sais-je la géométrie comptemporaine p 117 ; Lehmann 339 ; Cours de géométrie algébrique de Dieudonné (PUF 1974) p 169-208 ;

Vu les grands noms de mathématiciens intervenant et les théories en jeu dans cette théorie et citées dans le dernier ouvrage à propos de ce problème du genre, il n'est pas étonnant que ce problème ne soit ni simple ni évident : Leray, Weil, Kodaira, Hodge, Severi, Zariski, Cartan, Serre, Dolbeault, Spencer, Hirzebruch, Thom, Todd, Eger, Enriques, Picard, Castelnuovo, Grotendieck, Attiyah-Singer, Nœther, Krull, Chevalley, Borel, Cartier, Uzkov ; Théorie des Faisceaux et des schémas ; Théorème de Riemann-Roch, Variétés, cohomologie, espace fibré, diviseurs, dualité de Poincaré, Classes de Chern, caractéristique d'Euler Poincaré, Nombres de Betti, invariants, cobordisme, suite exacte, plurigenre, défaut, catégories, foncteurs, K-théorie, groupes semi-simples, Théorème des zéros de Hilbert, idéaux maximaux, topologie étale, localisation ;

On a même la surprise en tapant "hole of surface avec google de tomber sur l'entropie de Schwarzchild, mathématicien, astrophysicien, dont le nom m'avait été signalé dans un remarquable article du Monde - ((*) note : du temps où ce quotidien publait des synthèses scientifiques de qualité, "bandes d'intellectuels allez lire" le monde criaient les badauds aux manifestants de 1958) dont l'auteur était James Lequeux, du six août 1964 page 7 - qui a calculé le rayon des trous noirs ($R_S = \frac{2MG}{c^2}$) et (Chandrasekar lui a calculé le seuil d'effondrement (entre 0.8 et 2 masses solaires) à partir duquel une étoile peut devenir naine blanche).

Tout en lisant les livres ou articles consacrés à cette théorie et les grands noms rencontrés, on a vraiment l'impression d'être en altitude avec les Albatros... Abel, Bézier, Borel, Cayley, Coxeter, Cremona, Enriques, Falting, Fischer, Galois, Gödel, Gröbner, Grotendiek, Hadamard, Heine, Hilbert (et son théorème Nullstellensatz), Hunt, Jacobi, Jordan, Klein (et son programme d'Erlangen, de recherche des invariants et des symétries), Kronecker, Kummer, Lie, Lüroth, Munford, Noether, Picard, Plücker, Ramanujan (pour Diophantienne de degré 3), Reid, Rieman, Roch, Rye, Salmon, Serret, Shafarevich, Steiner, Sylvester, Veronèse, Waerden, Weierstrass, Weil, Zariski...

On rencontre aussi des notions importantes : syzygies (Hunt p 85), covariance, fonctions theta, modulaire, elliptique,....

- composantes pentahédrales définition précise, simple, élémentaire crédible et générale.....
- Changement de composantes projectives Raison et technique des choix de Hunt, Todesco, Ferrarese, pour rejeter à l'infini certains points singuliers, pour occulter ou créer des points doubles, pour faire apparaître des symétries, pour modifier forme (dont les trous) ?
- Clebsch particularités de la surface de Clebsch qui explique son choix et son intérêt (voir articles imprimés sur le web) (page 95 du chapitre 4 du cours en ligne de Hunt : c'est parce qu'elle est la seule surface cubique avec exactement 10 points Eckardt)
- 3, 7, 15 ou 27 droites Pourquoi ce saut de nombre de possibilités de droites (Juel, Segre 1942, Le Lionnais 1983).
- Rôle de Crémona (prénom Luigi sic) p 87 et note p 95 du cours chapitre 4 de Hunt (corollaire 4-1-11) ; Crémona est aussi célèbre par sa double génération (qui sert en théorie des engrenages) des courbes trochoïdales.
- cubiques réglées Pourquoi les seules cubiques réglées sont $ZX^2 - TY^2 = 0$ et $Z^3 + X(XZ + YT) = 0$.
- équation aux dérivées partielles des surfaces réglées Trouver s'il existe et si oui l'exprimer une équation différentielle des nappes réglées (ruled). La seule avancée tangible et précise que j'ai trouvée est dans le dictionnaire EDM 17-E (invariants of Algebraic surfaces) page 65 seconde colonne qui dit après les nombres de Betti et un travail de Serre (exemple de surface algébrique telle que $h^{0,1} \neq h^{1,0}$) (Médaille Fields 1954 et prix Abel 2003), qu'une surface réglée est telle que $P_n = 0$ et $P_{12} = 0$ d'après un théorème de Enriques-Kodaira-Safarevic.

Monge en 1850 a obtenu une équation différentielle $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ des surfaces réglées des sculpteurs (à cause du coup de ciseaux) : $z = xF(\frac{y}{x}) + G(\frac{y}{x})$. (Voir par exemple le premier site obtenu en cherchant par google : partial differential equation ruled surfaces).

Dans le cours de l'École Polytechnique (des majuscules forcément) de Jacques Chapelon (cité d'ailleurs dans le livre de Schwartz, un mathématicien aux prises avec le siècle) 2ème division 1948-1949 page I.38 est donnée l'équation aux dérivées partielles des surfaces réglées $z = f(x, y)$, admettant le plan (x, y) comme plan directeur. Elle est (notations de Monge) $\boxed{\mathbf{q^2r - 2pqs + p^2t = 0}}$; En faisant le changement de variables $X = z, Y = x, Z = y$, ce qui revient à chercher la surface sous la forme $y = F(z, x)$, cette équation devient $T = \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$, ce qui donne $y = C_1(z)x + C_2(z)$.

Dans son monumental "traité de géométrie analytique à trois dimensions" seconde partie, édité par Gauthier Villars en 1892, après avoir été traduit de l'anglais par O. Chemin, page 223-224, Salmon, propose la méthode suivante pour trouver "l'équation différentielle générale des surfaces réglées (c'est à dire des surfaces engendrées par le mouvement d'une ligne droite) :

Les équations de la droite génératrice sont $z = c_1x+c_3$, $y = c_2z+c_1$ et la famille de surfaces s'esprime en remplaçant c_2, c_3, c_4 par des fonctions arbitraires de c_1. En différentiant, nous avons $p+mq = c_1$, $m = c_2$. Différencions la première de ces équations (m est constant d'après la seconde), nous avons : $r + 2sm + tm^2 = 0$".

(On utilise les notations dites de Monge : $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}, r = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, s = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, t = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$)

"Comme cette expression renferme encore m ou c_2, dont nous ne connaissons pas l'expression en fonction des coordonnées, nous devons différentier à nouveau, ce qui nous donne : $\alpha + 3\beta m + 3\gamma m^2 + \delta m^3 = 0$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont les dérivées troisièmes.

En éliminant m entre les équations du deuxième et du troisième degré en m (NDT : par exemple au moyen du résultant de Sylvester), on a l'équation différentielle partielle cherchée." fin de la reproduction du paragraphe du livre de Salmon).

- Passage d'un système de double six à un autre Voir Salmon p 403 et Hunt.
- Couple de droites idéal pour la représentation paramétrique Parmi les 27 droites, quels couples de droites non coplanaires, faut-il choisir pour avoir la meilleure représentation paramétrique (meilleure = plus simple, plus

symétrique, sans simplification parasite...)

- Nombre de couples de droites coplanaires, non coplanaires ; nombre de triplets de droites coplanaires ;
- Parasitisme de la représentation paramétrique pourquoi le tracé par Maple de la nappe obtenue (représentation paramétrique) donne tant de bouts de plans parasites ?
- surface porteuse Comme une question de W7 en UPS 1980, (une biquadratique étant donnée, est-elle l'intersection de deux quadriques) 27 droites étant données, existe-t-il une surface du troisième degré porteuse ?
- Tracés informatiques Il serait intéressant de savoir comment (quels algorithmes ? quels programmes) font les informaticiens qui donnent des représentations sur le web pour faire apparaître toutes les droites sur la surface. Quelles est la gestion, la périodicité des numérotations différentes des solutions données par Maple dans les programmes d'Esculier, permettant de trouver les équations des 27 droites et les points Eckardt et les différents double six.
- Taylor dans la paramétrisation Au moment de la paramétrisation générale utilisant l'opérateur nabla ∇, on a vu apparaître une expression particulière de la formule de Taylor, dans le cas d'un polynôme homogène de degré 3. Cette forme particulière est-elle généralisable, et sous quel aspect, pour des polynômes de degré supérieur et même pour la partie régulière dans le cas de fonctions de classe suffisante ?
- Apparition de trou et droite simple Dans la classification d'Abhyankar, à une transformation projective près on peut (hors des cas coniques) se ramener aux deux types de surfaces cubiques réglées : $F_3 : y^3 + xy + zx^2 = 0$ et $F_4 : y^3 + xy + zx^2 + y^2 = 0$: pourquoi le simple rajout de y^2 dans le premier membre, modifie tellement, d'une part le nombre de trous qui passe de 0 à 1 et le nombre de droites simple d'appui des génératrices, qui passe aussi de 0 à 1 ?
- Ligne de striction Comment rechercher la ligne de striction d'une surface réglée connue par son équation implicite ?
- Ligne de striction et ligne double Y-a-t-il un lien entre la ligne de striction d'une cubique réglée et sa ligne double ? Si oui (c'est vrai pour les conoides de Plücker, Zindler, Whitney), comment le démontrer, sans trop de calculs ?
- Particularités des points de l'arête de rebroussement d'une surface développable, sur cette surface : multiplicité, singularité ?

---

(10) Annexe II : Mini Glossaire :

Pour faciliter la lecture, au lecteur non mathématicien, voici un petit glossaire des principaux termes rencontrés. Tout dictionnaire de Mathématiques ou index de bon cours de mathématiques spéciales contient les termes courants utilisés dans cet article, mais non rappelés dans ce glossaire.

- **analytique :** Une fonction définie dans un ouvert D de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, est dite analytique dans D si elle est développable en série entière en tout pour x_0 de D. Une courbe ou une surface sont dites analytiques, si les coordonnées de n'importe lequel de leurs points, sont des fonctions analytiques d'un ou deux paramètres respectivement.
- **arête de rebroussement :** les plans tangents le long des génératrices d'une surface réglée, dépendent de deux paramètres celui du point de la génératrice sur la courbe directrice, et celui du point considéré sur cette génératrice. Lorsque le plan tangent est invariant le long de cette génératrice, la surface réglée est dite développable, et on démontre que les génératrices sont tangentes à une courbe appelée arête de rebroussement. Lorsque la surface développable est un cône ou un cylindre, cette courbe est réduite à un point éventuellement rejeté à l'infini.
- **Clebsch :** Surface de Clebsch, surface dont l'équation en coordonnées pentahédrales (voir ce mot) est $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x^5 = 0$ avec $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$; On a donc son équation en coordonnées homogènes (x_1, x_2, x_3, x_4) ; Différentes autres équations, apparaissant ici, s'en déduisent par des transformations homographiques. Son intérêt provient de ce qu'elle porte 27 droites réelles, et est la seule des cubiques non réglées, ayant 10 points Eckardt réels.
- **cône :** de sommet le point S et de directrice une courbe (C) : surface engendrée par les droites (appelées génératrices du cône) astreintes à contenir S et à s'appuyer sur (C).
- **conoïde :** d'axe Δ, de plan directeur (P), sécant à l'axe, de courbe directrice (C) : surface engendrée par les droites (appelées génératrices du conoïde) astreintes à rester parallèles à (P), à rendontrer Δ et à s'appuyer sur (C). Un conoïde est dit droit, si la direction de Δ est orthogonale à celle de (P). Il est dit de Plûcker si la courbe directrice est une ellipse dans un plan sécant à Δ et à (P). On le rencontre souvent en mécanique, à cause de la théorie de l'axe central du torseur des vitesses d'un solide. (voir ces derniers mots sur le web ou dans un livre de spéciales des années 1960).
- **Cubique :** (surface cubique) surface du troisième degré, c'est à dire dont l'équation ne comprend que des termes de degré ≤ 3, par rapport aux coordonnées x, y, z.
- **Cyclide de Dupin :** surface du quatrième degré, enveloppe des sphères tangentes à trois sphères fixes données.

• **Cylindre :** de direction le vecteur non nul u et de courbe directrice (C) : surface engendrée par les droites astreintes à être parallèles à u et à rencontrer (C) ; en géométrie projective, c'est un cône dont le sommet est le point à l'infini de la direction u.

• **Développable :** une surface réglée développable est une surface telle que pour toute génératrice, le plan plan tangent est le même en tout point de cette génératrice. Cône, Cylindre sont des surfaces développables. Outre ces cas, une surface développable est engendrée par les tangentes à une courbe, appelée arête de rebroussement de la surface. (si la courbe est plane, la surface développable est tout ou partie d'un plan).

• **Double six :** C'est un ensemble de $12 = 2 * 6$ droites, plus précisément de 6 couples de droites (a_i, b_i) prises parmi les 27 de la surface cubique (non réglée) disposées de la manière suivante $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}$, telles que a_i ne rencontre pas a_j pour $i \neq j$, a_i ne rencontre pas b_i, mais a_i rencontre b_j pour $i \neq j$. Cette dénomination a été faite par Schläfli ; Il y a 36 doubles six sur la cubique, la donnée d'un seul permettant de construire tous les autres. Salmon employait le terme "double sixain" terme de casino, plus approprié que double six, qui est un terme de jeu de dominos !

• **Eckardt :** Points Eckardt d'une surface cubique non réglée : points où trois droites situées sur la cubique se rencontrent. (elles ne sont pas toutes sécantes). Par exemple pour une cubique comportant 27 droites il n'y a que 10 points Eckardt. Le plan tangent en un tel point est "tritangent", il coupe la surface suivant les trois génératrices qui contiennent le point Eckardt de contact. Ces points ont été généralisés par Cheltsov (utiliser google). Les seuls renseignements dont nous disposons sur l'auteur sont dans le dictionnaire Poggendorf : Friedrich Emil Eckardt (Chemnitz 1844 - Chemnitz 1875) ; un article parvenu à Pâques 1875, édité en 1876 est cité dans la bibliographie de Karen Smith. C'est beau de laisser un nom à la postérité juste la dernière année de sa vie ! Un portrait et une biographie semblent introuvables, même par le Web.

• **Hexagramme Mystique :** expression employée pour désigner l'hexagone dont les six sommets sont sur une conique et qui fait l'objet du théorème de Pascal (voir ce nom).

• **Homogènes :** coordonnées (X, Y, Z, T) liées aux coordonnées ordinaires (x, y, z) par $x = \frac{X}{T},\ y = \frac{Y}{T},\ z = \frac{Z}{T}$. $X = kx,\ Y = ky,\ Z = kz,\ T = k)$; Elles sont introduites pour permettre le traiter les points à l'infini $(T = 0)$ comme des points ordinaires. Pour définir un point le quadruplet (X, Y, Z, T) doit être différent de $(0, 0, 0, 0)$.

• **ordre :** d'une courbe ou d'une surface : nombre maximum de points d'intersection réels de la courbe ou de la surface avec une droite quelconque. Lorsque la courbe ou la surface sont algébrique c'est à dire dont l'équation est respectivement $f(x, y) = 0$ ou $f(x, y, z) = 0$, avec f polynômiale. Ordre d'un déterminant : nombre de ses colonnes ou de ses lignes (sa matrice est carrée) ; l'ordre d'un groupe fini est le nombre de ses éléments.

• **Pappus :** Théorème de Pappus (vers l'an 300) : cas particulier du théorème de Pascal, lorsque la conique est décomposée en deux droites concourantes.

• **Pascal :** Théorème de Pascal (1640) : les trois points d'intersection des cotés opposés d'un hexagone inscrit dans une conique sont alignés sur une droite (appelée droite de Pascal). La figure obtenue est appelée hexagramme Mystique.

• **pentahédrale :** Coordonnées introduites par Sylvester, permettant d'écrire l'équation d'une surface cubique réglée, sous la forme $a_1x_1^3 + a_2x_2^3 + a_3x_3^3 + a_4x_4^3 + a_5x^5 = 0$ avec $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$, les x_i étant des coordonnées projectives. Dans le cas de cubique à 27 droites ce type d'équation est toujours possible. Segré montré, que dans le cas d'autres cubiques, ceci n'était pas toujours possibles, contrairement aux affirmations de Sylvester, Cayley, Clebsch, Salmon : 20 équations en les 20 coefficients des x_i en les coordonnées homogènes, "donc" toujours possible. (sans souci de compatibilité).

• **Plückeriennes :** coordonnées plückeriennes d'une droite D : (a, b, c) étant les composantes d'un vecteur directeur V de D dans un repère orthonormé, et $OK = OM \wedge V$ le moment en O du vecteur "glissant" (D, V), M étant un point quelconque de D. OK ayant pour composantes (l, m, n) le sextuplet (a, b, c, l, m, n) est appelé système de coordonnées plückériennes de la droite D. Il est défini à un facteur multiplicatif, non nul, près. Si la droite est définie par deux points, dont on connait les coordonnées homogènes, ou projectives $M = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ et $M' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{bmatrix}$ et si on leur associe les déterminants $p_{i,j} = \begin{vmatrix} x_i & x'_i \\ x_j & x'_j \end{vmatrix}$, on constate $p_{i,j} + p_{j,i} = 0$, par antisymétrie du déterminant. Les six nombres $p_{1,4},\ p_{2,4},\ p_{3,4},\ p_{2,3},\ p_{3,1},\ p_{1,2}$, s'appellent les composantes ou coordonnées plückériennes de la droite MM'.

• **Point critique** d'une surface d'équation $f(x, y, z) = 0$, f étant de classe C^1 dans un ouvert de $\mathbb{R}^3$: point qui vérifie $f'_x = f'_y = f'_z = 0$.

• **projectives :** On définit des coordonnées projectives (X', Y', Z', T') à partir des coordonnées homogènes

(X, Y, Z, T), par $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ T' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix}$, la matrice M d'ordre 4 étant régulière c'est à dire de déterminant non nul. Elles permettent de considérer tous les points, sans particulariser les points à l'infini. Le tétraèdre de référence correspondant est défini par les plans $X' = 0, Y' = 0, Z' = 0, T' = 0$. Transformation homographique ou projective : transformation caractérisée par la matrice M permettant de passer des coordonnées homogènes, ou projectives initiales (X, Y, Z, T), à d'autres composantes projectives (X', Y', Z', T').

• **Réglée :** une surface est dite réglée si elle peut être engendrée par des droites, cônes, cylindres, conoïdes, sont des surfaces réglées.

• **Striction :** Ligne de striction d'une surface réglée ; On démontre que le plan tangent en un point P d'une génératrice d'une surface réglée non développable, tourne autour de cette génératrice, lorsque P décrit cette droite. La position à l'infini s'appelle le plan asymptote ; il existe un point dit point central de la génératrice où le plan tangent est perpendiculaire au plan asymptote. Le lieu du point central s'appelle la ligne de striction de la surface réglée. La nappe réglée étant définie par $P(u, v) = M(u) + v\ell(u)$, le paramètre v_c du point central de la génératrice associée $g(u) = (M(u), \ell(u))$ est défini par $v = -\frac{M'(u).\ell'(u)}{||\ell'(u)||^2}$. La ligne de striction est le lieu du $P(u, v_c)$. Dans le cas des surfaces réglées algébriques de degré ≥ 3, une question ouverte, semble t'il, est de savoir le lien entre la ligne de striction et la ligne double.

• **Symplectique :** (géométrie, automorphisme, espace vectoriel) : Un espace vectoriel est dit symplectique, s'il est muni d'une forme bilinéaire alternée (ou antisymétrique si le corps n'est pas de caractéristique 2) non dégénérée. Un espace euclidien lui est tel que la forme bilinéaire associée est définie (0 est le seule vecteur dont le carré scalaire est nul) positive $(x.x \geq 0)$.

• **Syzygies :** D'un mot grec qui signifie "réunion" : (notion introduite par par Sylvester en 1853, généralisée et clarifiée par Hilbert en 1890, puis par Serre) ; en astronomie une syzygie est une conjonction ou opposition d'une planète avec le Soleil, par rapport à la terre ; Trois points sont en syzygie s'ils sont alignés. Sylvester parlait de syzygetic ou d'azygetic pour des paires de doubles six : un double six donné est zyzygetic à 15 doubles six et azygetic pour les 20 autres. Pour une définition plus précise voir les dictionnaires de mathématiques EDM ou Bouvier, George, Le Lionnais.

---

(11) Annexe III : BIBLIOGRAPHIE et RÉFÉRENCES (*)

[1] S. Abhyankar memoirs of the college of science, university of Kyoto, series A, Vol. XXXII. Mathematics No. 3, 1960. Cubic surfaces with a double line.

[2] Aubonnet et Guinin, exercices d'oraux crus 86-87 (Bréal 87) p 252-253 et les grands classiques (Bréal 1989) p 329-330.

[3] Aubonnet, Joppin et Guinin, exercices d'oraux crus 85-86 (Bréal 86) p 293, 295.

[4] Bajaj, Holl, Netravali : rational parametrization of real cubic surfaces p 1-29.
Rational parametrization of non-singular cubi surfaces p 1-32 :
tous deux accessibles par le web : http://citeseer.nj.nec.com.54958.html
et http://www.ices.utexas.edu/CCV/papers/cubictog.pdf
et http://citeseer.nj.nec.com/bajaj98rational.html

[5] Becirspahic et Loiseau : L'oral de mathématiques 1995-1996 (Bréal 1996) p 227-228.

[6] M. Berger, B. Gostiaux : géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces (PUF 1992) p 411.

[7] Bouligand mathématiques par les problèmes (Vuibert 1962) p 523 ;

[8] Bouvier, George, Le Lionnais : dictionnaire des mathématiques (PUF 1993)
(entrée Juel, Symplectique, cubique, eikosiheptagramme)

[9] J. Brette et F. Le Lionnais : Les nombres remarquables (Hermann 1983) p 83.

[10] J.W. Bruce, C.T.C. Wall : on the classification of cubic surfaces ; J. London Math. Soc. (2), 19 (1979) p 245-256.

[11] M. Brundu, A. Logar : classification of cubic surfaces with computational methods :
Mathematics Subjects Classification (1991) ; 45 pages accesibles sur le Web.

[12] M. Brundu, A. Logar : parametrization of the orbits of cubic surfaces :

(*) *Les lecteurs qui désirent le source d'une bibliographie moins sèche, moins formatée, moins impersonnelle, moins froide, moins technocratique, plus vivante, plus argumentée, plus détaillée, plus commentée, classifiée, originale, novatrice, plus universelle puisque l'ordre alphabétique des références n'est pas perturbé d'un article à l'autre (comme dans les livres de Barth, Berger, Hunt, Reid (article), Brundu, Gonnord, Karen E. Smith, Gazette janvier 2004 article de Chenciner) qui précèdant les noms des auteurs par deux ou trois lettres entre crochets, caractéristiques du patronyme l'auteur), alors qu'un numéro dans l'ordre d'apparition dans l'article l'est, avec un zeste de fantaisie et d'humour et de poésie, la référence précise de tous les documents trouvés sur sites, peuvent me le demander.*

Transformation Groups vol 3, num 3, 1998 ; 31 pages accessibles par le web.
[13] B.W. Char, K.O. Geddes, G.H. Gonnet, M.B. Monagan, and S.M. Watt. Maple V user's Guide (Watcom Publications Limited, Waterloo, Ontario, 1990).
[14] G. Chevet : site http://www.saliege.com/dynamique/clebsch/cleb.html (animation en java de la surface de Clebsch).
[15] Commissaire et Cagnac : cours de mathématiques spéciales tome 2 (Masson 1955) p 391.
[16] F. Coray, I. Vainsencher : enumerative formulae for ruled cubic surfaces and rational quintic curves. Document accessible sur le web
[17] A. Delachet : la géométrie contemporaire (PUF 1965) p 119-121.
[18] I.V. Dolgachev et A. Verra : Topics in classical Algebraic Geometry ; 180 pages sur le web 13-12-2003 p 47-64 et 7-14 (apolarity) et 23-29.
[19] I.V. Dolgachev et A. Verra : Topics in classical Algebraic Geometry Part I ; 187 pages sur le web le 13-01-2004. http://www.math.Isa.umich.edu/∼idolga/topics2.pdf
[20] J. Dollon : Problèmes d'Agrégation (mathématiques spéciales) (Vuibert 1956) p 103-113 : problème d'Agrégation 1929 : surface cubique réglée.
[21] R. Ehrenborg : On apolarity and generic canonical forms : Journal of Algebra 213, 167-194 (1999) ; documment accessible sur le web.
[22] R. Ehrenborg, G.C. Rota : Apolarity and canonical forms of homogeneous polynomials : Erop. J. Combinatorics (1993) 14, 157-181 ; document accessible sur le web : http://www.ms.uky.edu/∼jrge/
[23] A. Esculier : site (avec tous les renseignements pour l'usage du logiciel libre Povray et les animations et calculs de double six) *http : //aesculier.chez.tiscali.fr/*
[24] J. Favard : cours de géométrie différentielle locale (Gauthier Villars) p 201.
[25] R. Ferreol : site http://www.mathcurve.com/surfaces/clebsch/clebsch.shtml
[26] G. Fischer : MATHEMATISCHE MODELLE (Vieweg 1986) : tome 1 p 10-12 et 85 ; tome 2 p 13.
[27] Hartshorme : Algebric geometry (Springer Verlag 1977) p 305-409.
[28] Hauchecorne, Suratteau : des mathématiciens des A à Z (Ellipses 1996) : voir les entrées Clebsch, Cayley, Salmon, Sylvester.
[29] A. Henderson : the Twenty-seven Lines upon the cubic Surfaces (Cambridge 1911) p 13, 54-58, 83-92.
[30] B. Hunt : Lectures notes in Mathematics : Some geometry of some spécial arithmetic quotients (Springer) Isbn 0075-8434. Le chapitre 4 est lisible sur le web en http://www.math.rutgers.edu/courses/535/535-f02/cubics.ps http://arxiv.org/PS_cache/alg-geom/pdf/9503/9503018.pdf "A gem of the modular universe".
[31] S. Izumiya, N. Takeuchi, Singularities of ruled surfaces in $\mathbb{R}^3$. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 130 (2001), p 1-11 (imprimable à partir de http://home.imf.au.dk/esn/titles_1999.html)
[32] C. Juel : Matematisch Annalen LXXVI 1925 p 549-574.
[33] O. Labs *http : //www.oliverlabs.net/algebraicsurface/no_22.html*
[34] O. Labs http://enriques.mathematik.uni-mainz.de/labs/diplomArbeit_ OliverLabs.pdf (sa thèse -janvier 2001- 113 pages)
[35] P. Montel : bulletin des sciences mathématiques 2ème série tome XLVIII année 1924 première partie : sur la géométrie finie et les travaux de M.C. Juel p 109-129.
[36] D. Mumford (Médaillé Fields 1974) : Algebraic geometry 5 (springer Verlag 1976) p 172-180.
[37] Nordon : exercices d'oral 1972-1973 (Bréal 193) p 73-74.
[38] Poggendorff dictionnaire (Verlag 1937) voir les entrées à Juel p 717, 1261 ; et (Verlag 1925) p 599
[39] H. Pottmann, J. Wallner computational line geometry (Springer 2001).
[40] PROBLÈMES : Mines 1947 ; Centrale 1986, 1994 ; Agrégation 1970 (RMS mai 1971) ; X 1977 (RMS avril 78) ; Agrégation 1929, voir le livre de Dollon [20] ou RMS février 1930.
[41] E. Râmis : exercices de géométrie et de cinématique (Masson 1969) page 196-197.
[42] M. Reid : Undergraduate Agebraic geometry (London Mathematical Society, Students text 12 Cambridge Univerty Press 1988) p 102-106, 115, 126.
[43] REVUES : Bulletin de l'APMEP 396 (décembre 1994) p 605 et 406 (octobre 1996) p 605-609.
[44] G. Salmon : Traité de géométrie analytique à trois dimensions (trois parties) (Gauthier Villars 1892).
[45] L. Schläfli : Gesammelte mathematische Abhandlungen Tome 2 (Verlag 1953) p 204, 218.
[46] B. Segré : the non-singular cubic surfaces (Oxford Clarendon Press 1942) p 125-175. (La possibilité pentahédrale est p 125-175)
[47] T. Sederberg et J Snively : parametrization of cubic algebraic surfaces

(R Martin editor 1987) the mathematics of surfaces II p 299-319.
[48] I.R. Shafarevich : Basic algebraic geometry (Springer 1988) p 76, 78.
[49] M. Sina : surface cubique générale ; revue de mathématiques spéciales
juin 1930 p 217-219 et juillet 1930 p 241-242.
[50] M. Sina : les 27 droites de la surface cubique générale ;
revue de mathématiques spéciales février 1941 p 321-325 et mars 1941 p 345-349.
[51] SITES :
Site avec double six articulé animé par Java :
http://enriques.mathematik.uni-mainz.de/csh/mathback/doublesix.html
http://www.math.arizona.edu/~models/Wire_models/source/2.html
Schläfli double six et l'art :
http://www.jackstrawsstudios.com/Archives/superam/Archives/schlafli/schlafli_art
Site historique :
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/
Site avec la liaison avec la théorie des super-cordes heterotic :
*http://www-arxiv.org/pdf/physics/*0012033/
Sites avec la surface en béton http://www.sciencemuseum.org.uk/on-line/surfaces/art.asp
et http://www.ils.kun.nl/~R.Kaenders/
[52] K. E. Smith : Rational and non-rational algebraic varieties ;
article imprimable à partir du Web.
[53] Tétrel : solutions de mathématiques spéciales (Croville 1964) p 213-215.
[54] Todesco : site
http://www.divideo.it/personal/todesco/torino/modelli/clebsch.html
[55] G. Valiron : équations fonctionnelles, applications (Masson 1950) p 140.
[56] B. L. van der Waerden : Einführung in die algebraische Geometrie (Springer 1973)
p 19, 139.
[57] Weisstein : CRC Concise encyclopedia of mathematics (voir l'entrée Clebsch)
(elle est aussi sur le site : *http://mathworld.wolfram.com/ClebschDiagonalCubic.html*)

L.G.Vidiani 64 rue de l'EUROPE 21121 FONTAINE LÈS DIJON TEL : 03 80 56 65 53
Adresse email Internet : *lg_vidiani@club-internet.fr*