L.G.Vidiani 64 rue de l'EUROPE 21121 FONTAINE LÈS DIJON TEL : 03 80 56 65 54
Adresse email Internet : *lg_vidiani@ipac.fr*

Les critères d'Ermakof

(zip2 TEX ermakoq.tex) version Zip II : 27 04 04 11h00

LES CRITÈRES D'ERMAKOF

Lorsque j'étais élève en Math Sup, en article d'un numéro de l'Enseignement Mathématique [3] découvert le soir dans une pile de telles revues, dans la bibliothèque de la salle des professeurs d'un célèbre Lycée de Lyon m'avait marqué, bien qu'alors je n'ai pas tous les moyens techniques maîtrisés pour en saisir toutes les subtilités, mais l'intitulé du titre et des principales étapes permettaient d'appréhender l'essentiel. Ce numéro était d'ailleurs remarquable pour d'autres articles, en particulier celui de Van Der Pol sur une relation entre les fonctions elliptiques de Jacobi et l'oeuvre mathématique de Vandermonde par Henri Lebesgue.

Il fut étoffé d'ailleurs 11 années plus tard par le même auteur [4].

Ainsi affranchi et initié, je ne fut pas surpris lorsque des questions d'oral de la revue de mathématiques spéciales [5] ou dans d'autre supports, en ravivant mes réminiscences rallumèrent mon intérêt pour ces critères confidentiels ou à la diffusion restreinte.

Mon propos, n'est pas de reprendre (mal) un article novateur, mais surtout d'attirer l'attention sur la spécificité et l'originalité de ces critères peu connus et de montrer comment ils s'insèrent dans une chaîne de critères.

Tout d'abord, qui est **В. П. ЕРМАКОБ** ? V. Ermakof : Vassili Petrovitch Ermakof ou Ermakov : Basile fils de Pierre ; le dictionnaire russe de mathématiques "dictionnaire encyclopédique" **ЭНЦИКЛОПЕДИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ**, qui en outre reproduit 573 portraits de mathématiciens, fait connaître page 693 le visage d'Ermakof et le situe dans le temps [Terioukha actuellement dans le district de Gomel, en Biélorussie 27 2 1845 - Kiev 16 3 1922]. Il a terminé ses études universitaires à Kiev en 1868, où il a été professeur à partir de 1877. Il a découvert son critère très fin de convergence en 1870. Il a consacré beaucoup de temps à ses activités pédagogiques, éditant de 1884 à 1886 la "revue de mathématiques élémentaires".

Outre les deux articles cités, ses critères se retrouvent par Google, en particulier sur le site de l'encyclopédie Weisstein [5].

Avant de donner les hypothèses générales, intéressons nous à la forme réduite la plus élémentaire du test d'Ermakof :

Critère d'Ermakof simplifié : Soit g : $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, dérivable et à dérivée décroissante, avec $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, et f : $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, décroissante, alors les deux séries de termes généraux f(n) et f(g(n))g'(n) sont de même nature.

Démonstration : Pour f décroissante la série de terme général $f(n)$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ sont de même nature, ceci découlant de $\int_1^{n+1} f(x)dx \le \sum\limits_1^n f(p) \le \int_0^n f(x)dx$.

g' décroissante ne peut prendre des valeurs négatives : en effet, si $g'(x) < 0$ pour $x > x_0$, alors g(x) décroît pour $x > x_0$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

g est donc croissante, et $f\circ g$ décroissante ainsi que $(f\circ g)g'$: il en résulte que la série de terme général $f[g(n)]g'(n)$ est de même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f[g(t)]g'(t)dt$.

Les hypothèses de monotonie des fonctions intervenant, suffisant à assurer l'égalité $\int_A^U f(x)dx = \int_\alpha^u f[g(t)]g'(t)dt$, avec $A = g(\alpha)$ et $U = g(u)$, soit $\alpha = g^{-1}(A)$ et $u = g^{-1}(U)$.

La croissance et la continuité de g, ainsi que l'hypothèse $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ permettent d'assurer que les deux intégrales sont simultanément convergentes ou divergentes pour la borne $+\infty$. Il en est donc de même pour les deux séries $\sum f(n)$ et $\sum f[g(n)]g'(n)$.

Exemples et applications :

- L'application de ce critère avec $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ avec $\alpha > 0$ et $g(x) = \ln x$, fonctions qui vérifient les hypothèses exigées, (en réduisant toutefois l'intervalle de définition à $[2, +\infty[$) et montre que les séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ et de Bertrand $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ sont de même nature ; Il en serait de même en adaptant le choix de la fonction g au moyen des logarithmes itérées ($\ln_1 = \ln$, $\ln_2 = \ln\circ\ln$, $\ln_k = \ln\circ\ln_{k-1}$), pour en déduire la nature des séries de (Morgan)-Bertrand généralisées.
- Avec $a > 1$ et f décroissante, la fonction F définie par $F(x) = f(a^x)$ est aussi décroissante ; en posant $g(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$, on conclut encore que les séries de termes généraux $f(a^n)$ et $\frac{f(n)}{n\ln a}$ sont de même nature, celle-ci est donc indépendante de a ($a > 1$).
- Le lecteur pourra à titre d'exercice démontrer que f étant continue de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}^+$ et croissante, alors les trois séries $\sum f(e^{-n})$, $\sum \frac{1}{n} f(\frac{1}{n})$, $\sum nf(e^{-n^2})$ sont de même nature, en précisant quelles sont les fonctions F, G à utiliser

pour appliquer le critère simplifié d'Ermakof. *(réponse : $F(x) = f(e^{-x})$, $G = \ln$ pour la seconde série, $G(t) = t^2$ pour la troisième).*

• Le critère dit de la "loupe", ou encore chez les anglo-saxons le "critère de condensation de Cauchy" (celui ci l'ayant établi dans son son cours en 1821) affirme que si f décroissante de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$ alors les deux séries $\sum f(n)$ et $\sum 2^n f(2^n)$ sont de même nature. Montrer qu'on peut le démontrer au moyen du critère d'Ermakof *(Réponse : prendre $g(t) = 2^t$, dont la dérivée est $g'(t) = \ln 2 2^t$).*

• Le programme Maple V.5, améliorable, donné en annexe permet de saisir la transformation d'une part le passage de la fonction f à $(f \circ g) * g'$ et d'autre part de la ressemblance des graphes des fonctions en escalier de valeurs respectives $f(n)$ et $(f \circ g)(n) * g'(n)$ dans l'intervalle $[n, n+1[$.

Donnons maintenant, mais sans entrer dans le détail d'une démonstration (le lecteur intéréssé pourra trouver d'autres formulations et des démonstrations dans [3] et [4]), une expression du critère d'Ermakof en 1883 donnée dans ces articles :

Critère d'Ermakof : Soit $\mathbf{\Psi(x)}$ une fonction de x continue, possédant une dérivée positive et continue pour $\mathbf{x \geq a_0}$ et telle que l'on ait $\mathbf{\Psi(x) > x}$ $\mathbf{(x \geq a_0)}$.

Supposons que $\mathbf{\Psi'(x)}$ satisfait à l'une des deux conditions suivantes : ou bien $\mathbf{\Psi'(x)}$ ne décroît pas à partir d'un x et atteint ou dépasse la valeur un : ou bien $\Psi'(x)$ ne croît pas à partir d'un x.

Alors :

a) Si f(x) est positive à partir d'un x et est sommable tandis que $\frac{1}{\mathbf{f(x)}}$ reste uniformément borné dans chaque sous-intervalle fini de l'intervalle de définition de f(x) et si l'on a à partir d'un x $\frac{\mathbf{f(\Psi(x))\Psi'(x)}}{\mathbf{f(x)}} \geq \mathbf{1}$, alors la série $\displaystyle\sum_{\nu}^{\infty} \mathbf{f}(\nu)$ est divergente.

b) Si f(x) est mesurable et positive à partir d'un x et reste uniformément bornée dans chaque sous-intervalle fini de l'intervalle de définition de f(x) et s'il existe un nombre δ, $0 < \delta < 1$, tel qu'à partir d'un x, $\frac{\mathbf{f(\Psi(x))\Psi'(x)}}{\mathbf{f(x)}} \leq \delta$, $0 < \delta < 1$, alors la série $\displaystyle\sum_{\nu}^{\infty} \mathbf{f}(\nu)$ est convergente.

L'intérêt des diverses formulations du critère d'Ermakof, données par les articles d'Ostrowski donnés en bibliographie, ne se résume pas à leur utilisation pour l'étude des séries, mais à son intervention dans l'équation fonctionnelle d'Abel $\varphi(\Psi(x)) = \varphi(x) + 1$ (φ fonction inconnue) et à une amélioration du critère d'Euler-Maclaurin associé à la formule du même nom.

Les critères d'Ermakof (comme d'ailleurs tous les tests classiques : ceux de domination, de comparaison logarithmique, de Raabe, de D'Alembert, de Cauchy, de comparaison avec une intégrale, de Kummer, d'Abel-Dini-Pringsheim, de Leibnitz, de condensation de Cauchy) s'insèrent comme cas particulier du critère général donné dans [1]. Chacun correspond à un choix de suite p et d'entier k.

Une condition nécessaire et suffisante, pour que la série $\sum \mathbf{a_n}$, à termes positifs soit convergente, est qu'il existe des réels positifs $\mathbf{p_n}$ et un entier positif k tel que $\mathbf{p_n - p_{n+1} \geq a_{k+n}}$, pour tout n=1,2,....

En pratique on l'utilise, comme condition suffisante (il suffit d'exhiber une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$), et pour démontrer la divergence on utilise :

Une condition nécessaire et suffisante, pour que la série $\sum \mathbf{a_n}$, à termes positifs soit divergente, est qu'il existe un ensemble infini des réels positifs $\mathbf{p_n}$ et un entier positif k tel que $\mathbf{0 < p_{n+1} - p_n \leq a_{k+n}}$, pour tout n=1,2,....

Il faut néanmoins comme expliqué dans la conclusion, un peu de malice, ou de naïveté sinon de mauvaise foi, pour prendre le critère général que nous venons de citer comme panacée universelle, et effet son universalité apparente est une illusion, la difficultée masquée étant pour chaque série de trouver la suite p_n dont elle serait de façon imagée "la série des différence" dominée, et l'entier k.

Conclusion

L'espérance de critères universels de convergence est hélas une illusion, une leurre, un mirage et un fantasme voué à l'échec : en effet [2], il n'existe ni de critère universel de convergence absolue des séries, ni même de suite dénombrable universelle de critères de convergence absolue des séries, nous sommes donc obligés de nous contenter, mais est-ce un mal réducteur ? de la diversité des critères existants.

Programme Maple d'illustration du critère d'Ermakof

Il a pour but de faire représenter graphiquement les deux fonctions f et $(f \circ \Psi) * \Psi'$ sur un intervalle $[n, n+1[$ ainsi que les fonctions en escalier correspondant à leur valeur en n.

$> restart : ermakov := (f, Psi)- > (f@Psi) * D(Psi) :$

$> graphe := (f, g, n)- > plot([f, ermakov(f, g), f(n), ermakov(f, g)(n)], n..n+1,$

$color = [red, blue, black, green], title = \text{`}Rougef, bleufonctiond'Ermakov(f@\Psi) * Psi'\text{`}) :$

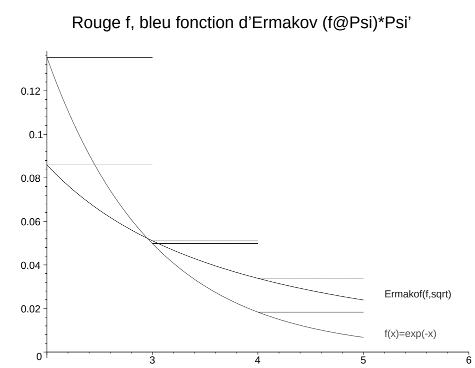
$G2 := graphe(1/exp, sqrt, 2) : G3 := graphe(1/exp, sqrt, 3) : G4 := graphe(1/exp, sqrt, 4) : texte := plot(0, x = 2..6) :$

$tf := textplot([5.2, 0.025, \text{`}Ermakof(f, sqrt)\text{`}], color = blue, align = \{RIGHT, ABOVE\}) :$

$erma := textplot([5.2, 0.007, \text{`}f(x) = exp(-x)\text{`}], color = red, align = \{RIGHT, ABOVE\}) :$

$with(plots) : display(G2, G3, G4, tf, texte, erma);$

On constate que dans le choix des fonctions f et Ψ de l'exemple, la courbe D'Ermakof passe au dessus du graphe de f approximativement vers $x = 2.88$. On peut se poser la question de la recherche des zéros de $f(\Psi(x)) * \Psi'(x) = f(x)$, qui correspondent aux abscisses des points de croisement des graphes de f et de $ermakof(f, \Psi)$.



Bibliographie

[1] E. Baylis Shanks : convergence of series with positivies terms, The American Mathematical Monthly, Vol 64, No. 65 (May 1957) p 338-341.

[2] J. Favard : Cours d'analyse de l'École Polytechnique, tome I (Gauthier-Villars 1960) p 215-216.

[3] A. Ostrowski : sur les critères de convergence et de divergence dus à V. Ermakof (A trygve Nagell à l'occasion de son 60ème anniversaire), L'Enseignement Mathématique (revue internationale fondée en 1899) deuxième série, tome I, fascicule 4 1956, p 224-257.

[4] A. M. Ostrowski : On Ermakof's convergence criteria and Abel's functional equation,

L'Enseignement Mathématique (revue internationale fondée en 1899) deuxième série, tome XI, fascicule 2-3 Mars-Septembre 1965, p 103-122.

[5] Revue de Mathématiques Spéciales : Avril 1967 question 19410 p 545-546 ; Février 1976 question 19839 p 194 une excellente solution ;

[6] E. Weisstein : http://mathworls.wolfram.com/ErmakoffTest.html : Ermakoff's Test.