Équations fonctionnelles

VIDIANI Fontaine Les Dijon *lg_vidiani@ipac.fr*

À l'oral des concours et parfois à l'écrit sont posées des questions demandant de trouver des fonctions satisfaisant à une condition fonctionnelle parfois matinée de condition différentielle, et que l'on rencontre souvent en particulier, dans la recherche de fonctions propres d'opérateurs intégraux. Si, à l'écrit, l'énoncé est souvent bien rédigé et permet une progression naturelle, il n'en est pas de même, en général, à l'oral, où la variété des méthodes possibles, la concision, voire l'hermétisme voulu du sujet, témoigne plus d'une volonté délibérée, de pièger, à coup sûr le candidat et procède plus de la pédagogie VITTEL ("il faut éliminer") plus adaptée à une eau minérale, qu'aux élèves que nous essayons durant toute l'année d'aider à réfléchir et progresser, en leur remontant au besoin le moral. Le but de cet article est de donner, un nombre limité de méthodes simples, illustrées par des exemples significatifs qui permettent dans 99 pour cent des exercices posés à l'oral de résoudre le problème posé, avec un fil directeur bien précis et non un flou artistique et surréaliste, plus littéraire que scientifique.

Ces méthodes sont les suivantes :

- MÉTHODE MANIPULATOIRE, OU ALGÉBRIQUE
- USAGE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES et renforcement
- MÉTHODE DE LA DENSITÉ
- MÉTHODE DE LA MONOTONIE
- MÉTHODE PAR ANALOGIE AU LINÉAIRE
- MÉTHODE DE LA SÉRIE OU DU DÉVELOPPEMENT LIMITÉ

Pour toutes les méthodes utilisées, on aura en permanence en tête les principes suivants :

■ Songer pour montrer que l'ensemble des solutions n'est pas vide à exhiber des solutions constantes simples (par exemple pour $f(3x) - 3f(x) - 4f^3(x) = 0$ $f = 0$, $f = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ sont solutions).

■ Songer à une méthode de transfert pour montrer que f a des propriétés plus fortes que celles supposées dans l'hypothèse, par exemple si f est seulement intégrable , on peut démontrer que les solutions de l'équation proposée sont continues puis même dans certains cas C_∞ , ce qui facilite bien sûr la recherche ; ce principe sera souvent utilisé dans les méthodes successives proposées (Par exemple pour trouver que les exponentielles polynômes sont les fonctions globalement invariantes par translation).

■ Comme on procède bien souvent par conditions nécéssaires, il ne faudra bien sûr jamais oublier de y "vérifier" que la ou les fonctions trouvées conviennent !!!!!

■ Comme pour les équations différentielles il ne faut pas oublier les "raccords" éventuels de solutions, qui résultent des bornes des ensembles où f cesse d'avoir une propriété (dérivabilité par exemple..) qui avait permis d'obtenir son expression.

Certains procédés classiques sont des détails ou applicables pour d'autres thèmes : linéariser en prenant le logarithme quand on a prouvé la stricte positivité, associer deux équations en passant par les complexes, méthode de la série, aux coefficients indéterminés que l'on rencontre par exemple pour l'équation $\mathbf{F(ax) = (1 - ax)F(x)}$ qui intervient en théorie des partitions, fonctions elliptiques et loxodromiques et pour la construction de la fonction Γ, enfin la méthode du jacobien nul à rang constant qui permet d'établir et même de prévoir certaines relations fonctionnelles comme toutes les relations de trigonométrie et celles relatives aux exponentielles et logarithmes. Citons seulement pour mémoire la stabilité par opérateurs de translations, qui caractérise les exponentielles polynômes et les procédés par différence finie, plus spécialisés.

EXPOSONS sur l'équation $H(x, y)H(y, x) = 1$, où H est une fonction définie sur un ensemble D de $\mathbb{R}$ vers un corps $\mathbb{K}$, la méthode **MANIPULATOIRE** On constate que H ne peut prendre la valeur zéro, et notons pour simplifier $H = H(x, y)$ et $\widetilde{H} = H(y, x)$, comme le produit $H\widetilde{H} = 1$ a une propriété, on a l'idée de donner un nom ψ au rapport $\frac{H}{\widetilde{H}}$. (si c'était la somme qui avait une propriété nous aurions donné un nom à la différence) par suite $\widetilde{\psi} = \frac{\widetilde{H}}{H}$ et ψ, est une solution évidente ; mais $\widetilde{H} = \frac{1}{H}$ donne $\psi = H^2$ et $\widetilde{\psi} = \frac{1}{H^2}$ donc $H^4 = \frac{\psi}{\widetilde{\psi}}$ par suite $H(x, y) = \varepsilon(x, y)\frac{\varphi(x,y)}{\varphi(y,x)}$ où $\varepsilon(x, y)$ est une racine quatrième de l'unité, qui selon que le corps $\mathbb{K}$ choisi est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ appartient à $\{-1, +1\}$ ou à $\{-1, +1, i, -i\}$. La seule condition de vérification est $\varepsilon(x, y)\varepsilon(y, x) = 1$. Dans le cas réel on peut choisir $\varepsilon(x, y)$ complétement arbitraire en dessous (au sens large) de la première bissectrice, dans le cas complexe de même strictement en dessous de la première bissectrice , la seule contrainte est que $\varepsilon(x, x)$ dont le carré est alors 1 appartienne à $\{-1, 1\}$ (Faire une figure). Si $\varepsilon(x, y)$ pouvait se mettre sous la forme $\frac{g(x,y)}{g(y,x)}$ on aurait $\varepsilon(x, x) = 1$, or manifestement on peut prendre $\varepsilon(x, x)$ appartenant à $\{-1, 1\}$ arbitrairement sur la première bissectrice, par conséquent, dans tout corps de caractéristique différente de 2 (pour que -1 diffère de 1), il y a d'autres solutions (si on n'exige pas la continuité de H) que les fonctions $\frac{\varphi(x,y)}{\varphi(y,x)}$. Dans $\mathbb{C}$ on aurait pu utiliser la théorie du relèvement et rechercher $H(x, y)$ sous la forme $\rho(x, y)e^{\theta(x,y)}$.

LE cas le plus facile à traiter en général, est celui des équations fonctionnelles se ramenant à des $\boxed{\textbf{ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES}}$.

Donnons comme premier exemple la recherche de fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ vérifiant $\mathbf{f'(x) = f(v(x))}$ où v est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ souvent de classe C^∞ ; la clef de ces équations est en général une propriété d'idempotence de v, qui permet de chercher les solutions f parmi les solutions d'une équation différentielle ; illustrons ce principe par quelques exemples :

$\mathbf{f'(x) = f(1-x)}$ où f est supposée C^1 ; ici v est involutive et, par composition, comme $f \circ v$ est C^1 , f' est C^1 et, par transfert immédiat f, est C^∞. Une dérivation donne $f"(x) = -f(x)$ donc $f(x)$ est de la forme $f(x) = A\cos x + B\sin x$; comme nous avons procédé par condition nécéssaire en dérivant il faut vérifier : un système très simple donne alors immédiatement $B = A\frac{\cos 1}{(1-\sin 1)}$ donc : $f(x) = A\frac{\sin(x+\frac{\pi}{4}-1/2)}{\sin(\frac{\pi}{4}-1/2)}$.

L'exemple $\mathbf{f'(x) = f(\frac{1}{x})}$ donne par transfert que f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et qu'alors $x^2f"(x) + f(x) = 0$ puis (équation du type d'Euler) $f(x) = A\sqrt{|x|}[\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|) + \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|)]$. De même l'équation $\int_0^{\mathbf{x}} \mathbf{f(t)dt} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{3}}[\mathbf{f(x) + 2f(o)}]$ donne pour x différent de zéro : $f(x) + 2f(o) = \frac{3}{x}\int_0^x f(t)dt$ donne f dérivable, puis f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. Puis par dérivation $2f(x) - xf'(x) = 2f(o)$ puis élémentairement $f(x) = f(o) + \lambda x^2$. ($\lambda$ pouvant différer sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$). Dans les exemples précédents la dérivabilité de f était donnée ou rapidement évidente : montrons sur des exemples, qu'à priori la dérivabilité peut être une conséquence (**PAR "RENFORCEMENT"**) de l'équation fonctionnelle, même si seulement une propriété moins forte est supposée.

Ainsi f de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ intégrable localement sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ et vérifiant $\mathbf{f(xy) = f(x)f(y)}$; les solutions 0, 1 et $|x|^m$ sont évidentes. Intégrons $f(ty) = f(t)f(y)$ par rapport à t, et multiplions par y alors : $y\int_0^x f(ty)dt = yf(y)\int_0^x f(t)dt$ posons $ty = u$: $\int_0^{yx} f(u)du = yf(y)\int_0^x f(t)dt$; La spécialisation $x = y = 1$ donne $f(1)^2 = f(1)$: si $f(1) = 0$ alors $f(x) = f(x.1) = f(x)f(1) = 0$, $f = 0$; si $f(1) = 1$, $f(1) = f(x)f(\frac{1}{x})$: $f(\mathbb{R}^*) \subseteq \mathbb{R}^*$; $f(-1)^2 = 1$, $f(-1) = \varepsilon$; $f(-x) = \varepsilon f(x)$, f est $\varepsilon-$paire, $f(x^2) = f(x)^2 \geq 0$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ les changements $x = e^t$, $f^*(t) = f(e^t)$ et $F^* = \ln f^*$ donnent $F^*(t+u) = F^*(t) + F^*(u)$ et si f n'est pas continue on est ramené aux mêmes possibilités que dans la méthode de **densité** ; enfin $f(0) = f(x)f(0)$, si $f \neq 1$, $f(0) = 0$.

• Si f est non nulle **continue**, comme $f(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+$ alors il existe a de $\mathbb{R}^+$ tel que $A = \int_0^a f(t)dt \neq 0$ alors $\int_0^{ay} f(u)du = Ayf(y)$ et $f(y) = \frac{1}{Ay}\int_0^{ay} f(u)du$ pour y non nul d'où immédiatement f est C^1 dans $\mathbb{R}^*$, et par transfert-renforcement f est C^∞ dans $\mathbb{R}^*$, et une dérivation par rapport à x non nul de la relation initiale $f(x)f(y) = f(xy)$ donne $f'(x)f(y) = yf'(xy)$; $x = 1$ et une intégration immédiate donne alors $f(y) = |y|^{f'(1)}$: on n'oublie pas de vérifier et les possibilités de raccordement en 0 pour des constantes $f'(1)$ différentes. *(la continuité est essentielle pour assurer $A \neq 0$).*

Dans les mêmes hypothèses, on traite de manière absolument analogue l'exemple suivant : $\mathbf{f(x)f(y)} = \int_{\mathbf{x-y}}^{\mathbf{x+y}} \mathbf{f(t)dt}$, f étant intégrable ; $F(u) = \int_0^u f(t)dt$ est continue, et hors de la solution $f = 0$ évidente, il existe a de $\mathbb{R}$ tel que $f(a)$ soit non nul, et alors $f(y) = \frac{1}{f(a)}[F(a+y) - F(a-y)]$, alors par transfert-renforcement f est continue puis C^∞. Deux dérivations successives respectivement par rapport à x puis y donnent : $f"(x)f(y) = f'(x+y) - f'(x-y) = f(x)f"(y)$ pour tous x et y de $\mathbb{R}$. En particulier pour $x = a$: donc $f"(y) = f(y)\lambda$ où $\lambda = \frac{f"(a)}{f(a)}$, ainsi f est de la forme $Ax + B$ si $\lambda = 0$, $f(x) = A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\sin(\sqrt{-\lambda}x)$ si $\lambda < 0$ et enfin $f(x) = A\cosh(\sqrt{\lambda}x) + B\sinh(\sqrt{\lambda}x)$ si $\lambda > 0$. Une vérification dans l'équation fonctionnelle impose les seules solutions : $f(x) = 2x$, $f(x) = \frac{2}{k}\sin(kx)$ et $f(x) = \frac{2}{k}\sinh(kx)$.

Une variante de cet exercice et qui se traite de manière analogue , consiste à mettre $|x-y|$ à la place de la borne inférieure de l'intégrale : on trouve, sans tenir compte des raccordements éventuels, exactement les mêmes solutions.

Enfin cherchons f de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, localement intégrable vérifiant $\mathbf{f(x+y)f(x-y) = f^2(x) - f^2(y)}$. 0 est solution évidente ainsi que $id_{\mathbb{R}}$ et $f(x) = \sin(\lambda x)$ et $f(x) = \sinh(\lambda x)$; de plus par suite de l'homogénéité de l'équation par rapport à f, l'ensemble des solutions est un cône de sommet la fonction nulle (cela fait très pédant et littéraire mais n'apporte rien et l'examinateur en principe n'est pas dupe). Pour avoir la dérivabilité des solutions, qui n'est pas évidente, posons $u = x+y$, $v = x-y$, l'équation devient $f(u)f(v) = f^2(\frac{u+v}{2}) - f^2(\frac{u-v}{2})$.

Il existe des solutions non continues : Toute fonction $\mathbb{Q}$-linéaire vérifie cette équation : voir des exemples précis à la fin de la méthode de densité. Si f **CONTINUE** n'est pas nulle il existe (par positivité de l'intégrale des fonctions continues) b tel que $A = \int_0^b f(t)dt$ soit non nul, intégrant alors de 0 à b les deux membres de la relation précédente dont l'intégrabilité est justifiée, et avec la notation : $F(u) = \int_0^u f^2(t)dt$ (le produit de deux fonctions intégrables est intégrable, contrairement à la composée sans précaution...) nous déduisons $f(u) = \frac{2}{A}[F(\frac{u+b}{2}) - 2F(\frac{u}{2}) + F(\frac{u-b}{2})]$ et par transfert-renforcement f est continue puis C^∞ et comme plus haut deux dérivations successives respectivement par rapport à u et à v de l'équation modifiée en u et v permettent de constater que $f"(u)f(v) = f(u)f"(v)$ et en poursuivant comme plus haut et après vérification on trouve les solutions suivantes : $f(x) = kx$, $f(x) = k\sin(\lambda x)$, $f(x) = k\sinh(\lambda x)$.

On traite exactement de la même manière, le système, vérifié par les fonctions localement intégrables f et g : $\mathbf{f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)}$, $\mathbf{g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)}$, après avoir songé à poser $h(x) = f(x) + ig(x)$:

$h(x+y) = h(x)h(y)$; si h est non nulle elle ne s'annulle pas, il existe a de $\mathbb{R}$ telle que $A = \int_0^a h(t)dt$ non nul, $h(x) = \frac{1}{A}(H(a+x) - H(x))$, où H est une primitive de h, qui existe, puisque par transfert-renforcement immédiat h est C^∞, alors $h'(x)h(y) = h'(y)h(x)$; $h' - \lambda h = 0$, avec $\lambda = a + ib$ (a nouvelle constante réelle n'ayant rien à voir avec celle utilisée dans le préalable précédent au transfert-renforcement) : $h(x) = kexp(\lambda x)$: $f(x) = e^{ax}\cos(bx)$, $g(x) = e^{ax}\sin(bx)$.

La méthode de la $\boxed{\textbf{DENSITÉ}}$ est moins connue mais très utile (Son principe est d'utiliser l'équation pour calculer $f(x)$ sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, puis en utilisant la continuité d'utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{R}$ pour obtenir $f(x) = lim f(r_n)$ si r_n est rationnel de limite x (il en existe ne seraient ce que les valeurs décimales approchées de x à 10^{-n} près). Pour l'exemple classique de f de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant $\mathbf{f(x+y) = f(x) + f(y)}$, la méthode des valeurs particulières va nous permettre d'avancer : $x = 0$ et $y = 0$ donnent $f(0) = 0$, puis $y = -x$ donne $f(-x) = -f(x)$: f est impaire, $y = x$ donne $f(2x) = 2f(x)$, puis par récurrence immédiate $f(nx) = nf(x)$, l'imparité donne que $f(nx) = nf(x)$ vaut encore pour n de $\mathbb{Z}$, puis $f(\frac{p}{q}x) = pf(\frac{x}{q})$ mais comme $f(x) = f(\frac{q}{q}x) = qf(\frac{x}{q})$ on en déduit $f(\frac{p}{q}x) = \frac{p}{q}f(x)$ et pour tout r de $\mathbb{Q}$ on a $f(rx) = rf(x)$, f est $\mathbb{Q}$-linéaire) ; en particulier si on pose $a = f(1)$, $f(r) = ar$ et l'hypothèse rajoutée de continuité de f (Et même, par linéarité la CONTINUITÉ en 0 seul suffit !) donne avec r_n tendant vers x et prolongement des égalités par passage à la limite $f(x) = ax$; La variante consistant à supposer f seulement bornée sur la boule unité $[-1,1]$ de $\mathbb{R}$, se ramène au cas précédent d'après une des caractérisations équivalentes des applications $\mathbb{Q}$-linéaires continues.

On utilise le résultat précédent pour trouver les fonctions continues g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, telles que $\mathbf{g(\frac{x+y}{2})) = \frac{1}{2}[g(x) + g(y)]}$, le fait de poser $x = 2x'$, $y = 2y'$ donne $2g(x'+y') = g(2x') + g(2y')$, posons $f(x) = g(x) - g(0)$ alors l'équation fonctionnelle de g implique comme la valeur particulière $y' = 0$ donne $g(x') = \frac{1}{2}[g(2x') + g(0)]$, que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ donc $g(x) = ax + b$.

On profite généralement de l'exercice antérieur pour exhiber des fonctions $\mathbb{Q}$-linéaires et pourtant non continues : appelant E_1 le $\mathbb{Q}$ sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ engendré par 1 et $\sqrt{2}$, il admet, par ZORN, un supplémentaire E_2 et tout x de $\mathbb{R}$, peut s'écrire $x = x_1 + x_2$ avec $x_i \in E_i$, alors f, vérifiant $f(r_1 + r_2\sqrt{2}) = r_2 + r_1\sqrt{2}$ stabilise E_1 et telle que $f/E_2 = id_{E_2}$ vérifie bien $f(x+y) = f(x) + f(y)$ donc est bien $\mathbb{Q}$-linéaire, en outre elle est involutive, mais elle n'est pas continue, sinon il existerait a de $\mathbb{R}$ tel que $f(x) = ax$, $a = f(1) = f(1 + 0\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ et $f(\sqrt{2}) = 1 = a\sqrt{2}$ ce qui donnerait une contradiction pour a. Il existe donc aussi des involutions non continues et si on pose $p = \frac{1}{2}(f + id_{\mathbb{R}})$, p est un projecteur qui est $\mathbb{Q}$-linéaire et non continu.

L'utilisation d'une base de HAMEL, $r_{\alpha\alpha\in\mathbb{Q}}$, pour $\mathbb{R}$ considéré comme $\mathbb{Q}$ espace vectoriel, donne plus généralement si $x = p_1 r_{\alpha_1} + ... + p_n r_{\alpha_n}$, et $f(x) = p_1 + ... + p_n$, un exemple plus général de fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, additive et $\mathbb{Q}$-linéaire, mais non continue, puisque ne vérifiant pas sur $\mathbb{R}$ pourtant connexe, la propriété des valeurs intermédiaires car elle ne prend que des valeurs rationnelles. (Autre exemple par Valeurs Particulières APM 384 p 357 $f(\sqrt{x^2 + xy + y^2}) = f(x)f(y)$).

Le principe de la méthode de $\boxed{\textbf{MONOTONIE}}$ consiste à démontrer la monotonie de f et la calculer sur $\mathbb{Q}$. Pour l'illustrer traitons l'exemple $\mathbf{f(x^2 - y^2) = f^2(x) - f^2(y)}$, où f est supposée seulement définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Les valeurs particulières $(0,0)$ donnent $f(0) = 0$, puis $y = 0$ donne $f(x^2) = f^2(x) \geq 0$ donc $f(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+$; $x = 0$ donne $f(-y^2) = -(f(y))^2$ donc si $x \leq 0$, $f(x) = -f(\sqrt{-x}) \leq 0$ et $f(\mathbb{R}^-) \subseteq \mathbb{R}^-$; enfin $f(-y^2) = -f(y^2)$ justifie que f est impaire ; $f(1) = f(1^2 - 0^2) = f^2(1)$ donc $f(1)$ est 1 ou 0.

Montrons maintenant que $f(u+v) = f(u) + f(v)$: nous avons quatre cas (1) $u \geq 0,\ v \geq 0$; (2) $u \geq 0,\ v \leq 0$; ou $u \leq 0,\ v \geq 0$; (3) $u \leq 0,\ v \leq 0$;

Le cas (2) se traite le plus rapidement avec l'équation fonctionnelle $f(u+v) = f(u-(-v)) = f^2(\sqrt{u}) - f^2(\sqrt{-v}) = f(u) - f(-v) = f(u) + f(v)$; le cas (1) se prouve par $f(u) = f(u+v-v) = f(u+v) + f(-v)$ démontré pour le cas (2). Enfin (3) se déduit de (1) par imparité : nous savons alors, par un exemple précédent que $f(r) = ar$ pour r rationnel, mais si $u \geq v$ la relation $f(u-v) = f(u) - f(v)$ donne $f(u) \geq f(v)$, f est donc croissante, l'encadrement de x par des décimaux r_n et s_n approchant x respectivement par défaut et par excès à 10^{-n} près donne $r_n \leq x \leq s_n$, puis par la croissance de f : $ar_n \leq f(x) \leq as_n$, et enfin par prolongement des inégalités larges par passsage à la limite $f(x) = ax$. La vérification impose $a = 0$ ou 1.

Lorsqu'on constate que le premier membre de l'équation fonctionnelle est $\boxed{\textbf{LINÉAIRE}}$ par rapport à f, on s'inspire, en particulier grace au lien, qu'il y a entre l'opérateur de dérivation D et l'opérateur différence $\Delta = T - I_d$, où T est l'opérateur de translation. différence), lien mis en évidence par la formule de James GRÉGORY *(1638-1675 : $P(X) = P(0) + \frac{(\Delta P)(0)}{1!}H_1 + \frac{(\Delta^2 P)(0)}{2!}H_2 + ... + \frac{(\Delta^n P)(0)}{n!}H_n$, où P est un polynôme de degré $\leq n$, et où H_k, polynôme de HILBERT, est $H_k = X(X-1)....(X-k+1)$; par linéarité il suffit de la vérifier sur la base des polynômes de HILBERT ; elle est le pendant de la formule de TAYLOR, avec la base canonique pour l'opérateur D)* et matérialisé sur les séries formelles par $exp(D) - I = \Delta$, de toutes les méthodes établies en particulier pour les équations différentielles, linéaires. Ainsi pour traiter $\mathbf{f(x+2) - 7f(x+1) + 10f(x) = 0}$ où f est de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on fait intervenir l'opérateur de translation $T = \Delta + I$ et le problème revient à trouver $Ker(T^2 - 7T + 10I) = Ker(T-2I)(T-5I)$, qui d'après le théorème de décompostion en somme directe des noyaux est $Ker(T-2I) \oplus Ker(T-5I)$. Nous sommes donc ramenés à trouver $Ker(T - kI)$, avec $k > 0$, ce qui s'exprime par $f(x+1) - kf(x) = 0$; Le changement de fonction défini par $f(x) = k^x g(x)$ donne $g(x+1) = g(x)$, donc g est 1-périodique et l'ensemble des solutions est donné par $f(x) = 2^x a(x) + 5^x b(x)$, où a et b sont des fonctions arbitraires 1-périodiques ; Les seules contraintes sont dans les exigences de raccordement sur-ajoutées. Le cas $k = 0$ donne $f = 0$, mais le cas $k < 0$ est plus méchant à cause de la formule $(r^a)^b = r^{ab}$ qui n'est plus vraie si l'un des exposants est complexe *(Éssayer $(e^{2i\pi})^{\sqrt{2}}$...)* ; On peut néanmoins s'en tirer en posant $f(x) = |k|^x(\cos \pi x + i \sin \pi x)g(x)$, qui donne également g 1-périodique. Voir plus loin dans les exemples (O99-86) la recherche du noyau de Δ^n.

LE principe du $\boxed{\textbf{DÉVELOPPEMENT LIMITÉ ou en SÉRIE}}$ est de déduire de l'unicité du développement formel ou de la limite (des deux membres égaux), des relations qui permettent de préciser, soit les coefficients, si l'on veut seulement un développement formel dont on justifie ensuite la convergence, soit des relations entre les coefficients qui permettent de préciser la fonction cherchée. Ainsi la recherche des fonctions de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifient, pour tous x et y de $\mathbb{R}$: $\mathbf{(y - x)f(\frac{x+y}{2}) = \int_x^y f(t)dt}$; f étant continue admet une primitive dérivable F et avec $x = a - \frac{1}{2}$, $y = a + \frac{1}{2}$, $f(a) = F(a + \frac{1}{2}) - F(a - \frac{1}{2})$ et par transfert-renforcement f est C^∞. Posons $y = x + h$ alors : $hf(x + \frac{h}{2}) = \int_x^{x+h} f(t)dt$ et la formule de TAYLOR YOUNG appliquée aux deux membres donne, après avoir posé $2k = h$: $2k[f(x) + kf'(x) + k^2\frac{1}{2}f"(x) + o(k^2)] = F(x + 2k) - F(x) = 2kf(x) + 2k^2f'(x) + 4k^3\frac{1}{3}f"(x) + o(k^3)$ l'identification des termes en k^3 donne : $f"(x) = 0$ donc $f(x) = ax + b$, nous laissons au lecteur, le soin de la vérification.

L'exemple $f : C2$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(on peut même montrer que f définie implique f C^∞ par la méthode de transfert)* telle que $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$ se traite en identifiant les limites pour y tendant vers zéro par valeur différente de 0, des deux membres de : $\frac{f(x+y)+f(x-y)-2f(x)}{y^2} = \frac{2f(x)[f(y)-1]}{y^2}$, qui donne une équation différentielle, après avoir montré par la méthode des valeurs particulières que $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$. (on trouve après vérification (on a procédé par implication), $\cos wx$ et $\cosh wx$,et 1).

Si f est de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ continue en un point a, vérifie l'équation alors elle est continue partout, puis par transfert C^2 et le début s'applique : si f est non identiquement nulle à 0, alors $f(0) = 1$; $x = y$ donne $2f^2(x) = f(2x) + 1$: si f est continue en a elle l'est en $2a$: si $f(a) = 0$ alors $f(2a) = -1 \neq 0$: dans tous les cas on peut disposer d'un point de continuité où $f(a) \neq 0$ (au besoin en remplaçant a par $2a$). Alors d'après l'équation fonctionnelle $2f(a)f(y)$ tend (pour y tendant vers 0) vers $2f(a)$; donc $f(y) \to 1 = f(0)$: f est donc continue en 0. Comme f est continue en 0, la relation donne pour tout x $f(x + y) + f(x - y) \to f(x)$ et $2f(x + y)f(x - y) = f(2x) + f(2y) \to f(2x) + 1 = 2f^2(x)$; donc si on pose $A = f(x + y)$ et $B = f(x - y)$ alors $A + B \to f(x)$ et $AB \to f^2(x)$

et $(A - B)^2 = (A + B)^2 - 4AB \to 0$ donc $2A = A + B + A - B \to 2f(x) + 0$; $f(x + y) \to f(x)$ pour y tendant vers 0 et donc f est continue partout et par transfert-renforcement C^∞.

La même méthode s'applique pour les exemples $f(x+y)+f(x-y) = f^2(x)-f^2(y)$; $f(x+y)+f(x-y) = af(x)f(y)$.

VOICI un autre aspect de la méthode $\boxed{\textbf{SÉRIE}}$ et qui est en particulier utilisé, pour une construction de la fonction Γ : Si on donne f M-lipchitzienne de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, chercher F K-lipchitzienne sur $\mathbb{R}$ telle que a étant donné > 0 et λ de $]0, 1[$ on ait $\mathbf{F(x + a) - \lambda.F(x) = f(x)}$; si F existe : On a en décrémentant x de a :

$$\begin{cases} F(x) - \lambda F(x - a) = f(x - a) \\ \lambda F(x - a) - \lambda^2 F(x - 2a) = \lambda f(x - 2a) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda^n F(x - na) - \lambda^{n+1} F(x - (n + 1)a) = \lambda^n f(x - (n + 1)a) \end{cases}$$

Ajoutons membre à membre, nous obtenons après réduction : $F(x) - \lambda^{n+1}F(x - (n+1)a) = \sum_{k=0}^{k=n} \lambda^k f(x - (k+1)a)$; comme F est K-lipthitzienne on a $|F(x - (n+1)a)| \leq |F(x)| + aK(n+1)$ et comme λ est dans $]0, 1[$ le premier membre tend vers $F(x)$ quand n tend vers plus l'infini et F est nécéssairement somme de la série $\sum_0^\infty \lambda^k f(x - (k + 1)a)$ qui converge pour la même raison car f étant M-lipschitzienne elle converge normalement sur tout compact $[-A, A]$ de $\mathbb{R}$, et f étant continue sur ce compact a sa valeur absolue majorée par N et $\lambda^k|f(x - (k + 1)a)| \leq \lambda^k(N + M(k + 1)a)$, il y a donc unicité pour F, qui est continue par convergence normale, il est d'ailleurs immédiat de démontrer que F est $\frac{M}{(1-\lambda)}$ Lipchitzienne.

Attention il peut très bien ne pas exister de solution : Il existe des valeurs de a telles que $g(x+2\pi a) - g(x) = f(x)$, n'ait pas de solution.

Comme on le voit les méthodes de $\boxed{\textbf{de RÉFÉRENCE au LINÉAIRE}}$ de la $\boxed{\textbf{SÉRIE}}$ ou de la $\boxed{\textbf{PSEUDO-DÉRIVATION}}$ sont intimement liées à l'opérateur $\mathbf{\Delta}$: *(outre les références données voir planche 01 184-II, O 2001 384, spm3 p 56 Uniforme continuité $|f(x)| \leq a|x| + b$; voir ces numéros d'exercice dans*

Oral 2001)

Pour la $\boxed{\textbf{PSEUDO-DÉRIVATION}}$ *voir Bréal 89 p 33, O-2000-423 et O2001 ; Blocs Vuibert p 47-48 et Ens 58)*

Équation fonctionnelle sous forme de série : Soit à rechercher f continue sur $[0,1]$ telle que $f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$.

POUR nous limiter, ceci étant plus rare aux concours des grandes écoles, nous de parlons pas des "inéquations fonctionnelles" ni des suites récurrentes qui sont des équations fonctionnelles dans $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{K})$ ou les interventions dans les sous espaces de dimension finie de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, ou les caractérisation d'exponentielles polynômes, ou les composées de fractions rationnelles traités par exemples dans les exercices d'analyse de Chambadal ou de manière plus exhaustive dans le premier tome des œuvres de Gaston JULIA, ou de FATOU. Nous ne parlons pas des limites fonctionnelles non explicitées, par exemple les limites des θ des formules de LAGRANGE rendues fonctionnelles par choix.... En tout cas, il faut bien reconnaitre, qu'outre leur intérêt, les équations fonctionnelles par leur diversité, ainsi que par le nombre non limité et imbriqué de méthodes possibles que la résolution doit mettre en œuvre, peuvent jouer, le même rôle que la géométrie, pour entrainer l'intuition, qui comme la mémoire est un muscle qu'il s'agit d'entraîner... Pour terminer je donne après la bibliographie, un catalogue (partiel...) commenté de références des exemples les plus significatifs :

BIBLIOGRAPHIE GÉNÉRALE

- **CHAMBADAL et** Ovaert : Cours de Math Analyse 2 page 268 ; GAUTHIERS VILLARS 1972 ; ISBN 2-7298-0153-1 *(Exponentielles polynômes)*
- **CHAPELON Jacques** : Cours de l'école Polytechnique 1948-1949 ; page 22 ; *(Pour rang constant)*
- **DELACHET André** : Calcul différentiel et Intégral ; PUF 1956 ; p53-61 et p 117-126 ; *(Pour Agrégation 1949)*
- **FAVARD Jean** : Cours de l'école Polytechnique tome 1 page 229 GAUTHIERS VILLARS 1960 *(Pour rang constant)*
- **LEICHTNAM et SCHAUER** : Exercices tome 1 p 104 ; ELLIPSE 1982 ; ISBN 2-7298-0157-X *(Exponentielles polynômes)*
- **LEICHTNAM et SCHAUER** : Exercices tome 3 p 57 ; ELLIPSE ; ISBN 2-7298-0153-1 *(Exponentielles polynômes)*
- **LELONG-FERRAND,..., VIALLARD** : Problèmes d'Analyse maitrises : p 72-74 ; *(Pour Agrégation 1949)*
- **SCHWARTZ Laurent** : Cours de l'École Polytechnique tome 1 page 333 ; HERMANN 1967 *(Pour rang constant)*
- **TISSIER Alain** : Agrégation interne de Mathématiques Générales
exercices avec solutions p 99-101 ; BRÉAL 1991 ISBN 2 85394439 5 *(Exponentielles polynômes)*

BIBLIOGRAPHIE particulière et commentée :

Sources des exemples des méthodes :

Pour condenser, la collection d'exercices d'oraux Bréal éditeur étant bien connue, je ne cite que l'année et la page, les auteurs changent, mais sont répertoriés sur l'ouvrage.

■ **Généralités :** exponentielles polynômes : outre ceux cités avec cette référence dans la bibliographie générale, RMS juin 95 page 806-808 ; Problème d'ESIM 1982 ; Oral 1985 RMS 85-86 question d'oral 67 posée par ANKONA préparateur de l'Agreg à l'enset ; Bréal algèbre 78-79 page 56 ;

■ **Méthode manipulatoire :** Problème d'Agrégation mathématiques : Analyse 1949 (voir les références Lelong-Ferrand, Delachet, et l'avis de recherche 89 bulletin de l'Apmep numéro 413 page 778).

■ **Méthode "usage d'équations différentielles" :** Bréal 79 p 216 ; Problème Mines 1996 ; RMS juin 1967 page 592 ; Râmis exercices d'analyse Masson 1968 page 343 ; Râmis cours de mathématiques spéciales tome 2 p 531 Masson 1970 ; RMS juin 1972 p 277 ; RMS octobre 72 page 89-90 ; RMS janvier 73 page 161 ; Enseignement mathématique (Genève) janvier 1964 page 149 ; SYSTÈME : Chambadal et Ovaert Analyse 2 p 269 Gauthiers Villars 1972 ; et Cahier prépa 1984 (Bréal éditeur) écoles Centrales Mines-Ponts mathématiques analyse par Poumarède et Alardet page 90-91 ; Tétrel exercices d'analyse p 172 Croville editeur 1964 11ème édition ; Cité page 90 de la RMS octobre 72 : Mr Legal a démontré dans l'American Mathematical Monthly 1963 tome 70 numero 3, que si f réelle vérifie l'INÉQUATION

FONCTIONNELLE $f^2(x) - f^2(y) \geq f(x+y)f(x-y)$, on a nécéssairement l'égalité ! *(Pour cela établir $f(0) = 0$ par $x = y = 0$; puis $f^2(-x) \leq f^2(x) \leq f^2(-x)$ par $y = -x$ donc $f^2(-x) = f^2(x)$; Si b est tel que $f(b) = f(-b)$ alors $f(b) = 0$ par $x = 0,\ y = b$ et f est impaire ; puis $f^2(x) \leq f^2(x) - f(x+y)f(x-y) = f^2(x) + f(x+y)f(y-x) \leq f^2(x) + f^2(y) - f^2(x) = f^2(y)$).*

■ **Méthode de densité :** RMS novembre 1980 page 215 exercices d'oraux 10 et 13 ; Bulletin de l'APMEP numéro 319 juin 1979 p 367-375 Article de J-Legrand Irem de Bordeaux ; Bulletin de l'APMEP numéro 398 avril 95 p 580-584 auteur du sujet Marie Laure Chaillou ; APMEP 392 page 81 ; Calvo et Boschet Exercices d'analyse MP1 Collection U éditeur Colin 1970 ; f(x)+f(y)=f(x+y) Avis de recherche 13 page 36 quadrature 13 septembre 92 qui cite le livre de Boas : "a primer or real functions" qui dit que si f n'est pas continue, alors elle n'a de limite en aucun point, elle n'est pas mesurable et son graphe est dense dans $\mathbb{R}^2$; G. Boiset pense que l'image d'un intervalle non réduit à un point n'est jamais un intervalle ; Quadrature 14 page 37 de novembre 1992 cite le bulletin de l'APMEP 322 de février 80 page 155 ; Le bulletin de l'APMEP 384 juin 1992 page 357 donne l'équation fonctionnelle $f(\sqrt{x^2+xy+y^2}) = f(x)f(y)$ qui se traite facilement avec les techniques citées dans cette méthode ;

■ **Méthode de la monotonie :** Petit Archimède 53 décembre 1978 p 49-50 ; Râmis Odoux Deschamp (alias ROD) cours de mathématiques spéciales tome 3 p 138 Masson ISBN 2-225-42856-5 ; Quadrature 3 page 51 ; Problème de centrale 1984 ; Problème de concours général 1984 ; Grands classiques par Aubonnet page 24 Bréal éditeur 1981 ISBN 2-85394115-9 ;

■ **Méthode par référence au linéaire :** Bréal 1984 page 21 ISBN 2 85394 200 7/F 128 ; Leichtnam et Schauer Exercices d'analyse tome 3 page 84 ISBN 2-7298-0153-1 ;

■ **Méthode de la série ou du développement limité :** Flory topologie analyse, exercices avec solution page 32-33 Vuibert 1976 ISBN 2-7117-2146-9 ; Bréal 19874 page 22 ISBN 2 85394 200 7/F 128 ; Cahier prépa écoles centrales Mines Ponts Option P' par Clarisse, Mallet, Vidiani Bréal éditeur 1984 ISBN 2-86769-039-0 ; Mathématiques du capes Interrogation oral page 229-231 Hermann éditeur 1976 ; APMEP 392 ISSN 0240-5709 Février 1994 énoncé 226 page 81 (énoncé de Marie Laure Chaillout) ; Oral X numéro 19236 RMS octobre 1965 page 89-92 ; Concours Enset A2 1979 ; RMS octobre 80 p 175-181 ; Pour l'exemple "sans solution" RMS juin 1989 page 441 ;

Leichtnam et Schauer exercices corrigés de mathématiques tome 3 Ellipses1982 ISBN 2-7298-0153-1 page 84 ; Centrale 1 1996 ; Les grands classiques de mathématiques par Lepez Analyse Bréal 1995 ISBN 2 85394 835 8 page 63-64 ; Oral 1996 numro 380 ; Bréal 1989 page 144 ; épreuve ENS LYON 1990 ;

CATALOGUE (partiel...) de références et d'exemples :

éventuellement très commentés

L' ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE (Case postale 240 CH-1211 Genève 24 Suisse) : janvier 64 p147 $f(x + yf(x)) = f(x)f(y)$; mars 65 p 251 $A(f(x)) = A(x)+1$; $g(g(x) = g(x)$ p 250 ; juillet 84 p 271 ; $f(x+1) - f(x) = \delta(x)$ et p 288 octobre 67 + Leichtham et Schauer 3 p 84 ; juin 79 p 93 $\varphi(t) = \varphi^c(\frac{t}{\sqrt{xc}})$;

Année 1956 équation fonctionnelle des fonctions θ de JACOBI ; janvier 57 $F(x) - bF(ax) = g(x)$ page 72 équation fonctionnelle vérifiée par la fonction de WAERDEN ;

Monographie de Georges VALIRON Numéro 8 : fonctions entières d'ordre fini : équation de POINCARÉ $f(zs) = P(z)f(z) + R(z)\ |s| > 1$ p 79 et $\varphi(z^2) = g(z)g(-z)$. Provient de cours donnés par G. Valiron au Caire et à Alexandrie en 1948 ; (Pour Valiron voir livre de Schwartz un mathématicien aux prises avec le siècle p 76, 175, 289, 303)

VOICI MAINTENANT QUELQUES EXEMPLES TRÈS DIVERS, POUR APPATER LE LECTEUR

On remarquera l'extrême diversité des théories ou phénomènes en cause.

(les références sont systèmatiquement indiquées en italique après l'énoncé)

EF 1. *Déterminant*

(Bréal 84 p 19) E étant l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ telles que $\int_0^\infty g^2(t)dt$ convergent, rechercher f avec $f, f', f"$ dans E telle que $\begin{vmatrix} \int_0^\infty \mathbf{f^2} & \int_0^\infty \mathbf{ff'} & \int_0^\infty \mathbf{ff"} \\ \int_0^\infty \mathbf{ff'2} & \int_0^\infty \mathbf{f'^2} & \int_0^\infty \mathbf{f'f"} \\ \int_0^\infty \mathbf{ff"} & \int_0^\infty \mathbf{f'f"} & \int_0^\infty \mathbf{f"^2} \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$

Solution : les colonnes sont liées et la positivité de l'intégrale implique que f est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre linéaire à coefficients constants, éventuellement nuls ; f est donc exponentielle polynôme ; il faut vérifier en particulier la convergence des intégrales.

EF 2. FATOU-ABEL

(FATOU SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 1920 tome 48 page 216, 257) $R(h) = h(\varphi)$, $F \circ R = sF$ page 299 et $\mathbf{F \circ R_p = F \circ R + p}\alpha$ "équation fonctionnelle d'ABEL" ; *(voir aussi le tome 47 1919 pages 214, 201, 222, 41 seconde partie)*

EF 3. JULIA-SCHRÖDER

(JULIA œuvres complètes tome 1 Gauthiers villars itération des fractions rationnelles page 89) équation de Schröeder $\mathbf{y \circ f = y}$;

EF 4. Polynomiale

(Epistémon 1 p 92 Cédic et Ramis exercices d'algèbre Masson ; Achache Ex de Capes Hermann p 230, APM 398) $\mathbf{P(x+1) + P(x) = Q(x)}$;

EF 5. TRIGONOMÉTRIE

(Epistémon 2 p94 Bouligand 276 Oral 91 numéro 33) $\mathbf{f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)}$;

EF 6. FOURIER

(RMS mai 95 p 752) Trouver toutes les fonctions C^∞ $2\pi-$périodiques vérifiant $f(2x) = 2\sin x f'(x)$. On procède par série de Fourier et on ne trouve que $b(1-\cos x)$ et $a \sin x$.

EF 7. $\boxed{\text{O 99-3V.tex -86 = O 00 -68 Opérateur } \Delta^n}$

(O-99 86 X PC)

Noyau de Ker Δ^n

Soit E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit une application H de E dans E, en posant (opérateur différence) en posant H(f)(x)=f(x+1)-f(x). Soit n $\in \mathbb{N}^*$, caractériser les applications f telles que $H^n(f) = 0$.

BIB : Le type d'exercice (O187-2001) est très classique, en connexion avec le thème Δ avec différentes variantes, soit que $f(\frac{x}{2})$ soit remplacé par $f(x)$ ou $f(\frac{x+1}{2})$, soit qu'on demande l'injectivité de u et sa non surjectivité, soit de caractériser $u(E)$, soit que E soit remplacé par d'autres espaces fonctionnels, soit de calculer $|||u|||$, soit enfin que la recherche des fonctions propres soit remplacée par des équations précises $u(f) = 2f$ ou $u(f) = 4f$, qui sont en fait la recherche d'espaces propres particulier ; voici quelques références O2000 numéro 160 (corrigé (par Gozard) sur le fichier mis à disposition de la bourse 2001 ; Bréal 83 page 31 ; Oral 84 180 ; oral 89 numéro 3 ; Bréal 86 page 126 ; Bréal 89 page 221 ; Lyon 3 1990 ; Bloc Vuibert prépas page 142 ; Spm 3 p 84 pour une équation fonctionnelle similaire ; ronéo équations fonctionnelles (méthode de la série p 4-5) ; Arnaudies tome 2 (Dunod 1972) page 604 exo "12" comme par hasard ; Exercices Lelong p 237 ; Voir aussi O-2001 165 et 168, 384, planche 184-II)

(Cet exercice (O-86 1999) est aussi celui O-68 PC 2000)

(A Pascal me dit que cette question est intervenue dans un problème d'Agrégation interne (89 dans bulletin vert ups 91), Esperet rectifie la forme trop rapide que j'avais donnée par e-mail, avant de rédiger l'exercice)

Il devrait être possible grâce aux opérateurs de composition et la formule de GRÉGORY, qui relie Δ et D, de citer un morphisme (celui qui le fait me le signale), qui remplace l'équation par $D^n(g) = 0$ on revient en arrière en remplaçant les constantes, par ce qui en tient compte pour l'opérateur H : les fonctions 1-périodiques !

On fait une amorce de récurrence : n=1 $f(x+1) - f(x) = 0$ équivaut à f 1-périodique.

- $n = 2$ $H^2(f) = 0 \longleftrightarrow H(H(f)) = 0 \longleftrightarrow H(f) = \varphi$, avec φ arbitraire 1-périodique ;

On pose (comme pour les opérateurs itérés) $f = u\varphi$ *("Problème" pour les valeurs de x telles que $\varphi(x) = 0$)* ; alors $\mathbf{f(x+1) = u(x+1)}\varphi\mathbf{(x+1) = u(x+1)}\varphi\mathbf{(x)}$ et donc $H(u\varphi)(x) = \varphi(x)H(u)$ (ce qui revient à remplacer u par $H(u)$. Une récurrence immédiate donne $\boxed{H^p(u\varphi)(x) = H^p(u)\varphi(x)}$ pour φ 1-périodique.

On est ramené pour le cas n=2 à $H(u) = 1$ dont une solution immédiate est le polynôme X ; comme la solution de l'équation homogène associée est $h = \varphi_1$ 1-périodique arbitraire, on a $u = X + \varphi_1$ et $H^2(f) = 0$ a pour solution $f(x) = x\varphi(x) + \varphi(x)\varphi_1(x) = x\varphi(x) + \varphi_2(x)$ avec des notations évidentes.

L'hypothèse de récurrence naturelle pour $\mathbf{p \leq n-1}$ est donc que le noyau de $\mathbf{H^p}$ est constitué des fonctions de la forme $\boxed{\mathbf{f(x) = \sum_{i=0}^{p-1} u_i(x)x^i}}$ où les $\mathbf{u_i}$ sont des fonctions 1-périodiques arbitraires.

Le tranfert de récurrence se fait par $H^n(f) = 0 \iff H(H^{n-1})(f) = 0 \iff H^{n-1}(f)(x) = \varphi(x)$ avec φ 1-périodique ; On pose $f = u\varphi$ (**Réfléchir en cas de valeurs de x annulant $\varphi(\mathbf{x})$**) et on est ramené comme plus haut à $H^{n-1}(u) = 1$; une solution évidente est $P_n = \frac{1}{n!}X^n$ (le coefficient n'importe pas, en multipliant la fonction périodique arbitraire par $\frac{1}{n!}$) ; Par structure des solutions $u = P_n + K$ où K est la solution générale de l'équation homogène associée, dont par hypothèse de récurrence, nous connaissons la forme ; en multipliant par φ on trouve la forme de f qui est bien celle indiquée par l'hypothèse de récurrence, dont il y a bien transfert. La réciproque est triviale ;

La forme trouvée, incite à trouver une méthode par morphisme permettant de passer de D à H.

Une autre méthode (mais moins constructive, mais évitant le problème des x où $a_i(x) = 0$) consiste à choisir f arbitraire dans $[0, n-1[$ et à dire que la relation $\Delta^n(f) = 0$ donnant $f(x+n)$ la définit bien dans les intervalles suivants ou précédents.

Seconde solution :

C'est plutôt un exercice d'algèbre et la démonstration se fait bien par récurrence.

Je ne reviens pas sur l'initialisation : $\Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x) = 0$ équivaut à $f(x) = a_0(x)$ est 1-périodique.

Mais ensuite on écrit : $\Delta^{n+1}(f)(x) = 0$ équivaut à $\Delta^n(\Delta(f(x))) = 0$, ce qui donne en utilisant l'hypothèse de récurrence : $\Delta(f(x)) = f(x+1) - f(x) = a_{n-1}(x)x^{n-1} + ... + a_0(x)$.

De plus l'application $\Delta : R_n[x] \longrightarrow R_{n-1}[x]$ est surjective, ce que l'on voit facilement en appliquant la formule du rang, le noyau étant réduit aux polynômes constants. Donc on trouve des polynômes $Q_k \in R_n[x]$ tels que $\Delta(Q_k(x)) = x^k$ ($Q_0(x) = x$, etc...).

On a alors : $f(x+1)-f(x) = a_{n-1}(x)[Q_{n-1}(x+1)-Q_{n-1}(x)]+...+a_0(x)[Q_0(x+1)-Q_0(x)] = g(x+1)-g(x)$ avec :

$$g(x) = a_{n-1}(x)Q_{n-1}(x) + ... + a_0(x)Q_0(x)$$

d'où $f - g \in \ker \Delta$ et $f - g$ est 1-périodique ce qui achève la récurrence.

(l'analogie avec l'opérateur de dérivation est sur la méthode et donc sur le résultat et non pas l'inverse).

(Troisième variante)

On pose $\mathcal{P} = \{f; 1-\text{périodique}\}$; Faisons l'hypothèse de récurrence HR_n :

$Ker\Delta^n = \{f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R}); \exists(p_0,...,p_{n-1}) \in \mathcal{P}\ \forall x\ f(x) = \sum_0^{n-1} p_k(x)x^k\}$

Alors soit f telle que $\Delta^{n+1}(f) = 0$. On a $\Delta f \in Ker\Delta^n$, donc $f(x+1)-f(x) = p_0(x)+xp_1(x)+...+x^{n-1}p_{n-1}(x)$, $p_k \in \mathcal{P}$.

C'est une équation affine $f(x+1) - f(x) = P(x)$.

Cherchons <u>une</u> solution g telle que $g(x+1) - g(x) = P(x)$ de la forme $g(x) = x\big(a_0(x) + ... + a_{n-1}x^{n-1}\big)$.

Alors $\Delta g(x) = a_0(x) + \Delta x^2 a_1(x) + ... + \Delta x^n a_{n-1}(x) = a_0(x) + (2x+1)a_1(x) + (3x^2+3x+1)a_2(x) + ... = p_0(x) + xp_1(x) + ... + x^{n-1}p_{n-1}(x)$.

En identifiant on trouve $\begin{cases} a_0 + a_1 + ... + a_{n-1} = p_0 \\ 2a_1 + 3a_2 + ... = p_1 \\ .... \\ na_{n-1} = p_{n-1} \end{cases}$

Système linéaire qui donne $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ toutes $1-$périodiques.

Alors $\Delta(f) = P \iff \Delta f = \Delta g \iff f = g + p,\ p \in \mathcal{P}.\ f(x) = p(x) + a_0(x)x + ... + a_{n-1}(x)x^{n-1} = \sum_0^n p_i(x)x^i\ p_1 \in \mathcal{P}$.

La réciproque se fait en remontant.

Au fond si l'on munit $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ d'une structure de $\mathcal{P}-$ module, Δ est $\mathcal{P}-$linéaire, et $(1, x, ..., x^{n-1})$ est une $\mathcal{P}-$base de KerΔ^n.

Il y a un article de pour la science sur l'universalité de la méthode de récursivité.

EF 8. *EF : PSEUDO-DÉRIVATION*

Voir ce qui est dit au moment de la méthode SÉRIE et l'opérateur Δ : *(Bréal 89 p 33, O2000-423, O2001, Ens 58, Blocs Vuibert p 47-48)*

EF 9. O99-87 : EF avec radical

(O 87 X PC)

E.F. Putnam 47

Déterminer les applications continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionnelle $\forall(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ $\mathbf{f}(\sqrt{\mathbf{x^2+y^2}}) = \mathbf{f(x)f(y)}$

(27 06 03 Pierre Jean Hormière propose de poser $g(x) = \ln f(\sqrt{|x|})$, qui ramène à l'équation $g(x+y) = f(x)+g(y)$)

(Cet exercice d'après le bulletin d'APM 390 septembre 93 p495-496, a été proposé par Cuculière mais remplacé par $f(\sqrt{x^2+xy+y^2}) = f(x)f(y)$)

(Le concours américain Putnam (que l'on voit citer dans Americain Math Monthly) date de 1938 ; un recueil existe : Gleason, Greenwood, Kelly, the William Lowell Putnam Mathematical Competition, Problems and Solutions, 1938-1964, the MAA, 1980 ; En recherchant "Putnam Competition" sous Altavista on a 800 sites, et les résultats récents ;)

Nous allons appliquer la méthode Sherlock Holmes, qui consiste à rassembler le plus possible d'indices pour confondre les coupables, ce qui signifie en l'occurrence : identifier les applications f qui satisfont à cette équation fonctionnelle.

✂ L'affectation $x = y = 0$ donne $f(0) = f(0)^2$ donc $f(0) \in \{0,1\}$.

✂ Si $f(0) = 0$, l'affectation $y = 0$ donne $f(|y|) = 0$, f est nulle sur $\mathbb{R}_+$.

✂ Si $x = y < 0$, $0 = f(|x|\sqrt{2}) = f(x)^2$, et donc f est nulle sur $\mathbb{R}$.

Si f n'est pas la fonction nulle $\boxed{f(0) = 1}$

✠ $y = 0$ donne $f(x) = f(|x|)$: f est donc PAIRE.

✡ $x = y$ donne $f(|x|\sqrt{2}) = f(x)^2 \geq 0$, donc en posant $t = x\sqrt{2}$ $f(t) = [f(\frac{t}{\sqrt{2}})]^2$ et f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

✢ Si $f(x_0) = 0$, alors $f(\sqrt{y^2+x_0^2}) = 0$ et f est nulle sur $[|x_0|, +\infty[$.

⌘ D'après ✡ , si $f(t) = 0$ alors $[f(\frac{t}{\sqrt{2}})]^2 = 0$ et en réitérant $f(\frac{x_0}{(\sqrt{2})^n}) = 0$ et par continuité $f(0) = 0$ ce qui a été écarté : donc si $f(0) = 1$, f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et on peut considérer la fonction continue g définie par $g(x) = \ln(f(x))$.

⌘ Mais en intégrant les deux membres de la relation par rapport à y dans l'intervalle $[a,b]$, "à choisir" on a $f(x) = \frac{\int_a^b \sqrt{x^2+t^2}dt}{\int_a^b f(t)dt}$; Dans l'intégrale du numérateur on fait le changement de variable $u = \sqrt{x^2+t^2}$; on prend $0 < a < b$, donc $0 < t = \sqrt{u^2-x^2}$, dont le radical ne s'annule pas (donc est dérivable) puisque $0 < a \leq t \leq b$. et ainsi $f(x) = \frac{\int_{\sqrt{x^2+a^2}}^{\sqrt{x^2+b^2}} f(u)1/\sqrt{u^2-x^2}du}{\int_a^b f(t)dt}$.

D'après les propriétés des intégrales dépendant d'un paramètre, f est C^1 et par transfert immédiat $\mathbb{C}^\infty$. Ainsi que g ;

✣ En prenant le logarithme des deux membres de la relation $f(x\sqrt{2}) = f(x)^2$, on a $g(x\sqrt{2}) = 2g(t)$, et en dérivant deux fois $g"(t) = g"(t\sqrt{2})$; posant $x = t\sqrt{2}$, on a $g"(x) = g"(\frac{x}{\sqrt{2}}) = ... = g"(\frac{x}{(\sqrt{2})^n}) = g"(0) = \lambda$ par continuité ;

❖ En intégrant $g'(x) = \lambda x + \mu$; comme g est paire, g' est impaire et $\mu = 0$ et $g(x) = \lambda\frac{x^2}{2} + \ln(|C|)$; Mais comme $g(0) = \ln(f(0)) = \ln 1 = 0$, on a $\ln|C| = 0$ et $g(x) = \lambda\frac{x^2}{2}$ et enfin $\boxed{\mathbf{f(x) = e^{\lambda\frac{x^2}{2}}}}$.

Un vérification est immédiate : cette fonction est bien solution non nulle de l'équation fonctionnelle.

EF 10. *O 99-89 Involutive et point fixe Olympiade 83*

(O 89 X PC)

EF Olympiade 83

Déterminer les applications f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant l'équation fonctionnelle : $\forall(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ $\mathbf{f(xf(y)) = yf(x)}$ et tendant vers 0 quand x tend vers plus l'infini.

Il faut une certaine dose de mauvaise foi ou d'inconscience, pour oser proposer à l'oral (en X-PC) cet exercice qui est le premier (proposé par la Grande Bretagne) des Olympiades internationales PARIS mercredi 6 juillet 1983, ou alors avec un minimum d'indications ou de guide ? *(un exercice du même genre a été proposé aux Olympiades 1990 exo 4, le y du second membre étant au dénominateur)*

Soit f une telle fonction.

Pour $y = x$, l'équation fonctionnelle donne $f(xf(x)) = xf(x)$, et donc $a = xf(x)$ est invariant (POINT FIXE) par f $(a \neq 0)$.

Soit a un invariant par f : $a = f(a)$. Pour $n \geq 1$, $f(a^n) = f(a^{n-1}f(a)) = af(a^{n-1}) = ... = a^n$.

$a = f(a) = f(1a) = af(1)$ et donc $\boxed{f(1) = 1}$.

Pour $n < 0$, $af(\frac{1}{a}) = f(\frac{1}{a}f(a)) = f(1) = 1$ donc $f(\frac{1}{a}) = \frac{1}{a}$.

En conclusion $f(a^n) = a^n$, pour tout n entier relatif.

La seconde condition de l'énoncé, de limite nulle en plus l'infini, implique que $\{a^n = f(a^n) | n \in \mathbb{Z}\}$ est borné, et comme $a > 0$, $a = 1$.

Pour tout x strictement positif, $xf(x) = 1$, soit $\boxed{\mathbf{f(x) = \frac{1}{x}}}$.

Inversement on vérifie immédiatement que cette fonction vérifie l'équation fonctionnelle et la condition de limite nulle en plus l'infini.

BIB : O99 93 (X-PC) ; Analogues Quadrature 34 p 47 Olympiade 98 ; Olympiade 1994 ; Olympiade 90 exo 4 ;

EF 11. *INÉQUATIONS FONCTIONNELLES*

(Parodi Valeurs propres (Gauthiers Villars 1959 page 19)) $|\varphi_\mathbf{1}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})| \leq |\varphi_\mathbf{2}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})| + |\varphi_\mathbf{3}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})|$; solution : former le déterminant circulant des φ_i, le théorème d'HADAMARD donne que le déterminant doit être nul ;

EF 12. *Inéquation et droites affines d'appui, enveloppes convexes, dualité*

(Rivaud 3 page 25 et 70 et 49, Pb X 81? cours de l'école Polytechnique : analyse Hilbertienne par Laurent Scwhartz pages 22, 23, 41, chimie centre 1977 ; RMS mai 1978) $\mathcal{L}^\mathbf{2}\varphi \leq \varphi$; $\mathbf{f}^{\circ\circ\circ} = \mathbf{f}^\circ$;

EF 13. *Inéquation et Isométrie*

(Epistémon analyse p 80) $|\mathbf{f(x)} - \mathbf{f(y)}| \geq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, $f(kx) = f(x)$;

EF 14. *Inéquation sous linéaire additive*

(Rallye de Bretagne 79 E10) $\mathbf{f(x+y)} \leq \mathbf{f(x)} + \mathbf{f(y)}$ et $\lim_{+\infty} \frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{x}} = \ell$;

EF 15. *Inéquations fonctionnelles*

(Exercices d'Olympiades : IG Bérrard 83, RMS octobre 1989, Olympiades internationales 1977) Trouver le sup des f de $\mathcal{F}([\mathbf{O},\mathbf{1}],\mathbb{R})$ vérifiant $\mathbf{f(xy)} \leq \mathbf{1} - \frac{\mathbf{(x+y)}}{\mathbf{2}}$; Suite telle que $\mathbf{f(n+1)} > \mathbf{f(f(n))}$;

EF 16. *Inéquations fonctionnelles*

(stage IG Bérrard 1975 (Major agrégation 1946) Trouver f telle que $|\mathbf{f(x+a)} - \mathbf{f(x)}| \leq \mathbf{a^2}$; $\mathbf{f(x+a^2)} \geq \mathbf{f(x)+a}$; $\mathbf{f(x)+f^{-1}(x) = 2x}$; *BIB : Original mis chemise Fonctions et DL : stage d'Analyse pour les professeurs de terminale 25-26 novembre 1975 à Grenoble (du temps où le ministère avait des crédits pour investir dans la formation continue et de haut niveau des professeurs !), chemise pb 37 sup 82-83 ; fonctions bizarres : Vanves, spé nov 75 p 179 nu 330, février 76 p 260 num 209, Chambadal II et Abou)*

EF 17. Racine carrée d'une fonction : Rufus et Menger ;

(Agrégation 1949, Delachet que sais je PUF calcul différentiel et intégral numéro 466, Berge Graphe et hypergraphes p 37-38 Dunod (exemple de Rufus-Isaac) ; concours général 1983 ; Article (excellent) RMS avril 1984 ; Flory exercices D'analyse page 30 Vuibert ; American mathematical Monthly février 1984 et novembre 1981 et octobre 82, Achache exercices de Capes p 220 Hermann ; Oral 1993 TPE (RMS) numéro 487 ; Quadrature 17 ;)
$\mathbf{g^2 = f}$ et l'exemple particulier de RUFUS-ISAAC où f est affine $f(x) = ax + b$: si $a > 0$ on a l'exemple de MENGER $g(x) = x\sqrt{a} + \frac{b}{1+\sqrt{a}}$; Si $a < 0$ le problème est beaucoup plus difficile (voir le livre cité de Berge).

EF 18. $\mathbf{f'(x) = f(x^m)}$

Capes 1984 et note RMS mai 1985)

EF 19. VALIRON, WOLFF, DENJOY, POINCARÉ, ABEL, RAMANUJAN Loxodromie

(Georges Valiron Fonctions analytiques PUF 1954 p 131, 151 ; Valiron tome 2 théorie des fonctions p 55, 385, 409 et 479 MASSON 1955) $\mathbf{G \circ F = F}$; Fonctions de POINCARÉ et fonctions loxodromiques : $\mathbf{P(kz) = (1{+}z)P(z)}$; équation fonctionnelle d'ABEL $\varphi(sz) = \varphi(z) + 1$; Pour une autre équation d'ABEL : $\mathbf{L(x) + L(y) + L(xy) + L(\frac{x(1-y)}{(1-xy)}) + L(\frac{y(1-x)}{(1-xy)}) = 3L(1)}$ attribuée à ROGERS, qui l'a redécouverte, dans les carnets de RAMANUJAN (voir HARDY page 115 collection Belin 1985)) et page 409 de Valiron $f(z) = z + f(z^2)$;

EF 20. Équation MODULAIRE

(Pour la science avril 88 page 38, 40, 42 ; Julia et Fatou note d'Hervé) Equation modulaire $[\lambda(\mathbf{q})\lambda(\mathbf{q^7})]^{\frac{1}{8}} + [(\mathbf{1} - \lambda(\mathbf{q}))(\mathbf{1} - \lambda(\mathbf{q^7}))]^{\frac{1}{8}} = \mathbf{1}$; Quand on commence à parler d'équation modulaire, Ramanujan n'est pas loin.... Ces équations relient $f(x)$ et plusieurs $f(x^m)$; ils sont en connection avec la théorie des fonctions elliptiques, voir Allessandri (Masson 1999), Zismann (Dunod 1999), Hardy p 113 Falting et Mordell (index et pour la science Aout 1986) ;

EF 21. MORPHISME, mécanique Quantique

(Math appli octobre 2000 article de Jean Bass p 57-64, Mines 1984 (chemise pb 88-89 + RMS + cahier prépa LGV)

Trouver dans un anneau toutes les fonctions vérifiant $f(x.y) = f(x).f(y)$

EF 22. EF tangente 1

(Bouligand Math spéciales par les problèmes p 90-92 et 276 Vuibert ; RMS 4-1970 ; Oral 91 numéro 132 ; RMS juin 81 p 383 ; Enac 1987) $f(x + y) = f(x) + f(y)$; $\mathbf{f(\frac{x+a}{1+ax}) = f(x) + f(a)}$; La spécialisation $y = 1$, si elle est possible donne $f(1) = f(\frac{1+x}{1+1x}) = f(1) + f(x)$ donc pour $x \neq -1$ $f(x) = 0$; Les changements de variables $x = \tanh u$ ou $x = \coth u$ donnent des solutions mais qui ne sont pas continues en ± 1.

EF 23. EF tangente 2

(Bréal 85 p 26, RMS juin 84) Trouver les fonctions f dérivables en 0 telles que $\mathbf{f(2x) = \frac{2f(x)}{1+f^2(x)}}$;

EF 24. f'(x)=f(kx)

(Rivaud 3 p 113 Vuibert , Problème X 1974 et note DESCHAMP RMS novembre 81 ; Pb X 1989 ; RMS février 90 Programme Quercia disquette f2x)

EF 25. Équation différentielle avec RETARD, et limite uniforme de périodiques

(Ens 1950 et 1963 Lentin page 137 et INA 79 Mines 2 94, RMS octobre 2000 R374 p 423 : limite uniforme de périodiques si les périodes sont bornées) $\mathbf{f'(x) = f(x + a)}$.

EF 26. CONCOURS GÉNÉRAL 1979

(Voir aussi les références Δ *)* $\mathbf{f(x) = f(\frac{x-1}{2}) + f(\frac{x+1}{2})}$; une solution est $\ln(2\cos(\pi\frac{z}{2}))$ mais Mr Choquet en utilisant $\alpha(t) = [\cosh\frac{t}{2} ... \cosh\frac{t}{2^n}]$ qui vérifie $\alpha(t) = \alpha(2t)\cosh t$ obtient en utilisant le paramètre $b > 0$ et z dans la bande $-1 < Re(z) < 1$ la somme : $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left\{[\alpha'(b2^n) - \frac{\alpha(b2^n)}{b2^n}]\sinh(b2^n z) + \alpha(b2^n)z\cosh(b2^n z)\right\}$ et bien sûr bien d'autres par le procédé de condensation des singularités cher à LEBESGUE : $f = \int f_b d\mu(b)$ où μ est une mesure ou une distribution sur $]0, +\infty[$..... (voir la critique constructive sur le sujet, APMEP 320 p 659).

EF 27. *exemple d'ADLER*

Enfin voici un exemple du à Monsieur Adler proposé dans le bulletin APM 247 : trouver toutes les fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant : $\begin{vmatrix} \mathbf{f(2x)} & \mathbf{f(x+y)} & \mathbf{f(x+z)} \\ \mathbf{f(x+y)} & \mathbf{f(2y)} & \mathbf{f(y+z)} \\ \mathbf{f(x+z)} & \mathbf{f(y+z)} & \mathbf{f(2z)} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$.

Solution : posant $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{a}{2}+h$ et $z = \frac{a}{2}+2h$, on se ramène à $det(f(a+(i+j-1)h) = 0$, fixant a et h on écrit que les colonnes sont liées et posant $f(a+hX) = F(X)$ on obtient $\lambda F(0) + \mu F(1) + \nu F(2) = 0$ et deux analogues décalées, discutant suivant le rang de la matrice des $F(i+j-1)$ on montre le transfert de cette relation pour obtenir une équation aux différences finies ce qui donne pour X de $\mathbb{N}$ les solutions possibles $F(X)$ combinaison de s^X et de t^X si s est distinct de t, ou de s^X et de Xs^X sinon. L'indépendance des EXPONENTIELLES POLYNÔMES sur l'ensemble de cardinal infini $\mathbb{N}$ où elles prennent une infinité de valeurs, donne que ces relations sont valables pour X réel, en utilisant le raccord de continuité sur $\mathbb{N}$. Une vérification impose $s = 1$ quand $s = t$.

EF 28. *Équation intégrale de FREDHOLM, à noyau de POISSON*

(Magnin exercices d'analyse p 115-117 Ellipses 1988 ISBN 2-7298-8857-8) $0 < r < 1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: trouver les fonctions réelles f intégrables sur $[-\pi, \pi]$ telles que $\lambda\mathbf{f(x)} = \frac{\pi^2 - x^2}{4} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-t)+r^2}\mathbf{f(t)dt}$, $\forall \mathbf{x} \in [-\pi, \pi]$. On décompose en série de Fourier le Noyau de Poisson sous l'intégrale.

EF 29. *Équation fonctionnelle de POINCARÉ*

(Monographie de l'Enseignement mathématique (Genève 1960)

par Georges VALIRON page 78) $\mathbf{f(zs)} = \mathbf{P_0(z)f(z)} + \mathbf{P_1(z)}$, $|\mathbf{z}| > \mathbf{1})$; On utilise la méthode des fonctions majorantes ; d'autres exemples page 79 donnent des fonctions à croissance très lente.

EF 30. *Équations fonctionnelles du bulletin de l'APMEP : Marie Laure CHAILLOU)*

(bulletins 394 p 474, 396 p 606, 398 p 580-586 et 403) $a > 0, c \neq 0$, f continue vérifiant $\mathbf{f \circ f(x) + cf(x) = ax + b}$ est affine ; $\mathbf{f(x)} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{f}(\frac{x+k}{n})$, f de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; f définie sur $\mathbb{R}$ continue en un point et vérifiant, a étant un paramètre réel $\mathbf{f(x+y) + f(x-y) = af(x)f(y)}$; étudié et cité dans la méthode du développement limité. *(APM 369 p 427)* $f(\frac{x_1^p + \ldots + x_n^p}{n}) = \frac{f(x_1^p) + \ldots + f(x_n^p)}{n}$;

EF 31. *EF CALVO*

(Calvo exercices d'analyse MP1 page 105 Colin 1970) Chercher f continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, vérifiant $\mathbf{f(x)} + \mathbf{f(y)} = \mathbf{f}[(\mathbf{x^n} + \mathbf{y^n})^{\frac{1}{n}}]$.

EF 32. *EF du flot et de KIRCHHOFF*

(Berge graphes et Hypergraphe p 72-95, Dunod 1970 ; Berge théorie des graphes et de ses applications p 240 Dunod 1963)

Problème de la Tension $\theta_i = \mathbf{t}(\textbf{extrémité terminale de l'arc i}) - \mathbf{t}(\textbf{extrémité initiale de l'arc i})$; Pour les théories des systèmes de réseaux électriques voir (en particulier le problème de Dirichlet Neumann : Dans le livre de Schwartz précédemment cité p 288, Godement n'a jamais pardonné à Neumann d'avoir abandonné les mathématiques, pour créer l'informatique) Duffin Non linear Networks 11 Bulletin AMS 53, 1947 p 963-971 ; Le théorème d'Olga Taussky sur les déterminants du système de Kirchhoff à résistances positives : Taussky A recurring theorem on determinants American Mathematical Monthly 56 1949 p 672-676 ; Voir aussi la méthode de KRON pour la résolution de ces systèmes : P. Le CORBEILLIER analyse matricielle des réseaux électriques p 33 (Dunod éditeur) ; X PC 1ère 1999 rms nov 99 ; Bulletin ups janvier 2003 page 35 ;

EF 33. *Produit VECTORIEL*

(APMEP 336, p 862-864, Q et R RMS 3 2001-2002 le fait par transformations élémentaires TE, p 231-233, chemise péréalo, Lebœuf exercices d'algèbre p 183 ellipse 1992 ISBN 2 8298 4206 3 ; Tissier Préparation à l'agrégation interne p 469 Bréal) Trouver f de $\mathbb{R}^3$ euclidien dans lui même vérifiant pour tous vecteurs x, y $\mathbf{f(x \bigwedge y) = f(x) \bigwedge f(y)}$; Paradoxalement, il n'est nul besoin de supposer f linéaire ; la linéarité est une conséquence de l'équation, comme pour les isométries quadratiques ;

EF 34. | *Fonctions multiplicatives de l'Arithmétique : Théorème d'ERDÖS*

(Polya et Szegö Problems and theorems in Analysis II p 120-124, Springer ISBN 0-387-90291-0 ; Hardy et Wright an Introduction to the theory of Numbers 5ème édition p 240-242 Oxford at the Clarendon press 1979 ISBN 0 19 853170 2 ; Bloc Vuibert p 8 ; RMS juin 92 p 517 Oral ens 139 ; Capes 1980+ (Grivaux : AMM Monthly octobre 1986) ; Quadrature 29 ; portrait d'Erdös dans gazette janvier 1997) $\mathbf{f(mn) = f(m)f(n)}$, f étant à valeurs entières et définies sur $\mathbb{N}$. Toutes les "grandes" fonctions arithmétiques le sont : indicateur d'Euler, nombre de diviseurs, somme des diviseurs, somme des puissance des diviseurs, le nombre de facteurs premiers distinct, la fonction de Möbius, celle de Liouville ainsi que celle de Mangold.....

EF 35. | *VRAC, mais avec références*

(Enac 1984) $f(x)^2 = f(x^2)$; *(Centrale 1984)* $f'(x) = f(x^2)$; *(Arts et Métiers 1975)* $f(x^2) = f(x)$; f de classe C_2 vérifiant $f(x)^2 = f(x\sqrt{2})$ (Mr Visinesco) ; *(Pupion Vuibert exercice d'analyse, RMS juin 63, Pb XM' 1986 ; problème ENS 1958 ; Calvo exercices d'analyse p288 Colin)* $g'(x) = g(x - x^2)$; *(note de RMS décembre 1967)* $f(3x) - 3f(x) - 4f^3(x) = 0$; *(RMS juin 1959)* $f(2x+1) = 2f^2(x) + f(x)$ Songer à inverser f ; *(Bréal 78 analyse page 216)* $f''(x) + a^2 f(-x) = g(x)$, g donnée : songer à décomposer f et g en partie paire et impaire ; *(Bréal 79 p 16, Bréal 74 p 23, crus 80 p 27, Ramis Odoux Deschamp tome 4 Masson p 86, Bréal 73 page 10)* Trouver f continue, croissante vérifiant $f(x+1) = f(x)+1$ L'espace que forment les solutions est complet avec la norme sup ; *(Deug 1967)* $f(x+y) + x + y = (f(x)+x)(f(y)+y)$ en prenant le log on se ramène à l'exemple de densité ; *(Lesieur collection U Colin p 422)* $2f^2(x) + f(\frac{\pi}{2} - x) = 1$; *(Newmann A problem seminar p 9 Springer 1982 ISBN 0 387 90765 3)* trouver f continue telle que $f(x) + f(2x) + f(3x) = 0$; *(Deug Nantes 1969)* $\int_x^{x^2} \theta(x) = 0$; *(Bréal 1986)* Trouver P polynôme tel que $\int_k^{k+1} P = k+1$; équation fonctionnelle de la fonction zéta *(Chambert Loir 2 p 117)* ; Celle de la fonction Delta *(Chambert Loir 2 p 128)* ; Celle de la fonction elliptique p de Weierstrass ; *(Chambert Loir 2 p 133)* ;

En résumé, on trouve des équations fonctionnelles partout : livres de cours de tous les niveaux, recueil de concours ; problèmes d'exercices ; revues mathématiques françaises ou étrangères et bien sûr dans beaucoup de sites internet, où des auteurs exposent leurs théories ;