LE LEMME DE BAIRE

Gilles Godefroy
Institut de Mathématiques de Jussieu
godefroy@math.jussieu.fr

http://dma.ens.fr/culturemath

Voici exactement cent ans, René Baire mettait la dernière main à la version écrite (rédigée par un jeune normalien, Arnaud Denjoy) de son Cours Peccot, enseigné au Collège de France en 1903/1904, et le 22 septembre 1904 il en signait la préface. Où en était l'analyse en ce début de vingtième siècle ?

Rappelons-nous qu'à l'époque les travaux révolutionnaires, et controversés, de Georg Cantor étaient neufs. La polémique faisait rage entre partisans et adversaires d'une théorie des ensembles encore informelle, sous la pression inquiétante des paradoxes et la question alors brûlante de la légitimité de l'axiome du choix.

Les jeunes loups de ce début de vingtième siècle s'appellent Borel, Lebesgue et Baire. Revenons quelques années en arrière pour explorer leur biographie. Émile Borel, né en 1871, est l'aîné. Fils de pasteur, il a parcouru la carrière scolaire éblouissante d'un enfant prodige, constamment premier. En 1897, trois ans après avoir soutenu sa thèse, il est déja maître de conférences à l'École Normale Supérieure, et il enseigne aux jeunes normaliens les subtilités de la théorie des fonctions d'une variable réelle, où la théorie des ensembles est fortement sollicitée. Deux de ses auditeurs vont eux aussi laisser leur nom dans l'histoire. Le premier s'appelle Henri Lebesgue, il va développer deux ans plus tard sa théorie de l'intégration tout en enseignant en classe préparatoire à l'École Centrale à Nancy. Selon ses dires,"ma théorie de l'intégration...date de l'époque où j'avais 21 heures de classe (et 23 ans il faut dire) et où je n'avais à Nancy que des collègues s'intéressant à la manille, au jacquet, mais avec lesquels je n'ai jamais parlé de science." Le second s'appelle René Baire.

René Baire est né en 1874. Son père est tailleur, il meurt quand Baire à 16 ans. Son frère ainé Henri le soutient alors financièrement dans ses études, permettant ainsi, comme l'avait fait Théo van Gogh, que s'exprime le génie de son cadet. Dès 14 ans, Baire a souffert des premiers symptomes d'une sorte de resserrement de l'œsophage, peut-être psychosomatique. Après l'agrégation, Baire est nommé professeur de mathématiques spéciales à Troyes puis à Bar-le-Duc, avant de commencer une courte carrière universitaire qu'il achèvera comme professeur à Dijon. À partir de 1914, Baire épuisé demande un congé indéfini de maladie qui s'avèrera être définitif. Assailli par les difficultés matérielles, tourmenté par les souffrances intenses que provoque ce resserrement qui l'étreint encore, il se donnera la mort en 1932.

Ce triumvirat Borel-Lebesgue-Baire qui a si profondément marqué l'analyse et en particulier l'école française, est donc constitué de chercheurs qui se sont rencontrés et ont étroitement interagi. Leurs trajectoires sont très contrastées : à la vie tragique de Baire répond la très brillante carrière de Borel, qui meurt en 1956 après avoir été député, ministre de la marine, maire de Saint-Affrique, et pour ce qui est des mathématiques maître d'œuvre et directeur de l'Institut Henri Poincaré (I.H.P.) pendant 28 ans. Henri Lebesgue se tient pour ainsi dire entre ces deux extrêmes : volontaire mais pleurnichard, il se plaint souvent auprès de Borel de ses difficultés financières et des injustices dont il se croit victime. Les 230 lettres qu'il a écrites à Borel entre 1901 et 1918 ont été retrouvées en 1998 au sous-sol de l'I.H.P. et leur lecture est à cet égard instructive. Supplanté par Baire pour le Cours Peccot de l'année 1903-1904, il écrit ainsi en octobre 1903 :"maintenant puisque nous avons parlé de la dépendance entre mes travaux et ceux de Baire, j'insiste sur ce fait que cette dépendance est très faible et que si j'ai cité souvent Baire c'est plus par camaraderie que par necessité. Il est vrai que je n'ai pas à me plaindre de la réciproque. Lorsque Baire a publié sa thèse, il connaissait ma note du *Bulletin* sur l'approximation des fonctions. J'y démontrais d'une façon très simple qu'une fonction de n variables continue par rapport à chacune d'elles est de classe $n-1$ au plus. Baire démontre dans sa thèse la même chose (ou au moins une partie de cette chose) pour $n = 3$ par un procédé très compliqué, il ne me cite aucunement et cependant nous avions parlé ensemble de ma démonstration". Voici une "camaraderie" qu'on ne trouvera peut-être pas exemplaire. Excusons ce jeune homme, né extrêmement pauvre, qui ressentait bien mal l'existence d'une concurrence...mais il écrira encore, en 1909, vouloir "ne pas perdre sa vie en récriminations inutiles, et qu'on juge par suite risibles, comme Baire". Pourtant, Baire va s'enfoncer dans la misère cependant que Lebesgue est nommé au Collège de France puis à l'Académie Française en 1922. Il enseignera au Collège de France jusqu'à sa mort en 1941.

La période productive de René Baire a duré environ dix ans. Elle commence à la fin de l'année 1896, pour s'achever après la rédaction des "Leçons sur les théories générales de l'analyse" publiées en 1908. En 1896, il est donc professeur de classes préparatoires à Bar-le-Duc, où il enseigne à ses élèves ce que (déja !) tout bon "prof. de taupe" doit enseigner : l'analyse la plus rigoureuse possible. Le 14 décembre 1896, dans le train qui le ramène sur Paris, il réflechit à la correction d'un devoir qu'il a donné à ses élèves : l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

où l'inconnue f est une fonction différentiable des deux variables x et y, a pour solutions les fonctions données par $f(x, y) = \phi(x-y)$, où ϕ est dérivable. Mais il sait que les dérivées partielles peuvent exister, et donc l'équation avoir un sens, sans que la fonction f soit différentiable ni même continue. Le petit monstre

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2},\ f(0, 0) = 0$$

considéré par Johannes Thomae dès 1876, n'est-il pas un grand classique de l'agrégation ? Il est donc légitime de se demander quelles sont les solutions les plus générales de l'équation (1). On ne voit plus de raison pour qu'une solution f soit constante sur les droites d'équations $y = x+a$, ni même que cette fonction y soit continue puisque par exemple la fonction de Thomae n'est pas continue en $(0,0)$ sur la première bissectrice $x = y$. Mais tout de même, f ne peut pas être n'importe quoi...Oui, voici une contrainte : si les dérivées partielles existent, la fonction f est au moins *séparément* continue. En d'autres termes, si on fixe une variable à une valeur arbitraire, elle est continue en l'autre variable. Mais un peu de réflexion, quelques petits dessins, et une grosse pincée d'astuce montrent qu'une fonction séparément continue de deux variables est limite en tout point d'une suite de fonctions *globalement* continues des deux variables. En d'autre termes, il existe une suite f_n de fonctions continues telles que pour tout point(x, y) du plan, on ait

$$f(x,y) = \lim_{n\to\infty} f_n(x,y)$$

et si on se restreint à une droite d'équation $y = x + a$, on a bien sûr

$$f(x, x+a) = \lim_{n\to\infty} f_n(x, x+a)$$

ce qui montre que la restriction de f à cette droite est limite d'une suite de fonctions continues d'une variable. Nous ne sommes pas encore au bout de nos peines : René Baire sait bien sûr que la limite d'une suite de fonctions continues n'est pas necessairement continue, elle pourrait par exemple être nulle partout sauf en un point ! Il faudrait avoir une uniformité...partout c'est sans espoir, mais est-ce que la convergence est à peu près uniforme sur certains sous-intervalles ?

Les trains étaient moins rapides en 1896, mais en arrivant Gare de l'Est, monsieur Baire était sans doute encore bien songeur...C'est qu'il faudrait clairement plus de quelques heures de réflexion pour débrouiller cet écheveau. Il va y parvenir cependant, et présenter ses résultats en enseignant en 1904 le Cours Peccot intitulé "leçons sur les fonctions discontinues". Ce cours a été réédité en 1995 par les Éditions Jacques Gabay, et on peut donc se le procurer assez facilement. Parcourons-le.

L'ouvrage commence par une justification de l'intérêt porté aux fonctions discontinues, et le premier exemple choisi par Baire est le développement en série de Fourier de la fonction $f(x) = \frac{x}{2}$ sur $]-\pi, \pi[$, donc

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{sin(nx)}{n}$$

qui est une situation naturelle où une fonction discontinue s'écrit comme une somme, infinie bien sûr, de fonctions continues. Conscient ou non de l'analogie, Baire s'appuie donc sur la théorie des séries de Fourier, qui provient de l'équation des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

et dont l'étude fine a amené Cantor à considérer des ensembles fermés arbitraires de la droite et à créer la théorie des ensembles. L'équation (1), pourtant plus simple puisqu'elle est l'un des facteurs de (2) (on peut en effet factoriser les opérateurs de dérivation comme dans $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$), va inviter Baire à une démarche très similaire. Il donne encore comme exemple les limites radiales de fonctions définies sur le disque, puis développe longuement les notions de point limite et d'ensemble dérivé, et la notion d'ensemble bien ordonné qui conduit aux "nombres transfinis" de Cantor.

Cette notion était tout neuve à l'époque, et les travaux de Baire en sont sans doute la première application vraiment importante. L'exposition qu'il en fait est lumineuse, et j'invite les lecteurs à se réferer au texte original. Disons simplement que l'idée de base est qu'une récurrence doit parfois se prolonger au-delà des entiers, et pour cela être indexée par de nouveaux "nombres", comme suit :

$$1, 2, 3....n, ...\omega, \omega + 1, ...\omega + \omega, ...\omega^2, ..., \omega^{\o mega}, ...$$

Pourquoi pas, mais on sent bien qu'on risque d'avoir des problèmes pour définir une notation cohérente. C'est le cas en effet, mais comme l'écrit Baire on peut tout de même aller de l'avant :"en résumé, un système de conventions étant établi, on peut l'étendre, mais on ne peut pas donner un système de notations qui désignerait tous les nombres de la classe II. Cela ne nous empêche pas de pouvoir raisonner sur les nombres transfinis eux-mêmes, sans savoir tous les noter". Cantor a introduit cette notion pour comprendre la structure (en fait très délicate) des sous-ensembles fermés de la droite. Nous allons voir une situation analogue où il faut impérativement recourir à une récurrence transfinie.

Après ces longs préliminaires, indispensables aux lecteurs de l'époque comme sans doute à la plupart des lecteurs d'aujourd'hui, René Baire se lance dans les développements topologiques auxquels son nom est désormais associé. Il présente (à la page 79 d'un mémoire de 127 pages) un Lemme fondamental, que je ne résiste pas au plaisir de reproduire à l'identique, avec sa démonstration. Rapellons avant cela qu'un sous-ensemble M de la droite est non dense dans un intervalle I si étant donné un sous-intervalle ouvert arbitraire J de I, le complémentaire $J - M$ de M dans J contient un sous-intervalle ouvert. Baire écrit :"nous dirons qu'un ensemble est de première catégorie dans un intervalle PQ s'il est constitué par la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles dont chacun est non dense dans PQ". Nous disons plutôt aujourd'hui qu'un tel ensemble est *maigre*. La définition montre clairement que la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles maigres est maigre. Revenons au Maître :"*Je dis que si G est un ensemble de première catégorie sur un segment PQ, il y a dans toute portion de PQ des points qui n'appartiennent pas à G.* Car G est formé d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses $G_1, G_2, ..., G_n, ...$ Soit ab un intervalle pris sur PQ. L'ensemble G_1 étant non dense dans PQ, il est possible de déterminer dans ab une portion a_1b_1 ne contenant aucun point de G_1. De même, dans a_1b_1, il est possible de déterminer une portion a_2b_2 ne contenant aucun point de G_2, et ainsi de suite. Nous formons une suite d'intervalles $a_1b_1, a_2b_2, ...a_nb_n, ...$, dont chacun est contenu dans le précédent, et tels que a_nb_n ne contient aucun point de $G_1, G_2, ...G_n$. Il existe un point A appartenant à tous ces intervalles. Ce point n'appartient pas à G, puisqu'il ne peut appartenir à aucun des ensembles $G_1, G_2, ..., G_n, ...$ La proposition est donc démontrée".

Rapprochons ce texte de la Note aux Compte-Rendus du 29 Avril 1901 où Lebesgue définit lumineusement la mesurabilité. Là encore je ne résiste pas au plaisir de citer Lebesgue :"considérons un ensemble de points de (a, b) ; on peut d'une infinité de manières enfermer ces points dans une infinité dénombrable d'intervalles ; la limite inférieure de la somme des longueurs de ces intervalles est la mesure de l'ensemble. Un ensemble E est dit mesurable si sa mesure augmentée de celle de l'ensemble des points ne faisant pas partie de E donne la mesure de (a, b). Voici deux propriétés de ces ensembles : une infinité d'ensembles mesurables E_i étant donnée, l'ensemble des points qui font partie de l'un au moins d'entre eux est mesurable ; si les E_i n'ont deux à deux aucun point commun, la mesure de l'ensemble obtenu est la somme des mesures des E_i. L'ensemble des points communs à tous les E_i est mesurable".

Suivant les habitudes de l'époque, Baire et Lebesgue expriment autant que possible leur pensée en français, avec un minimum de formalisme. Il n'y a d'ailleurs aucun symbole pour la réunion ou l'intersection dans leurs textes, où l'inclusion est notée comme une inégalité. Les typographes, sans doute, avaient leurs exigences au bon vieux temps des caractères en plomb...Cependant, le contraste avec un texte d'analyse d'aujourd'hui est assez frappant, et chacun est libre de se demander si nous avons gagné au change. Notons encore que toute la démonstration de Baire repose sur la méthode des segments emboîtés, comme d'ailleurs la première preuve de Cantor de la non-dénombrabilité de la droite réelle. Des élèves de l'enseignement secondaire peuvent donc être confrontés, avec quelques chances de succès, à ces arguments.

Ce "Lemme de Baire" a une postérité qui, sans doute, aurait étonné son auteur. Centenaire en pleine forme, il est encore utilisé dans les contextes les plus variés. Je vais donner maintenant quelques exemples, où il est appliqué sur la droite comme ci-dessus, sur $\mathbf{R}^n$ (ce que Baire savait faire dès 1904) ou sur des espaces métriques complets (ce qu'il aurait su faire s'il avait connu cette notion).

Rappelons-nous les motivations initiales de Baire : il s'intéresse aux fonctions qui sont limites en tout point d'une suite de fonctions continues. Dans son mémoire de 1904, il en présente une caractérisation magistrale, qu'il est légitime d'appeler le Grand Théorème de Baire. Énonçons-le maintenant, tel qu'il l'a démontré.

THÉORÈME :*Soit* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *une fonction. Les assertions suivantes sont équivalentes : 1) Si* F *est un fermé non vide arbitraire de* $\mathbf{R}^n$*, la restriction de* f *à* F *a au moins un point de continuité.*

2) Il existe une suite f_l *de fonctions continues de* $\mathbf{R}^n$ *dans* $\mathbf{R}$ *telle que*

$$f(x) = \lim_{l \to \infty} f_l(x)$$

pour tout $x \in \mathbf{R}^n$.

La direction facile de cette équivalence est, assez naturellement, de 2) vers 1) puisqu'on part de l'existence de quelque chose. Esquissons l'argument, hélas avec quelques symboles cette fois, car en humble arrière-petit-fils mathématique de Baire je n'ai pas appris comme lui à bien m'exprimer sans formalisme...On se limite à montrer 1) dans le cas où $F = \mathbf{R}$, le cas général étant similaire. Si n

et k sont deux entiers, on pose

$$F_n^k = \{x \in \mathbf{R}; |f_l(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{k} \ si \ l, m \geq n\}.$$

Comme leur nom l'indique les ensembles F_n^k sont fermés, et on le vérifie d'ailleurs facilement grâce à la continuité des fonctions f_n. D'après 2), on a

$$\bigcup_{n \geq 1} F_n^k = \mathbf{R}$$

donc d'après le Lemme de Baire, si on appelle U_n^k l'intérieur du fermé F_n^k, l'ouvert

$$O_k = \bigcup_{n \geq 1} U_n^k$$

est dense pour tout k, et donc à nouveau grâce au Lemme, l'ensemble

$$\Omega = \bigcap_{k \geq 1} O_k$$

est dense dans $\mathbf{R}$. On vérifie alors directement que tout point de Ω est un point de continuité de f. Cela provient tout simplement du fait que la convergence est localement "$\frac{1}{k}$-uniforme" sur l'ensemble O_k. Notons que cet exemple est typique d'une situation assez répandue où le Lemme est utilisé deux fois (Baire-Baire en quelque sorte...), avec des fermés puis avec leurs intérieurs.

La direction 1) implique 2) est plus difficile : il nous faut construire les fonctions f_l. Je ne vais pas m'y risquer, mais simplement esquisser la construction centrale. Sur un voisinage d'un point de continuité, une fonction est presque constante. Donc si on se donne $\epsilon > 0$, il existe d'après 1) un ouvert U_1 non vide de $\mathbf{R} = F_0$ sur lequel la variation totale de f est inférieure à ϵ. Soit $F_1 = \mathbf{R} - U_1$. Si F_1 est non vide, toujours d'après 1) appliqué cette fois à F_1, il existe un ouvert U_2 tel que la variation totale de f sur l'ensemble non vide $F_1 \cap U_2$ soit inférieure à ϵ. On continue en appliquant 1) à $F_2 = F_1 - U_2$ s'il est non vide, et ainsi de suite...jusqu'à ce qu'on ait tout mangé, c'est-à-dire atteint l'ensemble vide. On construit donc des fermés emboîtés tels que la fonction oscille de moins de ϵ sur les différences successives. On obtient donc une "fonction en escalier" f_ϵ constante sur les ensembles $F_i \cap U_{i+1}$ et ϵ-proche de f. On montre que f_ϵ est limite d'une suite de fonctions continues et encore un peu de travail permet de montrer que c'est aussi le cas de f. **C.Q.F.D.** (ou peu s'en faut).

L'esquisse ci-dessus fait l'impasse sur le point crucial : est-ce bien clair qu'on va finalement tout manger ? Et d'ailleurs, en combien de "bouchées" va-t-on y arriver ? C'est là que le transfini de Cantor joue son rôle ! En général on n'y arrive pas en un nombre fini d'itérations, mais on y parvient toujours en un nombre dénombrable d'itérations, en allant au-delà du nombre transfini ω. Les innommables nombres transfinis de Cantor indexent donc le processus, jusqu'à la vacuité. Et on démontre que cette *récurrence transfinie* est absolument incontournable pour montrer le Grand Théorème de Baire.

Le transfini n'a jamais été tellement populaire, et de très grands chercheurs comme René Thom ont été jusqu'à dire que les objets qu'on fabrique par une récurrence transfinie n'existent pas vraiment...Je vais éviter les sujets qui fâchent et donc me limiter à évoquer quelques applications du *Lemme* de Baire, qui quant à lui n'a pas besoin du transfini. Et comme les lecteurs, si ils sont toujours là, ont quand même bien du mérite nous allons désormais nous passer de toute démonstration !

Je vais donc réunir quelques applications du Lemme, dans quatre directions qui bien sûr ne sont pas indépendantes : limiter la pathologie, obtenir des uniformités cachées, connaître un ensemble par son complémentaire, établir des résultats d'existence.

Limiter la pathologie : cette direction concerne en particulier les motivations initiales de Baire. En utilisant la direction facile du Grand Théorème, qui ne repose comme on l'a vu que sur le Lemme, on montre en effet les choses suivantes :

- toute fonction séparément continue de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ a des points de continuité.

- il existe des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ qui sont continues exactement aux points irrationnels (par exemple la fonction h définie par $h(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q},\ h(0) = 1,\ h(x) = 0$ si x est irrationnel). Cependant, si une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est continue en tout point rationnel, il y a nécessairement des points irrationnels où elle est continue.

- toute fonction de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ qui admet des dérivées partielles en tout point a des points de différentiabilité.

- il existe des fonctions dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ dont la dérivée n'est pas partout continue, comme par exemple

$$g(x) = x^2 sin(\frac{1}{x}), g(0) = 0$$

cependant toute dérivée a des points de continuité. En effet, si f est dérivable elle est en particulier continue et si l'on écrit

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} n[f(x + \frac{1}{n}) - f(x)]$$

on voit que la dérivée est limite d'une suite de fonctions continues. Ainsi, si un graphe admet une tangente en tout point, cette tangente varie nécessairement de façon continue en un certain nombre de points.

Gustave Choquet, élève d'Arnaud Denjoy qui rédigea le cours de 1904, a caractérisé, juste avant de soutenir sa thèse en mars 1946, les fonctions dérivées, en montrant que lorsqu'une fonction g de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ vérifiait les deux propriétés suivantes : a) être limite d'une suite de fonctions continues, b) avoir la propriété des valeurs intermédiaires, alors il existait une fonction continue strictement croissante α telle que $g \circ \alpha$ soit une fonction dérivée. Modifier un texte n'était pas facile à l'époque : la thèse contient donc l'énoncé et la démonstration d'un résultat plus faible, et le théorème général n'est indiqué que par une note en bas de la page 4.

Depuis les années 1970, les méthodes de Baire ont été appliquées avec profit à des problèmes de différentiabilité des fonctions convexes en dimension infinie. On peut dire que les fonctions convexes en dimension infinie et les fonctions continues en dimension finie sont d'une complexité similaire : ainsi, il existe sur certains espaces de Banach des fonctions convexes continues mais nulle part différentiables.

Obtenir des uniformités cachées : qu'est-ce qu'une uniformité ? En analyse, on rencontre fréquemment des expressions du type : pour tout truc T il existe un machin M tel que...et les analystes sont en général fous de joie quand ils arrivent à remplacer ce début de phrase par : il existe un machin M tel que pour tout truc T...puisqu'en effet cette deuxième expression signifie que M ne dépend pas de T, qu'il n'a qu'une seule forme ou encore qu'il est *uniforme* en T. Cette joie s'explique par le fait qu'une uniformité porte avec elle quantité de conséquences heureuses comme par exemple des résultats d'existence.

La démonstration ci-dessus de l'implication facile du Grand Théorème repose clairement sur une uniformité cachée, puisqu'on montre que la convergence des fonctions f_l est essentiellement uniforme sur de bons sous-ensembles. Voici d'autres exemples :

- Soit f une fonction indéfiniment dérivable de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que pour tout x, il existe un entier $n(x)$ tel que $f^{n(x)}(x) = 0$. Alors l'entier $n(x)$ peut être choisi indépendamment de x, en d'autres termes f est un polynôme.

- Soit f une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que pour tout x, la suite $f(nx)$ converge. Alors la fonction f admet une limite en $+\infty$ et en $-\infty$.

- Soit X un espace vectoriel normé complet, et E un ensemble de formes linéaires continues sur X. Supposons que pour tout $x \in X$, l'ensemble $\{f(x);\ f \in E\}$ soit borné. Alors il existe une constante M telle que pour tout $x \in X$ et pour tout $f \in E$ on ait $|f(x)| \leq M\|x\|$.

Des cas particuliers de ce résultat avaient été obtenus au début du vingtième siécle par divers auteurs, en utilisant ce qu'on appelle souvent la technique de la "bosse glissante". En 1927, Banach et Steinhaus se sont aperçus que le lemme de Baire donnait une démonstration facile du cas général, ouvrant ainsi la voie aux applications des idées de Baire à l'analyse fonctionnelle.

Ce "théorème de Banach-Steinhaus" est en fait un résultat d'existence, souvent utilisé comme suit : si (f_n) est une suite de formes linéaires continues sur X telle que la suite de leurs normes soit non bornée, il existe $x \in X$ tel que la suite $(f_n(x))$ diverge. On montre par exemple ainsi qu'il existe des fonctions périodiques continues dont la série de Fourier diverge en dehors d'un ensemble maigre M de points (et pourtant le complémentaire de M est de mesure nulle, merci monsieur Carleson !).

Notons que les analystes utilisent fréquemment, dans leur recherches d'uniformité, un autre concept extrèmement puissant : la *compacité*. Le résultat le plus simple où ce concept est appliqué énonce que *toute fonction continue sur un compact est uniformément continue*. Le Lemme de Baire permet d'obtenir des uniformités dans de nombreux cas où la compacité est absente (par exemple, lorsqu'on travaille dans des espaces normés de dimension infinie, donc non localement compacts), mais il faut alors accepter de trainer un ϵ avec soi, alors que la compacité permet de "faire $\epsilon = 0$" (exemple :*toute fonction continue sur un compact atteint ses bornes*). Par exemple, la démonstration du Grand Théorème donnée plus haut peut se comparer avec le théorème de Dini, beaucoup plus simple, où la compacité (plus quelques hypothèses bien sûr) fournit la convergence uniforme, quand le Lemme ne donne qu'une convergence "localement ϵ-uniforme sur un ouvert dense".

Connaître un ensemble par son complémentaire : la démonstration par l'absurde, donnée dans le livre IX des *Élements* d'Euclide, de l'existence d'une infinité de nombres premiers ne donne aucun moyen d'exhiber des nombres premiers arbitrairement grands. Tous les mathématiciens connaissent l'argument. Cependant, lorsque Cantor remarque en 1874 que l'existence de nombres transcendants résulte immédiatement du fait que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable alors que l'ensemble des réels ne l'est pas, son approche n'est pas universellement admise (ni même comprise). Il est pourtant bien naturel qu'un ensemble soit plus simple, mieux connu que son complémentaire : je connais (à peu près) la Belgique, est-ce pour cela que je connais le reste du monde ? Et les ouverts de $\mathbf{R}$ sont des réunions dénombrables d'intervalles, alors que leurs complémentaires les fermés sont bien plus difficiles à décrire, comme Cantor l'a compris. Baire, sans doute inspiré dans la démonstration de son Lemme par la première preuve de Cantor du caractère non dénombrable de $\mathbf{R}$, va pousser l'argument plus loin, ce qui va permettre de montrer l'existence d'objets jouissant d'une certaine propriété en ne manipulant que des exemples qui *n'ont pas* cette propriété. Le plus souvent, il s'agit d'une certaine irrégularité, qu'on approche de façon "régulière, mais de moins en moins". Citons à ce propos Jean-Pierre Kahane dans les *Leçons de Mathématiques d'aujourd'hui*, volume 1 (Cassini, 2000) :"Les probabilités ont pour effet d'effacer les résonances, de mélanger les fréquences, de lisser les choses et de les rendre rondes. En opposition, la théorie de Baire exalte les résonances, c'est la théorie de la condensation des singularités".

Donnons quelques exemples :

- Il existe des fonctions continues nulle part dérivables sur l'intervalle $[0, 1]$. Ce résultat s'obtient en appliquant le Lemme sur l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni de la norme de la convergence uniforme, et en n'utilisant que des fonctions du type $P(x) + \epsilon sin(nx)$, où P est un polynôme.

- Le théorème de l'application ouverte : si T est une application linéaire continue et surjective d'un espace normé complet E sur un espace normé complet F, il existe une constante M telle que pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $T(x) = y$ et $\|x\| \leq M\|y\|$.

Une conséquence immédiate du théorème de l'application ouverte est que si T est une bijection linéaire continue entre espaces normés complets, alors son inverse T^{-1} est continue. En approfondissant la question, on parvient à montrer qu'une application linéaire explicite (en un sens précis et extrêmement large) entre espaces normés complets est automatiquement continue.

Le théorème de l'application ouverte s'utilise souvent au moyen de sa contraposée : s'il existe des éléments de F qui se relèvent arbitrairement mal à E (en ce sens que la norme des relevés est arbitrairement grande), alors il y a des éléments qui ne se relèvent pas du tout. On montre ainsi facilement qu'il y a une suite tendant vers 0 qui n'est pas la suite de coefficients de Fourier d'une fonction intégrable. En fait, l'argument démontre que "presque toutes" les suites tendant vers 0 sont comme ça. On dit en plaisantant qu'il est plus facile de gagner 1000 dollars que de gagner 1 dollar (Note personnelle : il y a malheureusement beaucoup de gens qui ont de bonnes raisons de ne pas trouver ça drôle, fin de la parenthèse), et souvent le Lemme fournit beaucoup d'objets singuliers quand on peine à en construire un seul.

Voici un truc pratique pour les chercheurs qui veulent trouver de nouvelles occasions d'appliquer le Lemme : quand un objet est construit comme somme d'une série, il y a de grandes chances qu'un argument de Baire donne l'existence de nombreux objets similaires, avec une démonstration plus simple.

Permettons-nous maintenant un petit encadré pour les spécialistes : Mazurkiewicz a montré en 1936 que l'ensemble des fonctions partout dérivables n'était *pas* un sous-ensemble borélien de l'espace des fonctions continues. Ce résultat est à rapprocher de la méthode de "totalisation" développée par Arnaud Denjoy (l'auditeur-rédacteur de Baire) pour retrouver une fonction dérivable f à partir de sa dérivée. C'est immédiat si la dérivée est continue (on intègre f'), et l'intégration marche encore si la dérivée est Lebesgue-intégrable car f est alors (non trivialement !) absolument continue. Mais lorsque la dérivée n'est pas intégrable, Denjoy doit recourir à des arguments transfinis, et le théorème de Mazurkiewicz a permis de montrer que l'usage du transfini était inévitable. Nous sommes ici en présence d'un objet assez inattendu : une bijection linéaire explicite et apparement simple (prendre la dérivée) dont l'inverse est très complexe ! Mais le résultat de Mazurkiewicz montre en particulier qu'*il n'existe pas de structure d'espace normé complet utilisable sur l'espace des fonctions dérivables*, ce qui fait toute la difficulté du problème.

Établir des résultats d'existence : montrer l'existence d'un objet mathématique est un but "auto-justifiant". L'objet en question peut être plus ou moins important, mais chacun s'accorde à penser qu'on a progressé quand on a construit quelque chose de "neuf" (ou pour les Platoniciens impénitents, reconnu l'existence de ce qui "existait déja" mais qu'on avait pas encore vu). Laissons de côté cette philosophie pour donner trois exemples, qui sont très loin d'épuiser l'immense richesse du sujet, où le Lemme de Baire donne la meilleure démonstration d'existence.

- Pour tout $n \geq 2$, il existe des sous-ensembles fermés de $\mathbf{R}^n$ de mesure nulle, qui contiennent des segments de longueur 1 dans toutes les directions. La démonstration par le Lemme de l'existence de ces "ensembles de Besicovitch" est due à T.W. Körner, que je cite à cette occasion :"le théorème de catégorie de Baire est une trivialité profonde. Dès lors qu'on a trouvé le bon espace métrique complet, les résultats s'enchaînent sans trop d'efforts. Mais le problème consiste à trouver ce bon espace". Ainsi, les techniques de Baire nous invitent à penser non pas en termes d'*éléments*, mais en termes d'*espaces*.

- Le théorème de Kolmogorov, qui répond au treizième problème de Hilbert, affirme que toute fonction continue f de n variables, définie sur $[0,1]^n$, peut s'écrire comme une superposition de fonctions d'une seule variable, au sens suivant : il existe des fonctions continues g_q et $\phi_{p,q}$ telles que

$$f(x_1, x_2, ...x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} g_q(\sum_{p=1}^{n} \phi_{p,q}(x_p))$$

et de plus les fonctions $\phi_{p,q}$ sont strictement croissantes sur $[0,1]$ et indépendantes de f. Il se trouve que la validité de ce théorème est une propriété générique (un "presque partout" au sens de Baire) des fonctions croissantes continues $\phi_{p,q}$.

- Un théorème du type "Ramsey" s'énonce ainsi : si $\mathcal{E}$ est un ensemble "raisonnable" de suites infinies d'entiers (et tous les ensembles boréliens sont raisonnables en ce sens), il existe un ensemble infini A d'entiers dont tous les sous-ensembles infinis sont dans $\mathcal{E}$ ou un ensemble infini B d'entiers dont tous les sous-ensembles infinis sont dans le complémentaire de $\mathcal{E}$. Comme l'a montré Alain Louveau, ceci peut s'obtenir en utilisant finement les méthodes de Baire. Ce théorème peut être compris comme un résulat de théorie des graphes (infinis) : dans les graphes bichromatiques dont les sommets sont les ensembles infinis d'entiers joints par une arête si on a inclusion, on trouve des sous-graphes monochromatiques isomorphes au graphe initial quelque soit le coloriage (raisonnable). C'est cependant en analyse que ce résultat s'applique : pour n'importe quelle propriété raisonnable (P) des suites, on trouve une sous-suite dont toutes les sous-suites ont (P) ou une sous-suite dont aucune sous-suite n'a (P).

Il est plus que temps de conclure...provisoirement car les applications du Lemme de Baire s'enrichissent avec une belle régularité de plusieurs nouveautés par an, et de plus ces dernières décennies ont vu l'émergence de méthodes de la "deuxième génération" avec des théorèmes transfinis et non-linéaires du type Banach-Steinhaus ou Application Ouverte...La fin de l'histoire n'est donc pas pour demain ! Et rendez-vous à l'École de Saint-Flour de 2104 où nous fèterons le bicentenaire du Cours Peccot de monsieur René Baire.

Quelques remarques de nature pédagogique : ce texte est la version écrite d'une conférence donnée à l'École d'été de Saint-Flour, organisée du 23 au 27 Août 2004 par Paul-Louis Hennequin et l'association Animath. Je remercie vivement les organisateurs et l'ensemble des participants à cette très intéressante école pour leur aide et leurs commentaires. Michèle Audin et Marc Rogalski ont bien voulu lire une version préliminaire de ces notes, et leurs remarques ont permis de grandement l'améliorer. Je leur en suis reconnaissant.

Cette conférence était censée représenter un exemple de "promenade mathématique", selon le terme proposé par Animath pour décrire les rencontres mathématiques entre chercheurs, enseignants et élèves du secondaire. On peut légitimement se demander s'il s'agissait d'un bon exemple, voire d'un exemple de ce qu'il ne faut pas faire. Une discussion constructive s'est engagée sur ce thème après la conférence.

Comme les lectrices et lecteurs du texte ci-dessus ont pu le constater, le niveau technique varie beaucoup d'un paragraphe à l'autre. Certains passages seraient accessibles à des élèves de Terminale S, d'autres à des étudiants de Licence, quelques-uns enfin s'adressent plutôt à des chercheurs spécialisés. Malgré ces petites incursions sur des pentes plus rudes, il me semble que des agrégatifs pourraient utiliser cette "promenade" à peu près telle quelle, ainsi que des élèves de Math. Spé. dans le cadre d'un T.I.P.E. Il faudrait par contre censurer franchement ce texte pour en faire quelque chose d'utilisable dans le cadre de l'enseignement secondaire.

Il parait d'ailleurs assez difficile de faire travailler des élèves de Collège ou de Lycée sur des sujets d'analyse. L'aspect pluridisciplinaire n'est pas facile à intégrer, lorsqu'on parle d'un "$\epsilon > 0$ arbitrairement petit" quel sens physique a cette expression ? Quant à la pâte dont est faite la droite réelle, comment y mettrait-on la main ? Voici quand même une suggestion dans ce sens : l'exemple le plus simple de "système dynamique" est une suite recurrente $u_{n+1} = f(u_n)$. Des exemples très simples montrent que le comportement de la suite peut dépendre de façon très irrégulière du premier terme u_0, même si f est polynomiale. Il s'agit là d'une situation de nature expérimentale, et avec une bonne calculette les élèves comme les enseignants peuvent déja s'amuser. Pourtant le Grand Théorème n'est pas si loin : si f est continue, la limite de la suite quand elle existe est bien sûr une fonction de u_0 (en général non continue !) qui est limite de la suite de fonctions continues $f_n = f \circ f \circ ... \circ f$ (n fois). Attention, nous voici repartis vers l'infini, il vaut peut-être mieux dire aux jeunes "passe ton Bac d'abord, l'infini ce sera pour plus tard" ! Je ne sais pas...Qu'en pensez-vous ?