L.G.Vidiani 64 rue de l'EUROPE 21121 FONTAINE LÈS DIJON TEL : 03 80 56 65 54
Adresse email Internet : *lg_vidiani@ipac.fr*

Jauge d'une cuve à Mazout

(Zip 2 TEX mazoutq.tex) version 10 05 04 12h00

JAUGE D'UNE CUVE À MAZOUT HORIZONTALE

(ARNAUDIES FRAYSSE ANALYSE TOME 3 COMPLÉMENTS page 346 exercice 4 + 12 juin 96 APM 403 ;)

La cuve à mazout figurée ci dessous et page 4, est posée horizontalement. Le problème consiste en l'étalonnage d'une jauge verticale (soit extérieure à la cuve, soit flottante) qui, en fonction du niveau atteint par le mazout, indique le volume de mazout restant dans la cuve.

On appelle Ω le centre de la sphère de droite (voir la figure) On appelle ω le centre de la section de la sphère de droite, par le plan z=u ; Pour des raisons de symétries des formules (z en -z) on prend l'axe Oy porté par l'axe de révolution du cylindre, O centre du cercle de base de droite du cylindre, Ox et Oz en étant deux diamètres orthogonaux ; bien sûr dans la pratique, pour avoir la jauge, il faudra faire le changement de variable z=h-R, de façon que h niveau du liquide varie de 0 à 2R (tandis que z varie de -R à + R).

D'après les formules du volume, le volume de liquide à la cote z sera : $\boxed{\mathbf{V(z) = \int_{-R}^{z} S(u)du}}$ où S(u) est l'aire de la surface de liquide à la cote u.

- **Calcul de S(u)**

- Le cylindre a pour équation (il est d'axe Oy et de cercle de base $x^2+z^2=R^2$) $x^2+z^2=R^2$. Il a pour longueur L.

- La sphère de " droite " a pour équation : $\boxed{x^2+(y+\sqrt{a^2-R^2})^2+z^2=a^2}$ car par PYTHAGORE $\overline{\Omega O} = \sqrt{a^2-R^2}$ et $x_\Omega = -\sqrt{a^2-R^2}$.

- Si on coupe la cuve par le plan de cote u, on obtient pour la partie cylindrique un rectangle CC'C"C"', de longueur L et de largeur $2\sqrt{R^2-u^2}$, longueur de la corde de cote du du cercle de base $x^2+z^2=R^2$ du cylindre : soit deux fois l'abcisse d'une des extrémités de la corde : $x^2=R^2-u^2$. Donc la contribution $S_{cylindre}(u)$ à S(u) de la partie d'aire correspondant au rectangle de coupe du cylindre est $\boxed{\mathbf{S_{cylindre}(u) = 2L\sqrt{R^2 - u^2}}}$.

- Pour chaque partie sphérique on a un secteur (voir figure) d'un cercle de centre ω, $\omega CC'$ de rayon ωC $(\omega C^2 = \omega H^2 + HC^2 = x_\Omega^2 + HC^2 = a^2 - R^2 + R^2 - u^2 = a^2 - u^2)$ $\boxed{\omega C = \sqrt{a^2 - u^2}}$ *(C'est aussi le rayon du cercle de section de la sphère de droite $x^2 + (y + \sqrt{a^2 - R^2})^2 + z^2 = a^2$ par z=u).*

Ce secteur a comme demi angle au centre $\alpha = Arccos\frac{\omega H}{\omega C} = Arcos(\frac{\sqrt{a^2-R^2}}{\sqrt{a^2-u^2}}$. On impose : $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ et donc d'aire $(\sqrt{a^2 - u^2})^2\frac{2\alpha}{2} = \alpha(a^2 - u^2)$, auquel on retranche l'aire du triangle $\omega CC' = \frac{1}{2}CC'\ \omega H = HC\ \omega H = \sqrt{R^2 - u^2})\sqrt{a^2 - R^2})$.

La contribution $S_{sphere}(u)$ à S(u), des aires des deux " bouts " sphériques est donc : $S_{sphere}(u) = 2\big((a^2 - u^2)\alpha - \sqrt{R^2 - u^2})\ \sqrt{a^2 - R^2})\big)$. Et donc :

$$\boxed{\mathbf{S(u) = S_{cylindre} + S_{sphere} = 2(L - \sqrt{a^2 - R^2})\sqrt{R^2 - u^2} + 2(a^2 - u^2)Arcos(\frac{\sqrt{a^2-R^2}}{\sqrt{a^2-u^2}}) = S_1(u) + S_2(u)}}$$

On pose u=R-z et on remarque que $arcost = arctan(\frac{\sqrt{1-t^2}}{t})$. *(Comme prévu S est paire, Le premier terme $S_1(u)$ représente l'aire du rectangle diminuée des aires des deux triangles contribuant aux secteurs évoqués, le Arccos a toujours un sens car $-R^2 \leq -u^2$.)*

($S_1(u)$ est nulle lorsque $L = \sqrt{a^2 - R^2}$ (voir la figure ci contre) et pour $u = \pm R$).

- $\boxed{\textbf{Calcul du volume V(z)}}$

$V(z) = \int_{-R}^{z} S(u)du = V_1(z) + V_2(z) = 2(L - \sqrt{a^2 - R^2})\int_{-R}^{z}\sqrt{R^2 - u^2}du + 2\int_{-R}^{z}(a^2 - u^2)Arccos(\frac{\sqrt{a^2-R^2}}{\sqrt{a^2-u^2}})du$

- $V_1(z) = 2(L - \sqrt{a^2 - R^2})\int_{-R}^{z}\sqrt{R^2 - u^2}du = 2(L - \sqrt{a^2 - R^2})\Big(\int_{-R}^{z}\frac{R^2}{\sqrt{R^2-u^2}}du + \int_{-R}^{z}\frac{u(-u)du}{\sqrt{R^2-u^2}}\Big)$

Une intégration par parties de la seconde intégrale donne :

$$\left\{\begin{array}{l} U = u \\ dV = -\frac{2udu}{\sqrt{R^2-u^2}} \end{array}\right. \quad \left| \begin{array}{l} dU = du \\ V = \sqrt{R^2-u^2} \end{array}\right.$$

$V_1(z) = 2(L-\sqrt{a^2-R^2})\Big(\Big[R^2 Arcsin\frac{u}{R} + u\sqrt{R^2-u^2}\Big]_{-R}^{z} - \int_{-R}^{z}\sqrt{R^2-u^2}du\Big) = 2(L-\sqrt{a^2-R^2})\Big[R^2 Arcsin\frac{u}{R} + u\sqrt{R^2-u^2}\Big]_{-R}^{z} - V_1(z)$ soit $V_1(z) = (L-\sqrt{a^2-R^2})\Big(R^2\frac{\pi}{2} + R^2 Arcsin\frac{z}{R} + z\sqrt{R^2-z^2}\Big)$

Et ainsi : $\boxed{\mathbf{V_1(z) = (L-\sqrt{a^2-R^2})\Big(\frac{\pi}{2}R^2 + R^2 Arcsin\frac{z}{R} + z\sqrt{R^2-z^2}\Big)}}$

(Comme prévu $V_1(-R) = 0$; On aurait pu obtenir ce résultat géométriquement car $\frac{S_{segment}(u)}{S_{rectangle}(u)} =$ Constante et comme dans le cours les volumes associés sont dans le même rapport. [voir aussi les cylindres croisés d'Archimède : paradoxe du pendu de Gardner pages 173 et 181 ; divertissement 1 page 107 ; Math et Malice numéro 7 de septembre 92 ; Petit Archimède 99-100 problème de l'écrivain Roger Chateauneu posé par Brette solutionné PA 101] On aurait pu aussi calculer $V_1(z)$ par le changement de variable : $\theta = Arcsin\frac{u}{R}$ ce qui aurait donné $V_1(z) = 2(L-\sqrt{a^2-R^2})\int_{\frac{-\pi}{2}}^{Arcsin\frac{z}{R}} R^2\cos(\theta)d\theta$ soit $V_1(z) = R^2(L-\sqrt{a^2-R^2})\int_{\frac{-\pi}{2}}^{Arcsin\frac{z}{R}}(1+\cos(2\theta))d\theta = R^2(L-\sqrt{a^2-R^2})\Big[\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\Big]_{\frac{-\pi}{2}}^{Arcsin\frac{z}{R}} = R^2(L-\sqrt{a^2-R^2})\Big[\theta + \sin\theta\cos\theta\Big]_{\frac{-\pi}{2}}^{Arcsin\frac{z}{R}}$. On retrouve bien la formule encadrée).

Ces résultats ont été contrôlés par dérivation ou intégration au moyen du logiciel MAPLE et au fichier B:95 mazout1.ms.

- Il reste à calculer $V_2(z) = 2\int_{-R}^{z}(a^2-u^2)Arccos(\frac{\sqrt{a^2-R^2}}{\sqrt{a^2-u^2}})du$.

On intègre par parties en posant $\left\{\begin{array}{l} U = Arccos(\frac{\sqrt{a^2-R^2}}{\sqrt{a^2-u^2}}) \\ \\ dV = (a^2-u^2)du \end{array}\right. \quad \left| \begin{array}{l} dU = \sqrt{a^2-R^2}\frac{-udu(a^2-u^2)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-\frac{a^2-R^2}{a^2-u^2}}} \\ \\ V = a^2u - \frac{u^3}{3} \end{array}\right.$

On simplifie $dU = -\sqrt{a^2-R^2}\frac{(a^2-u^2)udu}{\sqrt{R^2-u^2}}$ et ainsi :

$V_2(z) = 2(a^2z - \frac{z^3}{3})Arccos(\frac{\sqrt{a^2-R^2}}{\sqrt{a^2-z^2}}) + 2\sqrt{a^2-R^2}\int_{-R}^{z}(a^2u-\frac{u^3}{3})\frac{(a^2-u^2)^{-1}udu}{\sqrt{R^2-u^2}} = 2(a^2z-\frac{z^3}{3})Arccos(\frac{\sqrt{a^2-R^2}}{\sqrt{a^2-z^2}}) + 2\sqrt{a^2-R^2}I$.

Où l'on a posé : $I = \int_{-R}^{z}(a^2u-\frac{u^3}{3})\frac{(a^2-u^2)^{-1}udu}{\sqrt{R^2-u^2}}$. Et nous allons calculer I.

(Maple ne donne rien (L'algorithme de RISCH (1969) (cf Gomez 231-233+259) - qui vérifie le théorème de LIOUVILLE - n'y est pas totalement implanté comme dans " AXIOM ") ou alors il faut suggérer comme à la main l'intégration par parties et les changements de variables).

Dans I on fait le changement de variable $\boxed{u = R\sin\theta}$ *(ce qui est préférable à $u = R\cos\theta$ car après dans la fraction rationnelle on sera amené à poser $t = \tan\theta$, ce qui ne posera pas de problème de cas différents (z positif et z* *négatif) ou de continuité en 0, que donnerait pour tangente le franchissement de* $\theta = \frac{\pi}{2}$*, si on avait posé* $u = R\cos\theta$ *- on peut pour s'en convaincre tenter de faire le calcul - On passe en ce qui concerne l'intégrale indéfinie passer d'un cas à l'autre en changeant* t *en* $\frac{1}{t}$ *qui correspond à celui de* θ *en* $\frac{\pi}{2} - \theta$*).*

Alors I devient : $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{Arsin\frac{z}{R}} (a^2 - R^2 \frac{\sin^2\theta}{3}) \frac{R^2 \sin^2\theta R\cos\theta d\theta}{(a^2 - R^2\sin^2\theta)\sqrt{R^2\cos^2\theta}}$ $I = R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{Arcsin\frac{z}{R}} (a^2 - R^2 \frac{\sin^2\theta}{3}) \frac{R^2 \sin^2\theta d\theta}{(a^2 - R^2\sin^2\theta)}$

(On a pu écrire $\cos\theta = \sqrt{\cos^2\theta}$ *car* $\cos\theta \geq 0$ *dans l'intervale des bornes)*

- On fait alors le changement de variable $\boxed{\tan\theta = t}$ où $\theta = Arctan(t)$; alors $\sin^2\theta = \frac{t^2}{1+t^2}$, $d\theta = \frac{dt}{1+t^2}$ et

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} == \frac{\sin\theta}{+\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \frac{\frac{z}{R}}{\sqrt{1-\frac{z^2}{R^2}}}$ et donc : $I = R^2 \int_{-\infty}^{\frac{\frac{z}{R}}{\sqrt{1-\frac{z^2}{R^2}}}} \left(a^2 - \frac{R^2t^2}{3(1+t^2)}\right) \frac{t^2}{(1+t^2)(a^2 - \frac{R^2t^2}{1+t^2})} \frac{dt}{1+t^2}$ et ainsi $\boxed{I = R^2 P}$

où

$P = \int_{-\infty}^{\frac{z}{\sqrt{R^2-z^2}}} \frac{1}{3} \frac{\left((3a^2-R^2)t^2+3a^2\right)t^2 dt}{(t^2(a^2-R^2)+a^2)(1+t^2)^2}$

On pose $F = \frac{1}{3} \frac{\left((3a^2-R^2)t^2+3a^2\right)t^2 dt}{(t^2(a^2-R^2)+a^2)(1+t^2)^2}$. Et on cherche sa décomposition en éléments simples de seconde espèce.

Comme elle est paire et de degré négatif, la forme de sa décomposition est :

$F = \frac{1}{3}\frac{\left((3a^2-R^2)t^2+3a^2\right)t^2dt}{(t^2(a^2-R^2)+a^2)(1+t^2)^2} = \frac{A}{(1+t^2)^2} + \frac{B}{1+t^2} + \frac{C}{(a^2-R^2)t^2+a^2}.$

i et -i sont pôles doubles, jamais triples car $a^2 - R^2 \neq a^2$.

La méthode des congruences donne alors :

- : On multiplie les deux membres de l'identité précédente par $(1+t^2)^2$ on réduit et on spécialise t en les racines de $t^2+1=0$ alias $t^2=-1$ *(mais sans se fatiguer à les remplacer explicitement).* Alors $\boxed{A = \frac{(-3a^2+R^2+3a^2)(-1)}{3(-a^2+R^2+a^2)} = \frac{-1}{3}}$

- : On multiplie les deux membres de l'identité précédente par $(a^2-R^2)t^2+a^2$ on réduit et on spécialise t en les racines de $(a^2-R^2)t^2+a^2=0$ alias $t^2 = \frac{a^2}{R^2-a^2}$ *(mais sans se fatiguer à les remplacer explicitement).* Alors $C = \frac{\frac{(3a^2-R^2)a^2}{R^2-a^2}+3a^2}{3\left(\frac{R^2}{R^2-a^2}\right)^2}\left(\frac{a^2}{R^2-a^2}\right) = \frac{a^2}{3R^4}[3a^4 - a^2R^2 + 3a^2R^2 - 3a^4]$. et donc $\boxed{C = \frac{2a^4}{3R^2}}$

- : Pour avoir le dernier coefficient B, au lieu d'appliquer la méthode générale, lourde ici, qui consiste à retrancher à F la partie principale $\frac{A}{(1+t^2)^2}$ et à recommencer la même méthode pour $F1 = F - \frac{A}{(1+t^2)^2}$ après réduction, on spécialise t=0 : $0 = A + B + \frac{C}{a^2}$ et ainsi $\boxed{B = -A - \frac{C}{a^2} = \frac{1}{3} - \frac{2a^2}{3R^2} = \frac{R^2-2a^2}{3R^2}}$

Tous ces résultats sont confirmés pas Maple : voir la feuille ci jointe.

Pour préparer le calcul de V(z), rappelons le calcul de $H_2 = \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \int \frac{(1+t^2-t^2)dt}{(1+t^2)^2} = H_1 + \int \frac{t(-tdt)}{(1+t^2)^2}$. On intègre cette dernière intégrale par parties : $\left\{\begin{array}{l} U = t \\ dV = \frac{(-tdt)}{(1+t^2)^2} \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} dU = dt \\ V = \frac{1}{2(1+t^2)} \end{array}\right.$. Ce qui nous donne $H_2 = H_1 + \frac{t}{2(1+t^2)} - \frac{1}{2}H_1 =$ $\boxed{\frac{1}{2}H_1 + \frac{t}{2(1+t^2)} = H_2}$ et $\boxed{H_1 = Arctan(t)}$.

Et ainsi $I = R^2\left[\frac{A}{2}H_1 + \frac{At}{2(1+t^2)} + BH_1 + \frac{C}{a^2-R^2}\frac{\sqrt{a^2-R^2}}{a}Arctan\left(\frac{t\sqrt{a^2-R^2}}{a}\right)\right]_{-\infty}^{\frac{z}{\sqrt{R^2-z^2}}}$ soit :

$I = R^2\Big((\frac{A}{2}+B)(Arctan\frac{z}{\sqrt{R^2-z^2}} + \frac{\pi}{2}) + \big(\frac{A\frac{z}{\sqrt{R^2-z^2}}}{2(1+\frac{z^2}{R^2-z^2})} - 0\big) + \frac{C}{a\sqrt{a^2-R^2}}\big(Arctan\frac{z\sqrt{a^2-R^2}}{a\sqrt{R^2-z^2}} + \frac{\pi}{2}\big)\Big).$

Calculons maintenant les coefficients de l'expression de I ; rappelons que $V(z) = V_1(z) + 2\sqrt{a^2-R^2}I$.

- : $\frac{A}{2} + B = \frac{-1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{2a^2}{3R^2} = \frac{1}{6} - \frac{2a^2}{3R^2} = \frac{R^2-4a^2}{6R^2}$

Donc :

$I = \frac{R^2-4a^2}{6}(Arctan\frac{z}{\sqrt{R^2-z^2}} + \frac{\pi}{2}) - \big(\frac{z(R^2-z^2)}{6\sqrt{R^2-z^2}}\big) + \frac{2a^3}{3\sqrt{a^2-R^2}}\big(Arctan\frac{z\sqrt{a^2-R^2}}{a\sqrt{R^2-z^2}} + \frac{\pi}{2}\big).$

Et enfin en tenant compte de tous les calculs précédents on a :

$$V(z) = (L - \sqrt{a^2-R^2})\Big(R^2\frac{\pi}{2} + R^2 Arcsin\frac{z}{R} + z\sqrt{R^2-z^2}\Big) + 2(a^2z - \frac{z^3}{3})Arccos(\frac{\sqrt{a^2-R^2}}{\sqrt{a^2-z^2}})$$

$$+2\sqrt{a^2-R^2}\Big\{\frac{R^2-4a^2}{6}(Arctan\frac{z}{\sqrt{R^2-z^2}} + \frac{\pi}{2}) - \frac{z\sqrt{R^2-z^2}}{6}\Big\} + \frac{4a^3}{3}\big(Arctan\frac{z\sqrt{a^2-R^2}}{a\sqrt{R^2-z^2}} + \frac{\pi}{2}\big).$$

On vérifie bien que V(-R)=0 et que V est paire et que V a bien l'équation de dimension d'un volume ; On vérifie aussi la cohérence avec le cas (a=R,z=R) *(cylindre de rayon R, fermé par deux demi-sphères de rayon R)* et le cas ($a \to +\infty$,z=R), qui donne comme limite le volume du cylindre *(On utilise un développement limité en fonction de de $\frac{1}{a}$).* Maple fait très mal la vérification directe de l'intégration, à cause des limites des algorithmes implantés, cités plus haut, quant à la vérification par V'(z)=S(z) elle se fait encore plus mal car Maple gère très mal les radicaux, même avec assume précisant que les radicandes sont positifs ou réels. Il faut donc faire une vérification à la main, ce qui a été fait !

Le volume total de la cuve est, par raison de symétrie-parité, 2V(0) soit :

$$\boxed{\textbf{Volume Total de la cuve} = (\mathbf{L} - \sqrt{\mathbf{a^2-R^2}})\mathbf{R^2}\pi + \sqrt{\mathbf{a^2-R^2}}\big\{\frac{\mathbf{R^2-4a^2}}{\mathbf{3}}\pi\big\} + \frac{\mathbf{4a^3}}{\mathbf{3}}\pi}.$$

Enfin pour terminer la fonction JAUGE s'obtient en posant z=h-R ; On a J(h)=V*(h)=V(h-R) ; On pourrait l'obtenir par Maple par “ substitue ” ; A la main directement il suffit de remplacer :

$\begin{cases} \sqrt{R^2 - z^2} & \text{par } \sqrt{2Rh - h^2} \\ \sqrt{a^2 - z^2} & \text{par } \sqrt{a^2 - h^2 - R^2 + 2Rh} \end{cases}$ ce qui donne :

$$J(h) = (L - \sqrt{a^2 - R^2})\Big(R^2 \tfrac{\pi}{2} + R^2 Arcsin(\tfrac{h}{R} - 1) + (h - R)\sqrt{2Rh - h^2}\Big)$$

$$+2(a^2(h - R) - \tfrac{(h-R)^3}{3})Arccos(\tfrac{\sqrt{a^2-R^2}}{\sqrt{a^2-R^2-h^2+2Rh}})$$

$$+2\sqrt{a^2 - R^2}\Big\{\tfrac{R^2-4a^2}{6}(Arctan\tfrac{(h-R)}{\sqrt{2Rh-h^2}} + \tfrac{\pi}{2}) - \tfrac{(h-R)\sqrt{2hR-h^2}}{6}\Big\}$$

$$+\tfrac{4a^3}{3}\big(Arctan\tfrac{(h-R)\sqrt{a^2-R^2}}{a\sqrt{2Rh-h^2}} + \tfrac{\pi}{2}\big).$$ © VIDIANI DIJON

- Le programe en PASCAL ci-joint simule le remplissage de la Cuve en donnant à chaque moment le niveau de la jauge.

Dans la pratique, les données chiffrées expérimentalement obtenues $(h_i, J(h_i))$ permettent de programmer une jauge numérique, sans connaître la fonction J(h).

Illustration en Maple du produit d'Hadamard

BIBLIOGRAPHIE

[1] American Mathematical Monthly : janvier 1982 p 57.