Calcul Tensoriel. Application à la relativité.

Jean Gounon

http://dma.ens.fr/culturemath

1 Produit tensoriel

1.1 Théorème et définitions

On démontre les résultats suivants :

1) Soient les K-espaces vectoriels $\mathrm{E}_1, ..., \mathrm{E}_n$. Il existe un espace vectoriel G_0 et une application n-linéaire $\varphi : \mathrm{E}_1 \times ... \times \mathrm{E}_n \to \mathrm{G}_0$ tels que : pour tout K-espace vectoriel F et pour toute application n-linéaire ψ de $\mathrm{E}_1 \times ... \times \mathrm{E}_n$ dans F, il existe une unique application linéaire σ de G_0 dans F vérifiant : $\psi = \sigma \circ \varphi$.

2) a) Le couple (G_0, φ) ci-dessus est *unique à un isomorphisme près*, dans le sens suivant : si $(\mathrm{G}'_0, \varphi')$ est un autre couple vérifiant cette propriété, alors il existe un isomorphisme unique u de G_0 sur G'_0, tel que : $\varphi' = u \circ \varphi$.
b) De plus : pour tout espace vectoriel F et toute application $n-$linéaire ψ de $\mathrm{E}_1 \times ... \times \mathrm{E}_n$ dans F auxquels on associe comme dans le 1) les applications σ et σ' à partir de (G_0, φ) et $(\mathrm{G}'_0, \varphi')$ respectivement , on a : $\sigma = \sigma' \circ u$.

Ces propriétés sont illustrées par le *diagramme commutatif* de la figure 1.

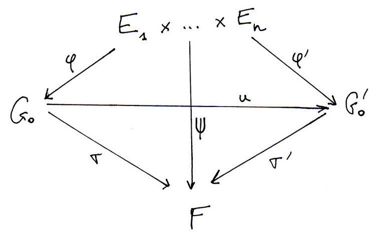

FIG. 1 –

Soit (G_0, φ) un couple du type ci-dessus : G_0 sera noté $\mathrm{E}_1 \otimes ... \otimes \mathrm{E}_n$ et dit *produit tensoriel de* $\mathrm{E}_1, ..., \mathrm{E}_n$. Le produit tensoriel de $\mathrm{E}_1, ..., \mathrm{E}_n$ n'est donc défini qu'à un isomorphisme près (dit isomorphisme *canonique,* vérifiant la propriété vue en 2)a)).

Si $E_1, ..., E_n$ sont de dimension finie avec $\dim E_1 = p_1, ..., \dim E_n = p_n$, soient $\left(\overrightarrow{e_i^1}\right), \left(\overrightarrow{e_j^2}\right), ..., \left(\overrightarrow{e_l^n}\right)$ des bases respectives de $E_1, ..., E_n$. On montre alors que les vecteurs $\varphi\left(\overrightarrow{e_i^1}, ..., \overrightarrow{e_l^n}\right)$ (pour $1 \leq i \leq p_1, ... 1 \leq l \leq p_n$) forment une base de $E_1 \otimes ... \otimes E_n$ (qui est donc de dimension $p_1 \times ... \times p_n$).

On appelle *produit tensoriel des* $\overrightarrow{x_i} \in E_i$ le vecteur $\varphi(\overrightarrow{x_1}, ..., \overrightarrow{x_n}) \in E_1 \otimes ... \otimes E_n$, que l'on note $\overrightarrow{x_1} \otimes ... \otimes \overrightarrow{x_n}$.

Un *tenseur* est un quelconque élément de $E_1 \otimes ... \otimes E_n$; certains tenseurs sont de la forme $\overrightarrow{x_1} \otimes ... \otimes \overrightarrow{x_n}$, mais pas tous : φ n'est en général pas bijective (si $E_1, ..., E_n$ sont de dimension finie, avec les notations précédentes : $\dim(E_1 \times ... \times E_n) = p_1 + ... + p_n$ tandis que $\dim(E_1 \otimes ... \otimes E_n) = p_1 \times ... \times p_n$).

On montre la propriété d'*associativité* :
$(E_1 \otimes E_2) \otimes E_3 = E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 = E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3)$.
(Un produit tensoriel n'étant défini (voir ci-dessus) qu'à un isomorphisme près, cette double égalité signifie en réalité une double identification moyennant certains isomorphismes canoniques; par exemple, la première égalité signifie : il existe un isomorphisme unique $u : (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3 \to E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$ tel que : $\forall (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}) \in E_1 \times E_2 \times E_3 : u((\overrightarrow{x_1} \otimes \overrightarrow{x_2}) \otimes \overrightarrow{x_3}) = \overrightarrow{x_1} \otimes \overrightarrow{x_2} \otimes \overrightarrow{x_3}$ (en notant par le même symbole $\otimes$ tous les produits tensoriels intervenant).

Par contre, on ne peut parler de commutativité pour le produit tensoriel : on ne pourrait trouver d'isomorphisme canonique (ayant une propriété analogue à ci-dessus) permettant d'identifier $E_1 \otimes E_2$ et $E_2 \otimes E_1$ si $E_1 \neq E_2$.

1.2 Puissance tensorielle

Si E est un K−espace vectoriel et si $q \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, la *puissance tensorielle* $q^{\text{ème}}$ de E est $E^{(q)} = \underbrace{E \otimes ... \otimes E}_{(q)}$; si $\dim E = n$, alors $\dim E^{(q)} = n^q$.

Si $(\overrightarrow{e_i})$ est une base de E, les vecteurs $\overrightarrow{e_{i_1}} \otimes ... \otimes \overrightarrow{e_{i_q}} = \overrightarrow{\varepsilon_{i_1 ... i_q}}$ forment une base de $E^{(q)}$ (avec $1 \leq i_1 \leq n, ..., 1 \leq i_q \leq n$).

Par convention : $E^{(1)} = E$ et $E^{(0)} = K$.

2 Tenseurs attachés à un espace vectoriel

2.1 Dualité

Soit un K−espace vectoriel E. Le *dual* de E est le K−espace vectoriel E^* des formes linéaires sur E.

On suppose dans toute la suite que E est de dimension finie n.

Soit $(\overrightarrow{e_i})$ une base de E. On adopte les notations suivantes :

$\forall \overrightarrow{x} \in \mathrm{E} : \overrightarrow{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i \overrightarrow{e_i}$

$\forall y^* \in \mathrm{E}^* : y^*(\overrightarrow{e_i}) = y_i$

Alors : $\forall y^* \in \mathrm{E}^*\ \forall \overrightarrow{x} \in \mathrm{E} : y^*(\overrightarrow{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i y^*(\overrightarrow{e_i}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i y_i$

Soit e^{i*} (pour $1 \leq i \leq n$) l'application "$i^{\text{ème}}$ composante" : c'est l'élément de E^* défini par : $\forall \overrightarrow{x} \in \mathrm{E} : e^{i*}(\overrightarrow{x}) = x^i$.

Montrons que $\left(e^{i*}\right)$ forme une base de E^* :

1) $\left(e^{i*}\right)$ est génératrice :

$\forall y^* \in \mathrm{E}^*\ \forall \overrightarrow{x} \in \mathrm{E} : y^*(\overrightarrow{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i y_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e^{i*}(\overrightarrow{x})$ donc : $y^* = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e^{i*}$

2) $\left(e^{i*}\right)$ est libre :

$\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e^{i*} = 0 \Longrightarrow \forall j \in \{1,...,n\} : \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e^{i*}(\overrightarrow{e_j}) = 0 \Longrightarrow \forall j \in \{1,...,n\} : \alpha_j = 0.$

On en déduit que $\dim \mathrm{E}^* = \dim \mathrm{E}$; $\left(e^{i*}\right)$ est la *base duale de* $(\overrightarrow{e_i})$.

Formules de changement de base dans E et E^*:

1) Soient $(\overrightarrow{e_i})$ et $\left(\overrightarrow{e'_j}\right)$ deux bases de E ; notons : $\overrightarrow{e'_j} = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{A}^i_j \overrightarrow{e_i}$ et $\overrightarrow{e_i} = \sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{B}^j_i \overrightarrow{e'_j}$. On a :

$\overrightarrow{e'_j} = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{A}^i_j \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{B}^k_i \overrightarrow{e'_k}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{A}^i_j \mathrm{B}^k_i\right) \overrightarrow{e'_k}$; donc : $\forall j,k \in \{1,...,n\}$: $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{A}^i_j \mathrm{B}^k_i = \delta^k_j$ (*symbole de Kronnecker :* $\delta^k_j = 1$ si $j = k$ et $\delta^k_j = 0$ si $j \neq k$).

Soit $\overrightarrow{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i \overrightarrow{e_i}$; $\overrightarrow{x} = \sum\limits_{j=1}^{n} x'^j \overrightarrow{e'_j} = \sum\limits_{j=1}^{n} \left(x'^j \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{A}^i_j \overrightarrow{e_i}\right) = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x'^j \mathrm{A}^i_j \overrightarrow{e_i} = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} x'^j \mathrm{A}^i_j\right) \overrightarrow{e_i}$; donc : $\boxed{x^i = \sum\limits_{j=1}^{n} x'^j \mathrm{A}^i_j}$

De même :

$$\boxed{x'^j = \sum_{i=1}^{n} x^i \mathrm{B}^j_i}$$

2) Considérons les bases duales $\left(e^{i*}\right)$ et $\left(e'^{j*}\right)$ des bases $(\overrightarrow{e_i})$ et $\left(\overrightarrow{e'_j}\right)$ respectivement :

$\forall \overrightarrow{x} \in \mathrm{E} : e^{i*}(\overrightarrow{x}) = x^i = \sum\limits_{j=1}^{n} x'^j \mathrm{A}^i_j = \sum\limits_{j=1}^{n} e'^{j*}(\overrightarrow{x}) \mathrm{A}^i_j$ donc : $e^{i*} = \sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{A}^i_j e'^{j*}$;

de même : $e'^{j*} = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{B}^j_i e^{i*}$.

Soit $y^* = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e^{i*} = \sum\limits_{j=1}^{n} y'_j e'^{j*}$. Alors (comme ci-dessus) :

$$\boxed{y'_j = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathrm{A}_j^i}$$

et

$$\boxed{y_i = \sum_{j=1}^{n} y'_j \mathrm{B}_i^j}$$

2.2 Tenseur attaché à l'espace vectoriel E

Soit E un K-espace vectoriel ; soit E^* son dual. Soient $p, q \in \mathrm{N}^*$. D'après l'associativité :

$\mathrm{E}^{(p)} \otimes \mathrm{E}^{*(q)} = \underbrace{\mathrm{E} \otimes ... \otimes \mathrm{E}}_{(p)} \otimes \underbrace{\mathrm{E}^* \otimes ... \otimes \mathrm{E}^*}_{(q)}$.

Un *tenseur attaché à* E *de type* (p, q) est un élément de $\mathrm{E}^{(p)} \otimes \mathrm{E}^{*(q)}$; il est dit *d'ordre* $p + q$.

Un tel tenseur est encore dit *p fois contravariant et q fois covariant.*

Un *tenseur attaché à* E *contravariant d'ordre* $p \in \mathrm{N}^*$ est un élément de $\mathrm{E}^{(p)}$; un *tenseur attaché à* E *covariant d'ordre* $q \in \mathrm{N}^*$ est un élément de $\mathrm{E}^{*(q)}$. En particulier : un tenseur attaché à E contravariant d'ordre 1 est un vecteur de E ; un tenseur attaché à E covariant d'ordre 1 est une forme linéaire sur E.

Un tenseur attaché à E de type (p, q) avec $p, q \in \mathrm{N}^*$ est dit *mixte (*d'ordre $p + q$).

2.3 Composantes d'un tenseur attaché à E

Soit $(\overrightarrow{e_i})$ une base de l'espace vectoriel E de dimension n ; soit $\left(e^{i*}\right)$ sa base duale. On associe à ce choix de la base $(\overrightarrow{e_i})$ de E la base de $\mathrm{E}^{(p)} \otimes \mathrm{E}^{*(q)}$ formée des n^{p+q} vecteurs :

$\varepsilon_{i_1...i_p}^{j_1...j_q} = \overrightarrow{e_{i_1}} \otimes ... \otimes \overrightarrow{e_{i_p}} \otimes e^{*j_1} \otimes ... \otimes e^{*j_q} \in \mathrm{E}^{(p)} \otimes \mathrm{E}^{*(q)}$ (tous les indices $i_1, ..., j_q$ variant de 1 à n).

Une fois effectué le choix de la base $(\overrightarrow{e_i})$ de E, les *composantes d'un tenseur* T de type (p, q) sont les composantes de T sur cette base de $\mathrm{E}^{(p)} \otimes \mathrm{E}^{*(q)}$, i.e. les nombres $t_{j_1...j_q}^{i_1...i_p}$ tels que : $\mathrm{T} = \sum t_{j_1...j_q}^{i_1...i_p} \overrightarrow{\varepsilon_{i_1...i_p}^{j_1..j_q}}$, somme étendue à tous les indices variant de 1 à n.

Avec la *convention d'Einstein*, le symbole $\sum$ peut être supprimé et on écrit : $\mathrm{T} = t_{j_1...j_q}^{i_1...i_p} \overrightarrow{\varepsilon_{i_1...i_p}^{j_1...j_q}}$, étant entendu que si un même indice apparaît en haut et en bas, on effectue la sommation par rapport à cet indice.

$i_1, ..., i_p$ sont les *indices contravariants ;* $j_1, ..., j_q$ sont les *indices covariants.*

De même : les *composantes d'un tenseur* T *contravariant d'ordre* p sont les nombres $t^{i_1...i_p}$ tels que $\mathrm{T} = t^{i_1...i_p}\overrightarrow{\varepsilon_{i_1...i_p}} = t^{i_1...i_p}\overrightarrow{e_{i_1}} \otimes ... \otimes \overrightarrow{e_{i_p}}$; les *composantes d'un tenseur* T *covariant d'ordre* q sont les nombres $t_{j_1...j_q}$ tels que $\mathrm{T} = t_{j_1...j_q}\overrightarrow{\varepsilon^{j_1...j_q}} = t_{j_1...j_q}e^{j_1*} \otimes ... \otimes e^{j_q*}$.

2.4 Transformation des composantes d'un tenseur attaché à E par changement de base dans E

Soient $(\overrightarrow{e_i})$ et $\left(\overrightarrow{e'_h}\right)$ deux bases de E ; soient $\left(e^{i*}\right)$ et $\left(e'^{h*}\right)$ leurs bases duales respectives ; soient $\left(\overrightarrow{\varepsilon^{j_1...j_q}_{i_1...i_p}}\right) = \left(\overrightarrow{e_{i_1}} \otimes ... \otimes \overrightarrow{e_{i_p}} \otimes e^{j_1*} \otimes ... \otimes e^{j_q*}\right)$ et $\left(\overrightarrow{\varepsilon'^{k_1...k_q}_{h_1...h_p}}\right) = \left(\overrightarrow{e'_{h_1}} \otimes ... \otimes \overrightarrow{e'_{h_p}} \otimes e'^{k_1*} \otimes ... \otimes e'^{k_q*}\right)$ les bases de $\mathrm{E}^{(p)} \otimes \mathrm{E}^{*(q)}$ respectivement associées à $(\overrightarrow{e_i})$ et $\left(\overrightarrow{e'_h}\right)$. Avec les notations précedentes :

$\overrightarrow{e'_h} = \mathrm{A}^i_h\overrightarrow{e_i}$ et $\overrightarrow{e_i} = \mathrm{B}^h_i\overrightarrow{e'_h}$;
$e^{i*} = \mathrm{A}^i_h e'^{h*}$ et $e'^{h*} = \mathrm{B}^h_i e^{i*}$.

Soit un tenseur $\mathrm{T} = t^{i_1...i_p}_{j_1...j_q}\overrightarrow{\varepsilon^{j_1...j_q}_{i_1...i_p}} = t'^{h_1...h_p}_{k_1...k_q}\overrightarrow{\varepsilon'^{k_1...k_q}_{h_1...h_p}}$. On cherche des relations entre $t^{i_1...i_p}_{j_1...j_q}$ et $t'^{h_1...h_p}_{k_1...k_q}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{T} &= t^{i_1...i_p}_{j_1...j_q}\overrightarrow{e_{i_1}} \otimes ... \otimes \overrightarrow{e_{i_p}} \otimes e^{j_1*} \otimes ... \otimes e^{j_q*}\\ &= t^{i_1...i_p}_{j_1...j_q}\left(\mathrm{B}^{h_1}_{i_1}\overrightarrow{e'_{h_1}}\right) \otimes ... \otimes \left(\mathrm{B}^{h_p}_{i_p}\overrightarrow{e'_{h_p}}\right) \otimes \left(\mathrm{A}^{j_1}_{k_1}e'^{k_1*}\right) \otimes ... \otimes \left(\mathrm{A}^{j_q}_{k_q}e'^{k_q*}\right)\\ &= t^{i_1...i_p}_{j_1...j_q}\mathrm{B}^{h_1}_{i_1}...\mathrm{B}^{h_p}_{i_p}\mathrm{A}^{j_1}_{k_1}...\mathrm{A}^{j_q}_{k_q}\overrightarrow{\varepsilon'^{k_1...k_q}_{h_1...h_p}}\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{t'^{h_1...h_p}_{k_1...k_q} = \mathrm{B}^{h_1}_{i_1}...\mathrm{B}^{h_p}_{i_p}\mathrm{A}^{j_1}_{k_1}...\mathrm{A}^{j_q}_{k_q}t^{i_1...i_p}_{j_1...j_q}} \quad (1)$$

De même :

$$\boxed{t^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} = \mathrm{A}^{i_1}_{h_1}...\mathrm{A}^{i_p}_{h_p}\mathrm{B}^{k_1}_{j_1}...\mathrm{B}^{k_q}_{j_q}t'^{h_1...h_p}_{k_1...k_q}} \quad (2)$$

Ces formules s'adaptent (en se simplifiant) au cas des tenseurs contravariants et covariants.

Exemple : $t'^{h_1...h_p} = \mathrm{B}^{h_1}_{i_1}...\mathrm{B}^{h_p}_{i_p}t^{i_1...i_p}$ pour un tenseur T contravariant d'ordre p (les $t^{i_1...i_p}$sont les composantes de T dans la base $(\overrightarrow{e_i})$ et les $t'^{h_1...h_p}$ dans la base $\left(\overrightarrow{e'_h}\right)$).

Les relations (1) et (2) (ou leurs formes simplifiées dans le cas des tenseurs contravariants ou covariants) constituent un *critère de tensorialité,* dans le sens suivant :

Supposons qu'à toute base $(\overrightarrow{e_i})$ de E on associe une liste ordonnée de n^{p+q} nombres $t^{i_1...i_p}_{j_1...j_q}$ (les indices variant de 1 à n). Existe-t-il un tenseur $\mathrm{T} \in \mathrm{E}^{(p)} \otimes \mathrm{E}^{*(q)}$ tel que, pour toute base $(\overrightarrow{e_i})$ de E, ses composantes dans la base $\left(\overrightarrow{\varepsilon^{j_1...j_q}_{i_1...i_p}}\right)$ associée à $(\overrightarrow{e_i})$ soient ces nombres ?

D'après ci-dessus, une condition nécessaire est que cette famille de listes vérifie (1) ; réciproquement, si (1) est vérifiée,le tenseur ayant pour composantes la liste des $t^{i_1...i_p}_{j_1...j_q}$ dans la base associée à $(\overrightarrow{e_i})$ aura pour composantes dans la base associée à toute autre base $\left(\overrightarrow{e'_j}\right)$ la liste des $t'^{h_1...h_p}_{k_1...k_q}$ correspondant à $\left(\overrightarrow{e'_j}\right)$. La relation (1) est donc un critère de tensorialité ; il en est de même de la relation (2).

2.5 Contraction d'indices

Soit un tenseur $\mathrm{T} = t^{i_1...i_p}_{j_1...j_q}\overrightarrow{\varepsilon^{j_1...j_q}_{i_1...i_p}} = t'^{h_1...h_p}_{k_1...k_q}\overrightarrow{\varepsilon'^{k_1...k_q}_{h_1...h_p}}$.

La *contraction des indices* i_1 *et* j_1 (par exemple) consiste à associer à $t^{i_1...i_p}_{j_1...j_q}$ la *somme* (par convention d' Einstein) : $t^{ii_2...i_p}_{ij_2...j_q}$ (sommation sur $i \in \{1, ..., n\}$) ; une telle liste de n^{p+q-2} nombres (dont chacun est une somme de n termes) se trouve donc associée à chaque base $(\overrightarrow{e_i})$ (avec les notations ci-dessus, la liste associée à $\left(\overrightarrow{e'_h}\right)$ par ce moyen serait la liste des sommes $t'^{hh_2...h_p}_{hk_2...k_q}$).

Montrons que ces listes de sommes constituent les composantes d'un tenseur de $\mathrm{E}^{(p-1)} \otimes \mathrm{E}^{*(q-1)}$: il suffit de vérifier le critère de tensorialité ci-dessus :

On sait que : $t^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} = \mathrm{A}^{i_1}_{h_1}...\mathrm{A}^{i_p}_{h_p}\mathrm{B}^{k_1}_{j_1}...\mathrm{B}^{k_q}_{j_q}t'^{h_1...h_p}_{k_1...k_q}$. Donc :

$t^{ii_2...i_p}_{ij_2...j_q} = \mathrm{A}^{i}_{h_1}\mathrm{A}^{i_2}_{h_2}...\mathrm{A}^{i_p}_{h_p}\mathrm{B}^{k_1}_{i}\mathrm{B}^{k_2}_{j_2}...\mathrm{B}^{k_q}_{j_q}t'^{h_1...h_p}_{h_1...k_q}$.

Or : $\mathrm{A}^{i}_{h_1}\mathrm{B}^{k_1}_{i} = \delta^{k_1}_{h_1}$ (symbole de Kronecker) ; donc :

$t^{ii_2...i_p}_{ij_2...j_q} = \delta^{k_1}_{h_1}\mathrm{A}^{i_2}_{h_2}...\mathrm{A}^{i_p}_{h_p}\mathrm{B}^{k_2}_{j_2}...\mathrm{B}^{k_q}_{j_q}t'^{h_1h_2...h_p}_{k_1k_2...k_q} = \mathrm{A}^{i_2}_{h_2}...\mathrm{A}^{i_p}_{h_p}\mathrm{B}^{k_2}_{j_2}...\mathrm{B}^{k_q}_{j_q}t'^{hh_2...h_p}_{hk_2...k_q}$ c.q.f.d.

2.6 Tenseurs symétriques et antisymétriques

Un tenseur T contravariant d'ordre 2 est *symétrique* ssi il existe une base $(\overrightarrow{e_i})$ de E telle que les composantes de T dans la base $(\overrightarrow{\varepsilon_{i_1i_2}}) = (\overrightarrow{e_{i_1}} \otimes \overrightarrow{e_{i_2}})$ vérifient : $t^{i_1i_2} = t^{i_2i_1}$.

Cette propriété vaut alors pour toute base (la symétrie est donc une propriété *intrinsèque* du tenseur) : en effet, avec les notations précédentes :

$t'^{h_1h_2} = \mathrm{B}^{h_1}_{i_1}\mathrm{B}^{h_2}_{i_2}t^{i_1i_2} = \mathrm{B}^{h_2}_{i_2}\mathrm{B}^{h_1}_{i_1}t^{i_2i_1} = t'^{h_2h_1}$

De façon analogue, l'*antisymétrie* d'un tenseur contravariant d'ordre 2 se définit par $t^{i_1i_2} = -t^{i_2i_1}$; c'est encore une propriété intrinsèque.

Des définitions analogues valent encore pour des tenseurs covariants d'ordre 2, de même que leur caractère intrinsèque.

3 Espaces vectoriels pré-euclidiens

3.1 Définitions

Dans toute la suite, E un espace vectoriel réel de dimension finie n. Une *forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur* E est une application $\varphi : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathrm{R}$: $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \mapsto \varphi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ (noté $\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y}$) telle que :

$$\begin{cases} \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathrm{E} : \overrightarrow{x}.\overrightarrow{y} = \overrightarrow{y}.\overrightarrow{x} \\ \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z} \in \mathrm{E} : \overrightarrow{x}.(\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}) = \overrightarrow{x}.\overrightarrow{z} + \overrightarrow{y}.\overrightarrow{z} \\ \forall \alpha \in \mathrm{R}\ \forall \overrightarrow{x} \in \mathrm{E} : (\alpha \overrightarrow{x}).\overrightarrow{y} = \alpha (\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y}) \\ [\forall \overrightarrow{x} \in \mathrm{E} : \overrightarrow{x}.\overrightarrow{y} = 0] \Longrightarrow \overrightarrow{y} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

On dit alors que (E, φ) est un *espace vectoriel pré-euclidien* (ou plus simplement que E est pré-euclidien, s'il n'y a pas d'ambigüité sur φ).

Un *produit scalaire sur* E est une forme bilinéaire symétrique (i.e. vérifiant les propriétés des trois premières lignes ci-dessus) *définie positive,* i.e. vérifiant en outre les deux propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \forall \overrightarrow{x} \in \mathrm{E} : \overrightarrow{x}^2 = \overrightarrow{x}.\overrightarrow{x} \geq 0 \\ \forall \overrightarrow{x} \in \mathrm{E} : \left[\overrightarrow{x}^2 = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}\right] \end{cases}$$

On dit alors que E est *euclidien.*

On définit dans ce cas la *norme euclidienne* de $\overrightarrow{x} \in \mathrm{E}$ par $\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{\overrightarrow{x}^2}$.

Si E est euclidien, il est pré-euclidien : en effet :

$\left[\forall \overrightarrow{x} \in \mathrm{E} : \overrightarrow{x}.\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}\right] \Longrightarrow \overrightarrow{y}^2 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$.

Si E est pré-euclidien sans être euclidien, il est dit *pseudo-euclidien.*

Dans tout ce qui suit, l'espace vectoriel E sera supposé pré-euclidien.

3.2 Bases d'un espace vectoriel pré-euclidien

Soit, dans un espace pré-euclidien E, une base $(\overrightarrow{e_i})$: on note $g_{ij} = \overrightarrow{e_i}.\overrightarrow{e_j}$.

Alors, si $\overrightarrow{x} = x^i \overrightarrow{e_i}$ et $\overrightarrow{y} = y^j \overrightarrow{e_j}$ on a :

$$\boxed{\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y} = x^i y^j g_{ij}}$$

Montrons que le déterminant de la matrice (g_{ij}) est non nul :

Soit le système (1) de n équations à n inconnues y^j :

$y^j g_{ij} = 0 \quad (i \in \{1, ..., n\}) \qquad (1)$

$(1) \Longrightarrow \left[\forall \left(x^1, ..., x^n\right) \in \mathrm{R}^n : x^1 \left(y^1 g_{11} + ... + y^n g_{1n}\right) + ... + x^n \left(y^1 g_{n1} + ... + y^n g_{nn}\right) = 0\right]$

$\Longleftrightarrow \left[\forall \left(x^1, ..., x^n\right) \in \mathrm{R}^n : x^i y^j g_{ij} = 0\right] \qquad (2)$

Posons $\overrightarrow{y} = y^j \overrightarrow{e_j}$: $(2) \Longleftrightarrow [\forall \overrightarrow{x} \in \mathrm{E} : \overrightarrow{x}.\overrightarrow{y} = 0] \Longrightarrow \overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$ (non-dégénérescence de la forme bilinéaire φ) et donc le système (1) n'admet que la solution nulle ; on a donc :

$$\boxed{\det(g_{ij}) \neq 0}$$

Dans l'espace pré-euclidien E :

1) $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ sont dits *orthogonaux* ssi $\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y} = 0$; on note alors $\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{y}$.

2) Une base $(\overrightarrow{e_i})$ est dite *orthonormée* ssi $g_{ij} = \delta_i^j$; autrement dit : $\forall i \in \{1, ..., n\}$: $\overrightarrow{e_i}^2 = 1$ et, si $i \neq j$: $\overrightarrow{e_i}.\overrightarrow{e_j} = 0$. (On a donc ici $\det(g_{ij}) = 1$).

3.3 Composantes covariantes d'un vecteur dans une base

Soit l'espace pré-euclidien E rapporté à une base $(\overrightarrow{e_i})$; soit $\overrightarrow{x} = x^i \overrightarrow{e_i}$.

Les *composantes covariantes de* $\overrightarrow{x}$ *dans la base* $(\overrightarrow{e_i})$ sont les nombres

$$\boxed{x_i = \overrightarrow{x}.\overrightarrow{e_i}}$$

On a donc : $x_i = \left(x^j \overrightarrow{e}_j\right).\overrightarrow{e_i}$ donc :

$$\boxed{x_i = g_{ij} x^j} \ (3)$$

En particulier, si $(\overrightarrow{e_i})$ est orthonormée : $x_i = \delta_j^i x^j = x^i$

Expression des x^j en fonction des x_i :

Les relations (3) constituent un système de n équations à n inconnues x^j ; comme $g = \det g_{ij} \neq 0$, ce système admet une unique solution donnée par les formules de Cramer. Donc, en notant α^{ij} le cofacteur de g_{ij} : $x^j = \dfrac{\alpha^{ij} x_i}{g}$; en posant

$$\boxed{g^{ij} = \frac{\alpha^{ij}}{g}}$$

on obtient :

$$\boxed{x^j = g^{ij} x_i}$$

Remarque : comme $g_{ij} = g_{ji}$, on a aussi :$g^{ij} = g^{ji}$.

Expressions de $\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y}$ utilisant les composantes covariantes :

1) $\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y} = g_{ij} x^i y^j = x^i y_i$; et comme $\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y} = \overrightarrow{y}.\overrightarrow{x}$, on a finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y} = x^i y_i = x_i y^i}$$

(En particulier : $\overrightarrow{x}^2 = x^i x_i$)

2) $\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y} = x_i y^i$ donc :

$$\boxed{\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y} = g^{ij} x_i y_j}$$

en particulier : $\overrightarrow{x}^2 = g^{ij} x_i x_j$

Pour $\overrightarrow{x} \in \mathrm{E}$, soit l'application $\varphi_{\overrightarrow{x}} : \mathrm{E} \to \mathrm{R} : \overrightarrow{y} \mapsto \varphi_{\overrightarrow{x}}(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{x}.\overrightarrow{y}$.
$\forall \overrightarrow{x} \in \mathrm{E} : \varphi_{\overrightarrow{x}} \in \mathrm{E}^*$ (dual de E).
Soit $(\overrightarrow{e_i})$ une base de E, (e_i^*) sa base duale :
$\forall \overrightarrow{y} \in \mathrm{E} : \varphi_{\overrightarrow{x}}(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{x}.\overrightarrow{y} = x_i y^i = x_i e^{i*}(\overrightarrow{y})$ donc :

$$\boxed{\varphi_{\overrightarrow{x}} = x_i e^{i*}}$$

3.4 Transformation des composantes covariantes par changement de base

Soit $\left(\overrightarrow{e'_j}\right)$ une nouvelle base de E, de base duale $\left(e'^{j*}\right)$:
$\overrightarrow{e'_j} = \mathrm{A}^i_j \overrightarrow{e_i}$, $\overrightarrow{e_i} = \mathrm{B}^j_i \overrightarrow{e'^j}$, $x'^j = \mathrm{B}^j_i x^i$, $x^i = \mathrm{A}^i_j x'^j$.
On rappelle que $e^{i*} = \mathrm{A}^i_j e'^{j*}$ et $e'^{j*} = \mathrm{B}^j_i e^{i*}$. Donc :
$\varphi_{\overrightarrow{x}} = x_i e^{i*} = x_i \mathrm{A}^i_j e'^{j*}$; or $\varphi_{\overrightarrow{x}} = x'_j e'^{j*}$ donc :

$$\boxed{x'_j = \mathrm{A}^i_j x_i}$$

et de même :

$$\boxed{x_i = \mathrm{B}^j_i x'_j}$$

Remarque : On passe des "anciennes" composantes covariantes (dans $(\overrightarrow{e_i})$) aux "nouvelles" (dans $\left(\overrightarrow{e'_j}\right)$) de la même façon que pour passer des vecteurs $\overrightarrow{e_i}$ aux vecteurs $\overrightarrow{e'_j}$ (usage des mêmes coefficients A^i_j aux mêmes places dans les formules de transformation) : c'est ce qui justifie le nom de composantes "covariantes" attribué aux x_i. Pour le passage des x^i aux x'^j, au contraire, il faut, dans les formules correspondantes relatives aux vecteurs, remplacer les A^i_j par les B^j_i : les composantes x^i seront dites pour cette raison "contravariantes".

3.5 Identification de E à E*

Soit l'application $\overrightarrow{x} \to \varphi_{\overrightarrow{x}}$ de E dans E*. Montrons qu'il s'agit d'un isomorphisme de E sur E* :
1) Montrons que : $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathrm{E} : \varphi_{\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}} = \varphi_{\overrightarrow{x}} + \varphi_{\overrightarrow{y}}$ (1) :
(1) $\Longleftrightarrow \forall \overrightarrow{z} \in \mathrm{E} : (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}).\overrightarrow{z} = \overrightarrow{x}.\overrightarrow{z} + \overrightarrow{y}.\overrightarrow{z}$, propriété vraie.
2) Montrons que : $\forall \alpha \in \mathrm{R}\ \forall \overrightarrow{x} \in \mathrm{E} : \varphi_{\alpha\overrightarrow{x}} = \alpha\varphi_{\overrightarrow{x}}$ (2) :
(2) $\Longleftrightarrow \forall \overrightarrow{z} \in \mathrm{E} : (\alpha\overrightarrow{x}).\overrightarrow{z} = \alpha(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{z})$, propriété vraie.
3) Montrons que : $\forall y^* \in \mathrm{E}^*\ \exists! \overrightarrow{x} \in \mathrm{E} : \varphi_{\overrightarrow{x}} = y^*$
a) Existence de $\overrightarrow{x}$:
Soit $(\overrightarrow{e_i})$ une base de E : $y^* = y_j e^{j*}$.
Prenons le vecteur $\overrightarrow{x} = \left(g^{ij} y_j\right) \overrightarrow{e_i}$ et posons $x^i = g^{ij} y_j$. Alors :
$\forall \overrightarrow{z} \in \mathrm{E} : \varphi_{\overrightarrow{x}}(\overrightarrow{z}) = \overrightarrow{x}.\overrightarrow{z} = x^i z_i = g^{ij} y_j z_i = y_j z^j = y_j e^{j*}(\overrightarrow{z}) = y^*(\overrightarrow{z})$;
donc $\varphi_{\overrightarrow{x}} = y^*$

b) Unicité de $\overrightarrow{x}$:

$\varphi_{\overrightarrow{x_1}} = \varphi_{\overrightarrow{x_2}} \Longrightarrow \forall \overrightarrow{z} \in \mathrm{E} : \overrightarrow{x_1}.\overrightarrow{z} = \overrightarrow{x_2}.\overrightarrow{z} \Longrightarrow \forall \overrightarrow{z} \in \mathrm{E} : (\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_2}).\overrightarrow{z} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_2}$ (par la non-dégénérescence de φ).

De par cet isomorphisme de E sur E*, on convient d'*identifier* $\overrightarrow{x}$ et $\varphi_{\overrightarrow{x}}$, et donc E et E*.

Remarque : $\varphi_{\overrightarrow{e_i}}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}.\overrightarrow{e_i} = x_i$: $\varphi_{\overrightarrow{e_i}}$ est donc l'application "$i^{\text{ème}}$ composante covariante" ; c'est celle-ci qui se trouve identifiée à $\overrightarrow{e_i}$ par l'identification de E* à E (d'après ce qu'on a vu plus haut, $\varphi_{\overrightarrow{e_i}}$ coïncide avec e^{i*}, application "$i^{\text{ème}}$ composante contravariante", dans le cas où la base $(\overrightarrow{e_i})$ est orthonormée).

4 Tenseurs pré-euclidiens

4.1 Composantes contravariantes, covariantes ou mixtes d'un tenseur pré-euclidien

Soit l'espace vectoriel pré-euclidien E est rapporté à la base $(\overrightarrow{e_i})$; soient les entiers p, q, s tels que $s = p+q$. Alors : $\mathrm{E}^{(s)}$ est rapporté à la base $(\overrightarrow{e_{i_1}} \otimes ... \otimes \overrightarrow{e_{i_s}})$; $\mathrm{E}^{*(s)}$ est rapporté à la base $\left(e^{i_1*} \otimes ... \otimes e^{i_s*}\right)$ et $\mathrm{E}^{(p)} \otimes \mathrm{E}^{*(q)}$ est rapporté à la base $\left(\overrightarrow{e_{i_1}} \otimes ... \otimes \overrightarrow{e_{i_p}} \otimes e^{j_1*} \otimes ... \otimes e^{j_q*}\right)$.

Or, d'après ci-dessus, E et E* ont pu être identifiés (par l'isomorphisme associant à $\overrightarrow{x} \in \mathrm{E}$ la forme linéaire $\varphi_{\overrightarrow{x}} \in \mathrm{E}^*$ définie par $\varphi_{\overrightarrow{x}}(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{x}.\overrightarrow{y}$). Cette identification permet d'identifier à leur tour les trois produits tensoriels ci-dessus en un seul, noté $\mathrm{E}^{(s)}$, pour lequel trois bases sont donc données ci-dessus (remarquons que ces trois bases coïncident si la base $(\overrightarrow{e_i})$ est orthonormée).

Un élément quelconque de $\mathrm{E}^{(s)}$ sera dit *tenseur pré-euclidien d'ordre s* (sans plus distinguer "tenseur contravariant", "tenseur covariant" ou "tenseur mixte de type (p,q)"). Ses composantes dans la base $(\overrightarrow{e_{i_1}} \otimes ... \otimes \overrightarrow{e_{i_s}})$ sont ses *composantes contravariantes* notées $t^{i_1...i_s}$; ses composantes dans la base $\left(e^{i_1*} \otimes ... \otimes e^{i_s*}\right)$ sont ses *composantes covariantes* notées $t_{i_1...i_s}$, et ses composantes dans la base $\left(\overrightarrow{e_{i_1}} \otimes ... \otimes \overrightarrow{e_{i_p}} \otimes e^{j_1*} \otimes ... \otimes e^{j_q*}\right)$ sont ses *composantes mixtes p fois contravariantes et q fois covariantes* notées $t^{i_1...i_p}_{j_1...j_q}$. Le critère de tensorialité s'applique, cette fois entre les composantes contravariantes, ou entre les composantes covariantes, ou entre les composantes mixtes p fois contravariantes et q fois covariantes, en rapport avec un changement de base dans E.

4.2 Relations entre les trois types de composantes d'un tenseur pré-euclidien

Remarque : Soit $(\overrightarrow{e_i})$ une base de l'espace pré-euclidien E ; en vertu de l'identification entre $\overrightarrow{x} \in \mathrm{E}$ et $\varphi_{\overrightarrow{x}} \in \mathrm{E}^*$:

$\overrightarrow{e_i} = \varphi_{\overrightarrow{e_i}} : \overrightarrow{x} \mapsto x_i = g_{ij} x^j = g_{ij} e^{j*} \left(\overrightarrow{x} \right)$ donc :

$$\boxed{\overrightarrow{e_i} = g_{ij} e^{j*}}$$

Soit un tenseur pré-euclidien $\mathrm{T} \in \mathrm{E}^{(s)}$; on a :
$\mathrm{T} = t^{i_1 \ldots i_s} \overrightarrow{e_{i_1}} \otimes \ldots \otimes \overrightarrow{e_{i_s}} = t^{i_1 \ldots i_s} g_{i_1 j_1} \ldots g_{i_s j_s} e^{j_1 *} \otimes \ldots \otimes e^{j_s *}$ d'après la remarque ci-dessus ; donc :

$$\boxed{t_{j_1 \ldots j_s} = t^{i_1 \ldots i_s} g_{i_1 j_1} \ldots g_{i_s j_s}}$$

On montrerait de même :

$$\boxed{t^{i_1 \ldots i_s} = g^{i_1 j_1} \ldots g^{i_s j_s} t_{j_1 \ldots j_s}}$$

Telles sont les relations entre composantes contravariantes et covariantes d'un tenseur pré-euclidien. On aurait de façon analogue des relations entre composantes contravariantes et mixtes, ou entre composantes covariantes et mixtes ; ainsi, par exemple :

$$\boxed{t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = g_{j_1 k_1} \ldots g_{j_q k_q} t^{i_1 \ldots i_p k_1 \ldots k_q}}$$

4.3 Tenseurs pré- euclidiens symétriques ou antisymétriques

Les définitions vues plus haut relatives aux tenseurs d'ordre 2 symétriques ou antisymétriques s'adaptent au cas pré-euclidien de la façon suivante :

Un tenseur pré-euclidien d'ordre 2 est dit *symétrique* ssi ses composantes contravariantes vérifient $t^{ij} = t^{ji}$ (dans une base ou, de façon équivalente, dans toute base).

Dans ce cas, ses composantes covariantes vérifient la même propriété : en effet :

$t_{hk} = g_{hi} g_{kj} t^{ij} = g_{kj} g_{hi} t^{ji} = t^{kh}$

De même, réciproquement, l'égalité des composantes covariantes t_{hk} et t_{kh} implique la symétrie du tenseur pré-euclidien.

De façon analogue, un tenseur pré-euclidien est *antisymétrique* ssi $t^{ij} = -t^{ji}$; et ceci équivaut à $t^{hk} = -t_{kh}$.

4.4 Le tenseur fondamental

A toute base $(\overrightarrow{e_i})$ de l'espace pré-euclidien E associons la liste des n^2nombres $g_{ij} = \overrightarrow{e_i}.\overrightarrow{e_j}$; pour une autre base $\left(\overrightarrow{e'_j}\right)$ on aura la famille des $g'_{ij} = \overrightarrow{e'_i}.\overrightarrow{e'_j} = \mathrm{A}_i^h \mathrm{A}_j^k \overrightarrow{e_h}.\overrightarrow{e_k} = \mathrm{A}_i^h \mathrm{A}_j^k g_{hk}$; le critère de tensorialité est donc vérifié et il existe un tenseur, dit *fondamental*, dont les composantes covariantes (donc dans $\left(e^{i*} \otimes e^{j*}\right)$) sont les g_{ij}.

Cherchons les composantes mixtes (donc dans $\left(\overrightarrow{e_i} \otimes e^{j*}\right)$) de ce tenseur, soit g_i^j :

$g_i^j = g^{jk} g_{ki} = \dfrac{\alpha^{jk}}{g} g_{ki}$ (avec α^{jk} cofacteur de g_{jk} et $g = \det(g_{ij})$) ; donc $g_i^j = \dfrac{\alpha^{jk} g_{ki}}{g}$.

Au numérateur on obtient le développement d'un déterminant obtenu en remplaçant dans g la $j^{\text{ème}}$ colonne par les g_{ki} : il est donc égal à g si $i = j$; et si $i \neq j$,il est nul (comportant deux colonnes égales : la $i^{\text{ème}}$ et la $j^{\text{ème}}$). Donc : $g_i^j = \delta_i^j$ (symbole de Kronecker).

Cherchons les composantes contravariantes (sans les noter *a priori* g^{ij} qui est une notation déjà utilisée) : soient t^{ij} ces composantes : $t^{ij} = g^{ik} g_k^j = g^{ik} \delta_k^j = g^{ij}$.

5 Coordonnées curvilignes pour un espace affine pré-euclidien

5.1 Système de coordonnées curvilignes d'un point M

Soit $\mathfrak{E}$ un espace affine pré-euclidien de dimension n (i.e. un espace affine dont la direction est un espace vectoriel E pré-euclidien de dimension n). On se donne un repère $\mathfrak{R} = (\mathrm{O}, \mathfrak{B})$ de $\mathfrak{E}$. Tout point $\mathrm{M} \in \mathfrak{E}$ a des coordonnées x^i dans $\mathfrak{R}$ (composantes de $\overrightarrow{\mathrm{OM}} \in \mathrm{E}$ dans la base $\mathfrak{B}$).

Soient un ouvert D' de R^n et n fonctions $f^i : \mathrm{D}' \to \mathrm{R} : \left(y^1, ..., y^n\right) \mapsto x^i$, pour lesquelles il existe des dérivées partielles à tout ordre telles que le déterminant fonctionnel $\det\left(\dfrac{\partial f^i}{\partial y^j}\right)$ ne s'annule pas sur D' : alors $\overrightarrow{f} = \left(f^1, ..., f^n\right)$ définit, par le biais du repère $\mathfrak{R}$, une bijection de D' sur un ouvert D de $\mathfrak{E}$.

Donc : à tout point $\mathrm{M} \in \mathrm{D}$ on peut associer un unique $\left(y^1, ..., y^n\right) \in \mathrm{D}'$; $\left(y^1, ..., y^n\right)$ est un *système de coordonnées curvilignes de* M.

Soient un entier $k \in \{1, ..., n\}$ et des réels $a^1, ..., a^{k-1}, a^{k+1}, ..., a^n$ tels que : $\mathrm{D}_k = \left\{y^k \in \mathrm{R} / \left(a^1, ..., a^{k-1}, y^k, a^{k+1}, ..., a^n\right) \in \mathrm{D}'\right\} \neq \emptyset$; soit l'application φ^i : $\mathrm{D}_k \to \mathrm{R} : y^k \mapsto \varphi^i\left(y^k\right) = f^i\left(a^1, ..., a^{k-1}, y^k, a^{k+1}, ..., a^n\right)$. L'ensemble des points $\mathrm{M} \in \mathfrak{E}$ de coordonnées $\varphi^i\left(y^k\right)$ dans $\mathfrak{R}$ est une courbe (de représentation paramétrique dans $\mathfrak{R}$: $x^i = \varphi^i\left(y^k\right)$) qui est dite *courbe-coordonnée* notée (C_k) ; par tout point $\mathrm{M} \in \mathfrak{E}$ de coordonnées curvilignes $\left(a^1, ..., a^n\right)$ passent donc n courbes-coordonnées (obtenues en "faisant varier "successivement chacune des coordonnées curvilignes de M).

Cas particulier :

Supposons que les f^i soient des polynômes du premier degré à n variables. Alors les courbes-coordonnées (C_k) ont pour représentations paramétriques $x^i = m^i y^k + p^i$: ce sont des droites ; pour cette raison les y^j constituent un système de *coordonnées rectilignes de* M.

5.2 Repère naturel en M

On suppose effectué le choix de $\mathfrak{R}$ et de $\overrightarrow{f}$, définissant pour tout point $\mathrm{M} \in \mathrm{D} \subset \mathfrak{E}$ un système de coordonnées curvilignes $\left(y^1, ..., y^n\right)$.

Posons $\overrightarrow{e_i} = \dfrac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial y^i}\left(y^1, ..., y^n\right)$: les composantes de $\overrightarrow{e_i}$ dans $\mathfrak{B}$ sont les $\dfrac{\partial f^j}{\partial y^i}\left(y^1, ..., y^n\right)$ donc $\det_{\mathfrak{B}}\left(\overrightarrow{e_i}\right) \neq 0$ donc $\left(\overrightarrow{e_i}\right)$ est une base de $\mathfrak{E}$.

Le repère $(\mathrm{M}, (\overrightarrow{e_i}))$ est le *repère naturel en* M (il dépend donc du choix de $\mathfrak{R}$ et de $\overrightarrow{f}$).

Remarque : $\overrightarrow{e_k} = \dfrac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial y^k}\left(y^1, ..., y^n\right) = \dfrac{d\overrightarrow{\varphi}}{dy^k}\left(y^k\right)$ ($\overrightarrow{\varphi}\left(y^k\right)$ étant le vecteur de composantes $\varphi^i\left(y^k\right)$) ; donc : $\overrightarrow{e_k}$ *dirige la tangente en* M *à la courbe-coordonnée* (C_k).

5.3 Exemple : coordonnées sphériques pour un espace affine euclidien de dimension 3

Soit $\mathfrak{E}$ un espace affine euclidien (défini au § 5-1)) : on peut donc parler dans $\mathfrak{E}$ de distances et d'angles.

Soit $\mathfrak{R} = (\mathrm{O}, \mathfrak{B})$ un repère orthonormé direct de $\mathfrak{E}$; en notant $\mathfrak{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ on suppose le plan vectoriel $\left[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right]$ orienté par $\overrightarrow{k}$ (i.e. $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est une base directe de ce plan).

On pose ici $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$

Prenons pour D l'ensemble $\mathfrak{E}$ privé du demi-plan Π d'équations $\left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ x \leq 0 \end{array}\right.$; pour tout point $\mathrm{M} \in \mathrm{D}$, soit m son projeté orthogonal sur le plan d'équation $z = 0$. On pose :

$$\left\{\begin{array}{c} y^1 = r = \mathrm{OM} \\ y^2 = \psi \in \left]-\pi, +\pi\right[\text{ tel que } \left(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{\mathrm{O}m}}\right) = \psi \quad (2\pi) \\ y^3 = \theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\text{ tel que } \left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{O}m}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}}\right) = \theta \quad (2\pi) \end{array}\right. \qquad \text{(voir figure 2)}$$

Alors :

$$\left\{\begin{array}{c} x = f^1\left(r, \theta, \psi\right) = r\cos\theta\cos\psi \\ y = f^2\left(r, \theta, \psi\right) = r\cos\theta\sin\psi \\ z = f^3\left(r, \theta, \psi\right) = r\sin\theta \end{array}\right.$$

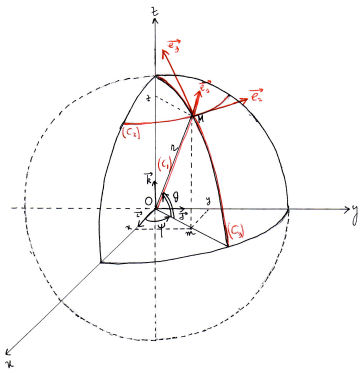

FIG. 2 –

. Ici : $\mathrm{D}' = \mathrm{R}_+^* \times]-\pi, +\pi[\times \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$; $\overrightarrow{f} = \left(f^1, f^2, f^3\right)$ est une bijection de D' sur D qui définit, pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{D}$,un système de coordonnées curvilignes appelé *coordonnées sphériques* (r, θ, ψ) *de* M.

<u>Courbes-coordonnées passant par un point $\mathrm{M} \in \mathrm{D}$</u> :

Pour ψ et θ constants : c'est la demi-droite $]\mathrm{OM})$.

Pour r et θ constants : c'est le cercle d'axe $(\mathrm{O}z)$ passant par M (privé de son intersection avec Π).

Pour r et ψ constants : c'est le cercle de centre O et passant par M dans le plan$\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overrightarrow{k}\right)$ (privé de son intersection avec Π).

<u>Repère naturel en M</u> :

$$\overrightarrow{e_1} \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial f^1}{\partial r} = \cos\theta \cos\psi = \dfrac{x}{r} \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial r} = \cos\theta \sin\psi = \dfrac{y}{r} \\ \dfrac{\partial f^3}{\partial r} = \sin\theta = \dfrac{z}{r} \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{e_2} \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial f^1}{\partial \psi} = -r\cos\theta \sin\psi = -y \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial \psi} = r\cos\theta \cos\psi = x \\ \dfrac{\partial f^3}{\partial \psi} = 0 \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{e_3} \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial f^1}{\partial \theta} = -r\sin\theta \cos\psi \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial \theta} = -r\sin\theta \sin\psi \\ \dfrac{\partial f^3}{\partial \theta} = r\cos\theta \end{array} \right.$$

<u>Remarques</u> :

1) $\overrightarrow{e_1} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{r} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{OM}}$ donc : $\|\overrightarrow{e_1}\| = 1$

2) $\|\overrightarrow{e_2}\| = r\cos\theta$

3) $\|\overrightarrow{e_3}\| = r$

4) Ici les vecteurs du repère naturel en M sont deux à deux orthogonaux.

5.4 Transformation du repère naturel par changement des coordonnées curvilignes

On revient au cas général d'un espace pré-euclidien $\mathfrak{E}$, en utilisant les notations et résultats vus aux § 5-1) et 5-2).

Soit D'' un second domaine de R^n ; soit une application $\overrightarrow{g} : \mathrm{D}'' \to \mathrm{D}'$: $\left(y'^1, ..., y'^n\right) \mapsto \left(y^1, ..., y^n\right)$; on a $\overrightarrow{g} = \left(g^1, ..., g^n\right)$ avec $g^i\left(y'^1, ..., y'^n\right) = y^i$.

On suppose que les g^i ont des dérivées partielles à tout ordre et que le déterminant fonctionnel $\det\left(\dfrac{\partial g^i}{\partial y'^j}\right)$ ne s'annule pas sur D'' : $\overrightarrow{g}$ est alors une bijection de D'' sur D' ; alors l'application $\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g} : \left(y'^1, ..., y'^n\right) \mapsto \left(x^1, ..., x^n\right)$ détermine une bijection de D'' sur D définissant pour tout point $\mathrm{M} \in \mathrm{D}$ le nouveau système de coordonnées curvilignes $\left(y'^1, ..., y'^n\right)$.

Dorénavant, conformément à l'usage, on notera (avec les notations précedentes) :
$\dfrac{\partial y^i}{\partial y'^j} = \dfrac{\partial g^i}{\partial y'^j}$

On en déduit un nouveau repère naturel en M,associé cette fois aux y'^j : ce sera $\left(\mathrm{M}, \left(\overrightarrow{e'_j}\right)\right)$ avec : $\overrightarrow{e'_j} = \dfrac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial y^i} \times \dfrac{\partial y^i}{\partial y'^j} = \dfrac{\partial y^i}{\partial y'^j}\overrightarrow{e_i}$. Donc :

$$\boxed{\overrightarrow{e'_j} = \mathrm{A}^i_j \overrightarrow{e_i} \text{ avec } \mathrm{A}^i_j = \frac{\partial y^i}{\partial y'^j}}$$

On aurait de même :

$$\boxed{\overrightarrow{e_i} = \mathrm{B}^j_i \overrightarrow{e'_j} \text{ avec } \mathrm{B}^j_i = \frac{\partial y'^j}{\partial y^i}}$$

5.5 Champ de tenseurs

$\mathfrak{E}$ étant un espace affine pré-euclidien de direction E, soit $s \in \mathrm{N}^*$: un *champ de tenseurs sur* $\mathfrak{E}$ est une application de $\mathfrak{E}$ dans $\mathrm{E}^{(s)}$.

Pour un choix de coordonnées curvilignes, le tenseur défini en $\mathrm{M} \in \mathfrak{E}$ par un champ de tenseurs donné aura des composantes (contravariantes, covariantes ou mixtes) dans la base $(\overrightarrow{e_i})$ sous-jacente au repère naturel en M. Un changement du système de coordonnées curvilignes induira une transformation des composantes du tenseur en M, consécutive au changement correspondant du repère naturel.

Exemples :

1) Un tenseur T $\in$ E$^{(3)}$ en M a des composantes (deux fois contravariantes et une fois covariante) t_k^{ij} dans la base $\left(\overrightarrow{e_i}\otimes\overrightarrow{e_j}\otimes e^{k*}\right)$ de E$^{(3)}$ associée à la base $(\overrightarrow{e_1},...,\overrightarrow{e_n})$ sous-jacente au repère naturel en M correpondant aux coordonnées curvilignes $\left(y^1,...,y^n\right)$; ce même tenseur aura au point M les composantes $t_n^{\prime lm}$ dans la base $\left(\overrightarrow{e_l^{\prime}}\otimes\overrightarrow{e_m^{\prime}}\otimes e^{\prime n*}\right)$ associée à la base $\left(\overrightarrow{e_1^{\prime}},...,\overrightarrow{e_n^{\prime}}\right)$ correspondant aux nouvelles coordonnées curvilignes $\left(y^{\prime 1},...,y^{\prime n}\right)$.

D'après ce qui précède :

$t_k^{ij}=\mathrm{A}_l^i\mathrm{A}_m^j\mathrm{B}_k^n t_n^{\prime lm}=\dfrac{\partial y^i}{\partial y^{\prime l}}\times\dfrac{\partial y^j}{\partial y^{\prime m}}\times\dfrac{\partial y^{\prime n}}{\partial y^k}\ t_n^{\prime lm}$

2) Le tenseur fondamental étant choisi comme tenseur en M, ses composantes dans $(\overrightarrow{e_i}\otimes\overrightarrow{e_j})$ sont $g_{ij}=\overrightarrow{e_i}.\overrightarrow{e_j}$; par passage des $\left(y^1,...,y^n\right)$ aux $\left(y^{\prime 1},...,y^{\prime n}\right)$ on aura (avec $g_{kl}^{\prime}=\overrightarrow{e_k^{\prime}}.\overrightarrow{e_l^{\prime}}$) :

$g_{ij}=\dfrac{\partial y^{\prime k}}{\partial y^i}.\dfrac{\partial y^{\prime l}}{\partial y^j}g_{kl}^{\prime}.$

5.6 Métrique de $\mathfrak{E}$

Pour un système donné de coordonnées curvilignes $\left(y^i\right)$ associé à un domaine D $\subset\mathfrak{E}$, on associe à tout point M $\in$ D l'élément différentiel $ds^2=g_{ij}dy^idy^j$ avec $g_{ij}=\overrightarrow{e_i}.\overrightarrow{e_j}$, $(\overrightarrow{e_i})$ étant la base sous-jacente au repère naturel en M.

Montrons que cette expression ne dépend pas du choix des $\left(y^i\right)$: soit $\left(y^{\prime j}\right)$ un nouveau système de coordonnées curvilignes (tel que M soit aussi dans le domaine de $\mathfrak{E}$ correspondant) :

$ds^2=g_{ij}dy^idy^j$

$=\dfrac{\partial y^{\prime k}}{\partial y^i}.\dfrac{\partial y^{\prime l}}{\partial y^j}.\ g_{kl}^{\prime}.\ \dfrac{\partial y^i}{\partial y^{\prime m}}.dy^{\prime m}.\dfrac{\partial y^j}{\partial y^{\prime n}}.dy^{\prime n}$

$=\dfrac{\partial y^{\prime k}}{\partial y^{\prime m}}.\dfrac{\partial y^{\prime l}}{\partial y^{\prime n}}.g_{kl}^{\prime}.dy^{\prime m}.dy^{\prime n}$

$=g_{kl}^{\prime}dy^{\prime k}dy^{\prime l}.$

L'élément différentiel est donc *intrinsèque* : on l'appelle *métrique de l'espace pré-euclidien* $\mathfrak{E}$.

Exemple : espace euclidien de dimension 3 :

Soit $\mathfrak{E}$ un espace euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé direct $\mathfrak{R}$: soit M $\in\mathfrak{E}$ de coordonnées (x,y,z) dans ce repère et de coordonnées sphériques (r,ψ,θ) (voir § 5-1).

1) Expression de ds^2 en coordonnées (x,y,z) :

Si $\mathfrak{B}=\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$ est la base orthonormée sous-jacente à $\mathfrak{R}$:

$\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{k}$ donc : $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$

2) Expression de ds^2 en coordonnées (r,ψ,θ) :

D'après ce qu'on a vu (§ 5-3) : $\overrightarrow{e_1}^2=1$, $\overrightarrow{e_2}^2=r^2\cos^2\theta$, $\overrightarrow{e_3}^2=r^2$, $\overrightarrow{e_1}.\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{e_2}.\overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{e_3}.\overrightarrow{e_1}=0$. Donc :

$ds^2=dr^2+r^2\cos^2\theta d\psi^2+r^2d\theta^2$

En revenant au cas général, soit un arc de courbe défini paramétriquement dans $\mathfrak{E}$ par $y^i = g^i(\lambda)$ $\;(\lambda \in [a,b])$; alors :

$$ds^2 = g_{ij}\frac{dy^i}{d\lambda}\frac{dy^j}{d\lambda}d\lambda^2$$
$$= g_{ij}g'^i(\lambda)\,g'^j(\lambda)\,d\lambda^2$$
$$= \left(g'^i(\lambda)\,\overrightarrow{e_i}\right).\left(g'^j(\lambda)\,\overrightarrow{e_j}\right)d\lambda^2$$
$$= \overrightarrow{g'(\lambda)}^2 d\lambda^2 \quad \text{en posant } \overrightarrow{g(\lambda)} = g^i(\lambda)\,.\overrightarrow{e_i}.$$

Supposons que, en tout point M de cet arc de courbe : $g_{ij}\frac{dy^i}{d\lambda}\frac{dy^j}{d\lambda} = \overrightarrow{g'(\lambda)}^2 \geq 0$: on définit alors la *longueur* de cet arc de courbe par l'intégrale : $\int_a^b \sqrt{\overrightarrow{g'(\lambda)}^2}.d\lambda$.

En particulier : si $\mathfrak{E}$ est euclidien, on peut parler de longueur pour tout arc de courbe.

5.7 Application à la relativité restreinte :l'espace-temps de Minkowsi

Prenons pour $\mathfrak{E}$ un espace affine de dimension 4, pré-euclidien, pour lequel il existe une base $\mathfrak{B} = (\overrightarrow{e_i})$ telle que : $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, g_{44} = k > 0, g_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Un tel espace est pseudo-euclidien, puisque $\overrightarrow{e_i}^2 = -1 < 0$ pour $i \in \{1,2,3\}$. En notant $\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right)$ les coordonnées de M dans un repère $(\mathrm{O}, \mathfrak{B})$, on aura ici : $ds^2 = -dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} + kdx^{4^2}$.

La théorie de la *relativité restreinte* décrit le monde physique qui nous environne comme un tel espace affine, en interprétant physiquement k comme le carré de la vitesse de la lumière c (posée comme un absolu, i.e. indépendante du repère à partir duquel elle est mesurée, et comme indépassable), et les points M de cet espace affine comme des *évènements* repérés par les coordonnées *spatiales* $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ d'une part, et la coordonnée *temporelle* $x^4 = t$ d'autre part.

L'espace affine $\mathfrak{E}$ correspondant est dit "espace-temps de Minkowski" ; sa métrique, dans ce système de coordonnées, s'écrit donc : $ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2dt^2$. C'est là *l'invariant* de la relativité restreinte (et non plus $dx^2 + dy^2 + dz^2$ comme dans la théorie classique de Newton qui décrivait notre monde spatial comme un espace affine euclidien de dimension 3).

Ecrivons $ds^2 = -\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) + c^2dt^2$; on peut comme ci-dessus exprimer la somme entre parenthèses en coordonnées sphériques et donner la forme suivante pour l'invariant : $ds^2 = -dr^2 - r^2\cos\theta d\psi^2 - r^2d\theta^2 + c^2dt^2$.

Soient A et B deux évènements de l'espace-temps de Minkowski $\mathfrak{E}$; dans la base $\mathfrak{B}$ de E (direction vectorielle de $\mathfrak{E}$) le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a les composantes spatio-temporelles $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \mathrm{T})$. On a donc : $\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2 = -\mathrm{X}^2 - \mathrm{Y}^2 - \mathrm{Z}^2 + c^2\mathrm{T}^2$. Deux cas se présentent :

1) $\underline{\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2 < 0}$:

$\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2 > c^2\mathrm{T}^2$: Les deux évènements sont séparés par une distance spatiale supérieure à la distance parcourue par un photon dans l'intervalle de temps les séparant : aucune particule matérielle ne peut relier les évènements A et B. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est dit *du genre espace.*

2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2 \geq 0$:

$\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2 \leq c^2\mathrm{T}^2$: Ici les deux évènements peuvent être physiquement reliés par une particule, dont les positions-évènements entre A et B constituent une courbe, dite *ligne d'univers* de l'espace-temps de Minkowski. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est dit *du genre temps.*

Parmi ces lignes d'univers figure le segment de droite [AB] de $\mathfrak{E}$. Il est paramétré ainsi (en utilisant les notations g^i vues au § 5-6) dans le repère $(\mathrm{A}, \mathfrak{B})$:

$$\begin{cases} x = g^1(\lambda) = \lambda \mathrm{X} \\ y = g^2(\lambda) = \lambda \mathrm{Y} \\ z = g^3(\lambda) = \lambda \mathrm{Z} \\ t = g^4(\lambda) = \lambda \mathrm{T} \end{cases} \qquad \text{(avec } \lambda \in [0,1])$$

En reprenant la notation $\overrightarrow{g(\lambda)} = g^i(\lambda)\,\overrightarrow{e_i}$ du § 5-6, on a donc ici $\overrightarrow{g'(\lambda)}^2 = -\mathrm{X}^2 - \mathrm{Y}^2 - \mathrm{Z}^2 + c^2\mathrm{T}^2 \geq 0$ et on peut attribuer au segment [AB] de l'espace-temps la longueur $l = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{-\mathrm{X}^2 - \mathrm{Y}^2 - \mathrm{Z}^2 + c^2\mathrm{T}^2}\,d\lambda = \sqrt{\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2}$.

Le cas particulier où $\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2 = 0$ est celui où les deux évènements sont reliés par un photon : le segment [AB], ligne d'univers parcourue par ce photon, est ici de longueur nulle.

5.8 Symboles de Christoffel

$\mathfrak{E}$ étant un espace affine pré-euclidien, soit $(\mathrm{M}, (\overrightarrow{e_i}))$ le repère naturel en $\mathrm{M} \in \mathfrak{E}$ pour un système donné de coordonnées curvilignes (y^i). Les $\overrightarrow{e_i} = \dfrac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial y^i}$ étant des fonctons vectorielles des y^i, posons : $\dfrac{\partial \overrightarrow{e_i}}{\partial y^k} = \Gamma^j_{ki}\overrightarrow{e_j}$: les nombres Γ^j_{ki} sont les *symboles de Christoffel.*

Exemple :

Soit $\mathfrak{E}$ un plan affine euclidien rapporté au repère $\mathfrak{R} = \left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ orthonormé direct ; on note ici $x^1 = x, x^2 = y$. Prenons pour D l'ensemble $\mathfrak{E}$ privé de l'ensemble des points $\mathrm{M} \left| \begin{array}{l} x \leq 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$; pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{D}$ on pose :

$$\begin{cases} y^1 = r = \mathrm{OM} \\ y^2 = \theta \in \left]-\pi, +\pi\right[\text{ tel que } \left(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}}\right) = \theta \quad (2\pi) \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{cases} x = f^1(r,\theta) = r\cos\theta \\ y = f^2(r,\theta) = r\sin\theta \end{cases}$$

Ici $\mathrm{D}' = \mathrm{R}^*_+ \times \left]-\pi, +\pi\right[$ et $\overrightarrow{f} = \left(f^1, f^2\right)$ est une bijection de D' sur D qui définit, pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{D}$, un système de coordonnées curvilignes appelé *coordonnées polaires* (r, θ) de M.

Calculons les huit termes Γ^j_{ki} dans ce cas :
$\overrightarrow{e_1}\begin{vmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{vmatrix}$; $\overrightarrow{e_2}\begin{vmatrix}-r\sin\theta\\ r\cos\theta\end{vmatrix}$; $\dfrac{\partial\overrightarrow{e_1}}{\partial r}\begin{vmatrix}0\\ 0\end{vmatrix}$; $\dfrac{\partial\overrightarrow{e_1}}{\partial\theta}\begin{vmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{vmatrix}$; $\dfrac{\partial\overrightarrow{e_2}}{\partial r}\begin{vmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{vmatrix}$; $\dfrac{\partial\overrightarrow{e_2}}{\partial\theta}\begin{vmatrix}-r\cos\theta\\ -r\sin\theta\end{vmatrix}$ donc :
$\dfrac{\partial\overrightarrow{e_1}}{\partial r}=\overrightarrow{0}$, $\dfrac{\partial\overrightarrow{e_1}}{\partial\theta}=\dfrac{1}{r}\overrightarrow{e_2}=\dfrac{\partial\overrightarrow{e_2}}{\partial r}$, $\dfrac{\partial\overrightarrow{e_2}}{\partial\theta}=-r\overrightarrow{e_1}$; donc :
$\Gamma^1_{11}=\Gamma^2_{11}=0$, $\Gamma^1_{12}=0$, $\Gamma^2_{12}=\dfrac{1}{r}$, $\Gamma^1_{21}=0$, $\Gamma^2_{21}=\dfrac{1}{r}$, $\Gamma^1_{22}=-r$, $\Gamma^2_{22}=0$.

On démontre les propriétés suivantes :
1) $\Gamma^j_{ki}=\Gamma^j_{ik}=\dfrac{g^{jh}}{2}\left(\dfrac{\partial g_{ih}}{\partial y^k}+\dfrac{\partial g_{hk}}{\partial y^i}-\dfrac{\partial g_{ki}}{\partial y^h}\right)$
2) Il n'existe aucun tenseur d'ordre 3 dont les composantes une fois contravariante et deux fois covariantes soient les Γ^j_{ki} : en effet, les formules de transformation des Γ^j_{ki} en Γ'^n_{ml} par changement de coordonnées curvilignes montreraient que le critère de tensorialité n'est pas vérifié ici.

6 Dérivée covariante d'un champ de tenseurs sur un espace affine pré-euclidien

6.1 Dérivée covariante d'un champ de vecteurs

Pour un système donné de coordonnées curvilignes $\left(y^k\right)$ valant sur un ouvert D de $\mathfrak{E}$, à tout point M $\in$ D est associé le repère naturel $(\mathrm{M},(\overrightarrow{e_i}))$.

On considère le champ de vecteurs qui, à tout M $\in$ D, associe un vecteur $\overrightarrow{v}=v^i\overrightarrow{e_i}$ ($\overrightarrow{v}$ est donc fonction des $\left(y^k\right)$).

Evaluons les composantes de $\dfrac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial y^k}$ sur $(\overrightarrow{e_i})$:
$\dfrac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial y^k}=\dfrac{\partial v^i}{\partial y^k}\overrightarrow{e_i}+v^i\dfrac{\partial\overrightarrow{e_i}}{\partial y^k}=\dfrac{\partial v^i}{\partial y^k}\overrightarrow{e_i}+v^i\Gamma^h_{ki}\overrightarrow{e_h}=\dfrac{\partial v^i}{\partial y^k}\overrightarrow{e_i}+v^h\Gamma^i_{kh}\overrightarrow{e_i}$ (par changement de notations indicielles) donc :
$\dfrac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial y^k}=\left(\dfrac{\partial v^i}{\partial y^k}+v^h\Gamma^i_{kh}\right)\overrightarrow{e_i}$
Les composantes cherchées sont donc les nombres

$$\boxed{\nabla_k v^i=\frac{\partial v^i}{\partial y^k}+v^h\Gamma^i_{kh}}$$

Remarque : dans le cas particulier d'un système de coordonnées rectilignes, les vecteurs $\overrightarrow{e_i}$ sont constants pour tout M : alors $\dfrac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial y^k}=\dfrac{\partial v^i}{\partial y^k}\overrightarrow{e_i}$ et donc $\nabla_k v^i=\dfrac{\partial v^i}{\partial y^k}$

Si on prend un autre système de coordonnées curvilignes $\left(y'^l\right)$ avec le repère naturel correspondant $\left(\mathrm{M}, \left(\overrightarrow{e'_j}\right)\right)$, on aura $\overrightarrow{v} = v'^j \overrightarrow{e'_j}$ et les composantes de $\dfrac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial y'^l}$ sur $\left(\overrightarrow{e'_j}\right)$ seront donc : $\nabla_l v'^j = \dfrac{\partial v'^j}{\partial y'^l} + v'^m \Gamma'^j_{lm}$. On montre (avec les notations habituelles) que : $\nabla_k v^i = \mathrm{A}^i_j \mathrm{B}^l_k \nabla_l v'^j$ et donc :

Pour tout M *il existe un tenseur d'ordre 2 dont les composantes mixtes relatives à toute base d'un repère naturel* $(\mathrm{M}, (\overrightarrow{e_i}))$ *(composantes dans* $\left(\overrightarrow{e_i} \otimes e^{k*}\right)$*) sont les* $\nabla_k v^i$. Ce tenseur est nommé *dérivée covariante en* M du champ de vecteurs donné.

A tout point M on peut donc associer par ce moyen un tenseur d'ordre 2 : on définit ainsi un champ de tenseurs d'ordre 2.

Remarque : On montre qu'il n'existe pas de tenseur d'ordre 2 dont les composantes mixtes relatives à toute base d'un repère naturel $(\mathrm{M}, (\overrightarrow{e_i}))$soient les $\dfrac{\partial v^i}{\partial y^k}$: les relations entre $\dfrac{\partial v^i}{\partial y^k}$ et $\dfrac{\partial v'^j}{\partial y'^l}$ ne vérifieraient pas le critère de tensorialité.

6.2 Application : composantes des vecteurs vitesse et accélération

Dans ce paragraphe, nous allons calculer les composantes des vecteurs vitesse et accélération d'un point $\mathrm{M}(t)$ dans la base $(\overrightarrow{e_i})$ du repère naturel en $\mathrm{M}(t)$.

Soit un point $\mathrm{M}(t)$ en mouvement (t étant le temps) : sa position à l'instant t est définie par $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = \overrightarrow{f}\left(y^1(t), ..., y^n(t)\right)$.

1) Vecteur-vitesse à l'instant t :

$$\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt} = \frac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial y^i}.\frac{dy^i}{dt} = \frac{dy^i}{dt}.\overrightarrow{e_i} = v^i \overrightarrow{e_i} \quad \text{avec}$$

$$\boxed{v^i = \frac{dy^i}{dt}}$$

2) Vecteur-accélération à l'instant t :

$$\overrightarrow{\gamma} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial y^k}.\frac{dy^k}{dt} = \nabla_k v^i.\frac{dy^k}{dt}.\overrightarrow{e_i} = \left(\frac{\partial v^i}{\partial y^k} + v^h \Gamma^i_{kh}\right)\frac{dy^k}{dt}\overrightarrow{e_i} \quad \text{donc :}$$

$$\overrightarrow{\gamma} = \left(\frac{dv^i}{dt} + v^h \Gamma^i_{kh}\frac{dy^k}{dt}\right)\overrightarrow{e_i} = \gamma^i \overrightarrow{e_i} \quad \text{avec}$$

$$\boxed{\gamma^i = \frac{d^2 y^i}{dt^2} + \frac{dy^k}{dt}\frac{dy^h}{dt}\Gamma^i_{kh}}$$

Exemple en coordonnées polaires (voir § 5-8) :

$y^1 = r$, $y^2 = \theta$ donc $\underline{v^1 = \dfrac{dr}{dt}}$, $\underline{v^2 = \dfrac{d\theta}{dt}}$.

$\gamma^1 = \dfrac{d^2 r}{dt^2} + \dfrac{dy^h}{dt}.\dfrac{dy^k}{dt}.\Gamma^1_{kh}$; or on a vu que : $\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0$ et $\Gamma^1_{22} = -r$.

Donc :

$$\underline{\gamma^1 = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$

$\gamma^2 = \dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{dy^h}{dt}.\dfrac{dy^k}{dt}.\Gamma^2_{kh}$; or : $\Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = 0$; $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \dfrac{1}{r}$. Donc :
$\underline{\gamma^2 = \dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{2}{r}.\dfrac{dr}{dt}.\dfrac{d\theta}{dt}}$

Remarque :

Soit un mouvement tel que : $\forall t : \overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{0}$, ce qui équivaut donc au fait que les y^i (fonctions de t) vérifient :
$\dfrac{d^2y^i}{dt^2} + \dfrac{dy^h}{dt}.\dfrac{dy^k}{dt}.\Gamma^i_{kh} = 0.$

Prenons pour y^i les coordonnées cartésiennes par rapport au repère $\mathfrak{R} = (\mathrm{O}, \mathfrak{B})$: alors les Γ^i_{kh} sont nuls et les équations se ramènent à $\dfrac{d^2y^i}{dt^2} = 0$, soit $y^i = \mathrm{A}t + \mathrm{B}$: les mouvements à accélération toujours nulle dans un espace affine pré-euclidien sont *rectilignes uniformes.*

6.3 Généralisation : dérivée covariante d'un champ de tenseurs

Soit un champ de tenseurs associant à tout point $\mathrm{M} \in \mathrm{D}$ le tenseur $\mathrm{T} = t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \overrightarrow{e_{i_1}} \otimes \ldots \otimes \overrightarrow{e_{i_p}} \otimes e^{j_1 *} \otimes \ldots \otimes e^{j_q *}$, $(\mathrm{M}, (\overrightarrow{e_i}))$ étant le repère naturel en M.

On montre que les composantes de $\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial y^k}$ en M sur la base $\overrightarrow{e_{i_1}} \otimes \ldots \otimes e^{j_q *}$, notées $\nabla_k t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$, sont les composantes mixtes, p fois contravariantes et $q+1$ fois covariantes, d'un tenseur d'ordre $p+q+1$, dit tenseur *dérivée covariante* en M du champ de tenseurs considéré.

Théorème de Ricci :

La dérivée covariante en tout point $\mathrm{M} \in \mathfrak{E}$ du champ de tenseurs uniforme associant à tout M le tenseur fondamental est le tenseur nul de $\mathrm{E}^{(3)}$.

C'est-à-dire : $\forall \mathrm{M} \in \mathfrak{E} : \nabla_k g_{ij} = 0$ si $g_{ij} = \overrightarrow{e_i}.\overrightarrow{e_j}$.

7 Espaces de Riemann

7.1 Rappel : Variété différentielle

Un ensemble V (dont les éléments seront encore appelés *points*) est une *variété différentielle de dimension n* ssi V est un espace topologique séparé admettant un recouvrement d'ouverts U_α tel que :

1) Pour tout ouvert U_α de ce recouvrement, il existe un homéomorphisme (bijection bicontinue) φ_α de U_α sur un ouvert $\Omega_\alpha = \varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha)$ de R^n.

2) Pour tout couple $(\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{U}_\beta)$ d'ouverts de ce recouvrement, d'intersection non vide, la bijection $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ de l'ouvert $\varphi_\beta(\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta)$ de R^n sur l'ouvert $\varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta)$ de R^n est indéfiniment différentiable, de même que sa bijection réciproque $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$.

$(\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha)$ est une *carte* de V ; l'ensemble des cartes est l'*atlas* de V.

Tout point M $\in$ V se trouvant dans un U_α, on peut d'après cette définition lui associer par φ_α un $n-$uple $\left(y^1,...,y^n\right) \in \Omega_\alpha$; si M appartient aussi à U_β, on peut lui associer par φ_β un $\left(y'^1,...,y'^n\right) \in \Omega_\beta$; les y'^i sont alors des fonctions indéfiniment différentiables des y^j, et réciproquement.

7.2 Définition d'un espace de Riemann

Soit V une variété différentielle de dimension n, pour laquelle les cartes $(\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha)$ sont définies comme ci-dessus. On suppose de plus que sur chaque Ω_α sont définies n^2 fonctions réelles g_{ij} $(i,j \in \{1,...,n\})$ indéfiniment différentiables, avec $g_{ij} = g_{ji}$, et telles que : si les g_{ij} sont définies sur Ω_α et les g'_{kl} sur Ω_β avec $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta \neq \emptyset$: $g_{ij} = \dfrac{\partial y'^k}{\partial y^i} \times \dfrac{\partial y'^l}{\partial y^j} \times g'_{kl}$.

Alors : la donnée de V, des $(\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha)$ et des g_{ij} ainsi associées à chaque U_α définit un *espace de Riemann de dimension* n (encore noté V).

Un espace affine pré-euclidien est un cas particulier d'espace de Riemann : avec les notations vues plus haut (§5-1 et 5-6) : U_α et Ω_α sont respectivement les ouverts D et D$'$, φ_α est l'application $\overrightarrow{f}^{-1}$, les g_{ij} sont les $\overrightarrow{e_i}.\overrightarrow{e_j}$ définis à partir du repère naturel correspondant à la donnée de $\left(y^1,...,y^n\right)$.

7.3 Métrique riemanienne

A tout point M $\in \mathrm{U}_\alpha$ on associe $\varphi_\alpha(\mathrm{M}) = \left(y^1,...,y^n\right) \in \Omega_\alpha$ d'où n^2 nombres $g_{ij}\left(y^1,...,y^n\right)$, d'où l'élément différentiel : $ds^2 = g_{ij}\left(y^1,...,y^n\right) dy^i dy^j$ (noté $g_{ij}dy^i dy^j$).

Si M appartient aussi à U_β avec $\varphi_\beta(\mathrm{M}) = \left(y'^1,...,y'^n\right) \in \Omega_\beta$, on montre, par le même raisonnement que dans le § 5-6, en utilisant les conditions imposées aux g_{ij}, que : $ds^2 = g'_{kl}dy'^k dy'^l$. Donc : l'élément différentiel ds^2 est *intrinsèque :* on l'appelle *métrique de* V ; c'est une métrique *riemannienne* (dans le cas particulier où V est un espace affine pré-euclidien, cette métrique n'est autre que celle définie au § 5-6 : la métrique riemannienne est alors dite *pré-euclidienne*).

Soit un arc de courbe de V paramétré par $y^i = g^i(\lambda)$, avec $\lambda \in [a,b]$; en généralisant ce qu'on a vu pour un espace pré-euclidien, on définit la *longueur* de cet arc de courbe, pourvu que en tout point M de cet arc on ait $g_{ij}\dfrac{dy^i}{d\lambda}\dfrac{dy^j}{d\lambda} \geq 0$, par l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \sqrt{g_{ij}\frac{dy^i}{d\lambda}\frac{dy^j}{d\lambda}}d\lambda$.

7.4 Métrique pré-euclidienne tangente à une métrique riemannienne en $\mathrm{M}_0 \in \mathrm{V}$

Notations :

Soit $\mathrm{M}_0 \in \mathrm{V}$; $\mathrm{M}_0 \in \mathrm{U}_\alpha$; $\forall \mathrm{M} \in \mathrm{U}_\alpha : \varphi_\alpha(\mathrm{M}) = \left(y^1, ..., y^n\right) \in \Omega_\alpha$; $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_0) = \left(y_0^1, ..., y_0^n\right) \in \Omega_\alpha$ et $g_{ij}\left(y_0^1, ..., y_0^n\right) = (g_{ij})_0$.

Dans toute la suite, on suppose que l'espace de Riemann V vérifie la propriété suivante :

Pour tout $\mathrm{M}_0 \in \mathrm{V}$, il existe :

1) un espace affine pré-euclidien de dimension n, noté $\mathfrak{E}_{\mathrm{M}_0}$ (de direction $\mathrm{E}_{\mathrm{M}_0}$) ;

2) un voisinage ouvert $\mathrm{V}_{\mathrm{M}_0}$ de M_0 dans V et une application injective Φ : $\mathrm{V}_{\mathrm{M}_0} \to \mathfrak{E}_{\mathrm{M}_0} : \mathrm{M} \mapsto \Phi(\mathrm{M}) = m$ (on note $\Phi(\mathrm{M}_0) = m_0$),

tels que :

a) $\Phi(\mathrm{V}_{\mathrm{M}_0})$ est un ouvert de $\mathfrak{E}_{\mathrm{M}_0}$;

b) Pout tout U_α contenant $\mathrm{V}_{\mathrm{M}_0}$: l'application $\Phi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ de l'ouvert $\varphi_\alpha(\mathrm{V}_{\mathrm{M}_0})$ de R^n dans l'ouvert $\Phi(\mathrm{V}_{\mathrm{M}_0})$ de $\mathfrak{E}_{\mathrm{M}_0}$ définit un système de coordonnées curvilignes $\left(y^1, ..., y^n\right)$ pour tout $m \in \Phi(\mathrm{V}_{\mathrm{M}_0}) \subset \mathfrak{E}_{\mathrm{M}_0}$, et le repère naturel $(m_0, (\overrightarrow{e_i}))$ en m_0 correspondant à ces coordonnées curvilignes vérifie : $\overrightarrow{e_i}.\overrightarrow{e_j} = (g_{ij})_0$.

(Voir le diagramme figure 3, illustrant le cas $n = 2$).

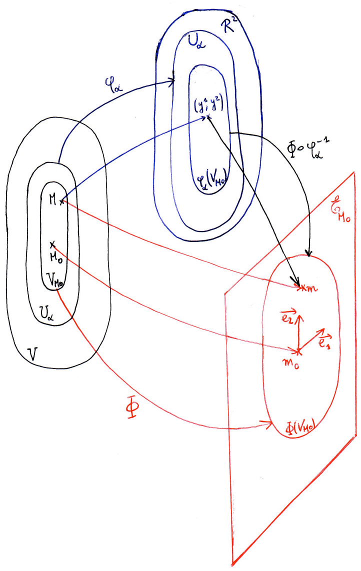

Fig. 3 –

La métrique sur l'espace pré-euclidien $\mathfrak{E}_{\mathrm{M}_0}$ a pour expression en m_0 : $\overrightarrow{e_i}.\overrightarrow{e_j}dy^i dy^j$, et la métrique riemannienne a pour expression en M_0 : $(g_{ij})_0 dy^i dy^j$: ces deux expressions coïncident donc. On exprime cela en disant que la métrique pré-euclidienne est *tangente* à la métrique riemannienne en M_0.

Dans le cas particulier où l'espace de Riemann est lui-même un espace affine pré-euclidien, il coïncide avec $\mathfrak{E}_{\mathrm{M}_0}$ pour tout M_0, et Φ est l'identité.

7.5 Tenseur en $\mathrm{M}_0 \in \mathrm{V}$

Définitions :

Un *tenseur* T *d'ordre* s *en* $\mathrm{M}_0 \in \mathrm{V}$ est un élément de $\mathrm{E}^{(s)}_{\mathrm{M}_0}$.

Soit un tenseur T en M_0 ; $\mathrm{M}_0 \in \mathrm{U}_\alpha$: on en déduit la base $(\overrightarrow{e_i})$ de $\mathrm{E}_{\mathrm{M}_0}$ définie comme ci-dessus. Le tenseur T aura des composantes $t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ (avec $p + q = s$) dans la base $\overrightarrow{e_{i_1}} \otimes \dots \otimes \overrightarrow{e_{i_p}} \otimes e^{j_1 *} \otimes \dots \otimes e^{j_q *}$ de $\mathrm{E}^{(s)}_{\mathrm{M}_0}$. Les nombres $t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ sont les *composantes de* T, p *fois contravariantes et* q *fois covariantes, relativement à* U_α *(ou : à* $\left(y^1 \dots, y^n\right)$*)*.

Transformation des composantes de T par changement de U_α en U_β :

On suppose que M_0 appartient aussi à U_β qui introduit un nouveau système de coordonnées curvilignes $\left(y'^1, \dots, y'^n\right)$ sur $\mathfrak{E}_{\mathrm{M}_0}$. Prenons par exemple $s = 3$; T a les composantes t^{ij}_k relativement à $\left(y^1, \dots, y^n\right)$ et t'^{lm}_n relativement à $\left(y'^1, \dots, y'^n\right)$. Comme ce sont les composantes de T dans $\left(\overrightarrow{e_i} \otimes \overrightarrow{e_j} \otimes e^{k*}\right)$ et $\left(\overrightarrow{e'_l} \otimes \overrightarrow{e'_m} \otimes e^{n*}\right)$ respectivement, on aura (cf § 5-5) :

$$t^{ij}_k = \frac{\partial y^i}{\partial y'^l} \times \frac{\partial y^j}{\partial y'^m} \times \frac{\partial y'^n}{\partial y^k} \times t'^{lm}_n$$

Exemple :

Puisque $(g_{ij})_0 = \overrightarrow{e_i} . \overrightarrow{e_j}$, les nombres $(g_{ij})_0$ sont les composantes covariantes en m_0 du tenseur fondamental de $\mathrm{E}_{\mathrm{M}_0}$.

Cas particulier :

Un tenseur d'ordre 1 en M_0 est un *vecteur en* M_0 ; ses composantes contravariantes v^i sont ses composantes dans $(\overrightarrow{e_i})$; ses composantes covariantes v_i sont ses composantes dans $\left(e^{i*}\right)$.

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs en M_0 (donc deux vecteurs de l'espace vectoriel pré-euclidien $\mathrm{E}_{\mathrm{M}_0}$) et si, relativement à $\left(y^1, \dots, y^n\right)$, $\overrightarrow{u}$ a les composantes u^i et $\overrightarrow{v}$ les composantes v^i :

$$\overrightarrow{u} . \overrightarrow{v} = \left(u^i \overrightarrow{e_i}\right) . \left(v^j \overrightarrow{e_j}\right) = u^i v^j \left(g_{ij}\right)_0$$

7.6 Métrique pré-euclidienne osculatrice à une métrique riemannienne en $\mathrm{M}_0 \in \mathrm{V}$

Dans toute la suite, on fait l'hypothèse supplémentaire suivante (avec les notations vues plus haut) :

$$\text{pour tout } \mathrm{M}_0 \in \mathrm{V} : \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}\right)_0 = \frac{\partial\left(\overrightarrow{e_i} . \overrightarrow{e_j}\right)}{\partial y^k}.$$

On exprime cette propriété en disant que la métrique pré-euclidienne (déjà tangente à la métrique riemanienne par le fait que $(g_{ij})_0 = \overrightarrow{e_i} . \overrightarrow{e_j}$) est *osculatrice en* M_0 à la métrique riemannienne.

7.7 Vecteurs vitesse et accélération d'un point mobile dans un espace de Riemann

Soit un point mobile $\mathrm{M}(t) \in \mathrm{U}_\alpha$ (t étant le temps) ; $\varphi_\alpha(\mathrm{M}(t)) = \left(y^1(t), ..., y^n(t)\right) \in \Omega_\alpha$.

Soit le vecteur $\overrightarrow{v}$ en $\mathrm{M}(t)$ de composantes contravariantes $v^i = \dfrac{dy^i}{dt}$ relativement à $\left(y^1, ..., y^n\right)$ (donc : $\overrightarrow{v} = \dfrac{dy^i}{dt}\overrightarrow{e_i}$, $(\overrightarrow{e_i})$ étant la base de $\mathrm{E}_{\mathrm{M}(t)}$ définie plus haut) : $\overrightarrow{v}$ est dit *vecteur-vitesse* de $\mathrm{M}(t)$ à l'instant t.

Pour définir un vecteur-accélération, on ne peut plus ici poser $\overrightarrow{\gamma} = \dfrac{d\overrightarrow{v}}{dt}$, car ici $\overrightarrow{v}$ appartient à un espace vectoriel $\mathrm{E}_{\mathrm{M}(t)}$ qui varie lui-même avec t. On va considérer l'instant t_0, le point $\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}(t_0) \in \mathrm{V}$, le vecteur-vitesse $\overrightarrow{v}_0$ du mobile à l'instant t_0 ; et on va définir le vecteur-accélération $\overrightarrow{\gamma}_0$ du mobile à l'instant t_0 de la façon suivante :

Pour tout t, soit le point $m(t) = \Phi(\mathrm{M}(t)) \in \mathfrak{E}_{\mathrm{M}_0}$; ce point $m(t)$, en mouvement dans $\mathfrak{E}_{\mathrm{M}_0}$, a à l'instant t le vecteur-vitesse $\overrightarrow{w}(t) = \dfrac{dy^i}{dt}\overrightarrow{e_i}$, $(\overrightarrow{e_i})$ *étant ici la base naturelle de* $\mathrm{E}_{\mathrm{M}_0}$ *en* $m(t)$; on a donc : $\overrightarrow{w}(t_0) = \overrightarrow{v}_0$. Par définition, on pose : $\overrightarrow{\gamma}_0 = \left(\dfrac{d\overrightarrow{w}}{dt}\right)_0 \in \mathrm{E}_{\mathrm{M}_0}$ (dérivée en t_0 de $\overrightarrow{w}(t) \in \mathrm{E}_{\mathrm{M}_0}$: c'est le vecteur-accélération du point $m(t)$ à l'instant t_0). Nous allons évaluer ce vecteur $\overrightarrow{\gamma}_0$, par ses composantes $\left(\gamma^i\right)_0$ sur la base $(\overrightarrow{e_i})_0$ (base naturelle de $\mathfrak{E}_{\mathrm{M}_0}$ en $m(t_0)$).

D'après le § 6-2 : pour tout t : $\dfrac{d\overrightarrow{w}}{dt} = \overline{\gamma^i}\overrightarrow{e_i}$ avec : $\overline{\gamma^i} = \dfrac{d^2y^i}{dt^2} + \dfrac{dy^k}{dt}.\dfrac{dy^h}{dt}\overline{\Gamma^i_{kh}}$, avec $\overline{\Gamma^i_{kh}} = \dfrac{\overline{g^{ij}}}{2}\left(\dfrac{\partial\overline{g_{hj}}}{\partial y^k} + \dfrac{\partial\overline{g_{jk}}}{\partial y^h} - \dfrac{\partial\overline{g_{kh}}}{\partial y^j}\right)$ où $\overline{g_{ij}} = \overrightarrow{e_i}.\overrightarrow{e_j}$; et comme la métrique pré-euclidienne sur $\mathfrak{E}_{\mathrm{M}_0}$ est osculatrice à la métrique riemannienne : $\left(\gamma^i\right)_0 = \left(\dfrac{d^2y^i}{dt^2}\right)_0 + \left(\dfrac{dy^k}{dt}\right)_0\left(\dfrac{dy^h}{dt}\right)_0\left(\Gamma^i_{kh}\right)_0$ avec : $\left(\Gamma^i_{kh}\right)_0 = \left(\dfrac{g^{ij}}{2}\right)_0\left[\left(\dfrac{\partial g_{hj}}{\partial y^k}\right)_0 + \left(\dfrac{\partial g_{jk}}{\partial y^h}\right)_0 - \left(\dfrac{\partial g_{kh}}{\partial y^j}\right)_0\right]$.

Et donc, en un point $\mathrm{M}(t)$ correspondant à un instant t quelconque :

$$\boxed{\gamma^i = \frac{d^2y^i}{dt^2} + \frac{dy^h}{dt}.\frac{dy^k}{dt}.\Gamma^i_{kh}}$$

On trouve donc les mêmes expressions que dans le cas d'un espace affine pré-euclidien, mais ici les Γ^i_{kh} sont calculés à partir des g_{ij} correspondant à $\left(y^1, ..., y^n\right)$ donné par l'espace de Riemann.

Les équations des mouvements tels que $\overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{0}$ pour tout t sont donc :

$$\frac{d^2y^i}{dt^2} + \frac{dy^h}{dt}.\frac{dy^k}{dt}.\Gamma^i_{kh} = 0,$$

comme dans le cas de l'espace affine pré-euclidien (avec la même remarque sur la détermination des Γ^i_{kh}).

Les trajectoires de ces mouvements sont dites *géodésiques* de V. Or, on a vu (§ 6-2) que les mouvements à vecteur-accélération toujours nul dans un espace affine pré-euclidien étaient les mouvements rectilignes uniformes ; les géodésiques d'un espace affine pré-euclidien sont donc des droites (ou demi-droites ou segments de droites selon l'intervalle de temps envisagé).

Donc : dans le cas particulier d'un espace affine pré-euclidien, les géodésiques réalisent le minimum de longueur d'un arc de courbe joignant deux points donnés (si une telle longueur peut être définie). Ce résultat se généralise ainsi à un espace riemannien : *les géodésiques réalisent les extrêmales (maximales ou minimales) de longueur d'un arc de courbe joignant deux points donnés (si une telle longueur peut être définie).*

7.8 Champ de tenseurs sur un espace de Riemann

Définition :

Soit $\mathfrak{O}$ l'ensemble des ouverts U_α du recouvrement de V ; soit $\mathfrak{F}$ le sous-ensemble de $\mathrm{V} \times \mathfrak{O}$ formé des couples $(\mathrm{M}, \mathrm{U}_\alpha)$ tels que $\mathrm{M} \in \mathrm{U}_\alpha$. Soit $s \in \mathrm{N}^*$:

Un *champ de tenseurs sur l'espace de Riemann* V est une application de $\mathfrak{F}$ dans $\mathrm{R}^{(s+1)n^s}$ qui, à tout $(\mathrm{M}, \mathrm{U}_\alpha) \in \mathfrak{F}$, associe $(s+1)$ listes à n^s réels :

une liste de nombres notés $t^{i_1 \dots i_s}$ (les indices variant de 1 à n) ;

$(s-1)$ listes de nombres notés $t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ avec $p+q=s$, $1 \leq p \leq s-1$ (les indices variant de 1 à n) ;

une liste de nombres notés $t_{j_1 \dots j_s}$ (les indices variant de 1 à n),

listes vérifiant les deux propriétés suivantes :

1) les relations du type du § 4-2 : exemple :

$t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = g_{j_1 k_1} \dots g_{j_q k_q} t^{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_q}$

2) si $\mathrm{M} \in \mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta$, les relations du type du § 5-5 entre les éléments des images de $(\mathrm{M}, \mathrm{U}_\alpha)$ et de $(\mathrm{M}, \mathrm{U}_\beta)$: exemple avec $s=3$:

$$t^{ij}_k = \frac{\partial y^i}{\partial y'^l} \times \frac{\partial y^j}{\partial y'^m} \times \frac{\partial y'^n}{\partial y^k} t'^{lm}_n.$$

Image dans $\mathfrak{E}_{\mathrm{M}_0}$ d'un champ de tenseurs sur V :

On reprend les notations du § 7-4 :

Soit $\mathrm{M}_0 \in \mathrm{V}_{\mathrm{M}_0} \subset \mathrm{U}_\alpha$; soit $m \in \Phi(\mathrm{V}_{\mathrm{M}_0}) \subset \mathfrak{E}_{\mathrm{M}_0}$: m est l'image d'un unique point $\mathrm{M} \in \mathrm{V}_{\mathrm{M}_0}$; les listes associées à $(\mathrm{M}, \mathrm{U}_\alpha)$ par la définition ci-dessus sont alors les composantes (contravariantes, mixtes ou covariantes) d'un tenseur pré-euclidien en m, élément de $\mathrm{E}^{(s)}_{\mathrm{M}_0}$.

D'où un champ de tenseurs sur $\mathfrak{E}_{\mathrm{M}_0}$ (pour sa définition en- dehors de $\Phi(\mathrm{V}_{\mathrm{M}_0})$ il suffit de prendre le tenseur nul en tout point de $\mathfrak{E}_{\mathrm{M}_0} \diagdown \Phi(\mathrm{V}_{\mathrm{M}_0})$).

Ce champ de tenseurs sur $\mathfrak{E}_{\mathrm{M}_0}$ est dit *image en* M_0 *du champ de tenseurs donné sur* V.

Dérivée covariante en $M_0 \in V$ d'un champ de tenseurs sur V :

La dérivée covariante en M_0 d'un champ de tenseurs sur V est par définition le tenseur dérivée covariante en $m_0 = \Phi(M_0)$ de l'image en M_0 du champ de tenseurs donné sur V ; c'est donc (voir le § 6-3) le tenseur de $E_{M_0}^{(s+1)}$ de composantes $\nabla_k t_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p}$ sur la base $\overrightarrow{e_{i_1}} \otimes \ldots \otimes \overrightarrow{e^{i_p}} \otimes e^{k*} \otimes e^{j_1*} \otimes \ldots \otimes e^{j_q*}$, $(m_0, (\overrightarrow{e_i}))$ étant le repère naturel en m_0.

Divergence en M_0 d'un champ de tenseurs d'ordre 2 sur V :

Soit $\nabla_k t_i^j$ la dérivée covariante en M_0 d'un champ de tenseurs d'ordre 2 ; la *divergence en* M_0 de ce champ de tenseurs est le tenseur $\nabla_k t_i^k$ obtenu à partir de la dérivée covariante par contraction d'indices (voir le § 2-5) : c'est donc le vecteur (tenseur d'ordre 1) de E_{M_0} qui s'écrit $\nabla_k t_i^k e_i^*$, (e_i^*) étant la base duale de la base $(\overrightarrow{e_i})$ du repère naturel de $\mathfrak{E}_{M_0}$ en m_0.

7.9 Tenseur de courbure

Soit l'espace de Riemann V ; à tout point M de V correspondant à $(y^1, \ldots, y^n)$ on associe les nombres :

$$R_{irs}^h = \frac{\partial \Gamma_{si}^h}{\partial y^r} - \frac{\partial \Gamma_{ri}^h}{\partial y^s} + \Gamma_{rl}^h \Gamma_{si}^l - \Gamma_{sl}^h \Gamma_{ri}^l$$

calculés en ce point.

On peut montrer qu'il s'agit là des composantes d'un tenseur en ce point (ce sont donc les composantes, une fois contravariante et trois fois covariantes, d'un tenseur de $E_M^{(4)}$ dans la base $(\overrightarrow{e_i})$ de E_M définie au § 7-4) ; on a donc :

$$R_{irs}^h = \frac{\partial y^h}{\partial y'^l} \times \frac{\partial y'^m}{\partial y^i} \times \frac{\partial y'^n}{\partial y^r} \times \frac{\partial y'^k}{\partial y^s} \times R'^l_{mnk}$$

Ce tenseur est dit *tenseur de courbure,* ou *tenseur de Riemann-Christoffel,* de V en M.

On dit que V est un *espace plat* ssi on a en tout point : $R_{irs}^h = 0$; sinon, c'est un *espace courbe.* On montre que, en particulier, *tout espace affine pré-euclidien est un espace plat.*

On définit, par contraction à partir du tenseur de courbure, le tenseur $R_{ij} = R_{ihj}^h$, nommé *tenseur de Ricci* ; on montre que c'est un tenseur *symétrique* : $R_{ij} = R_{ji}$.

Les composantes mixtes du tenseur de Ricci sont $R_i^j = g^{jl} R_{il}$; par nouvelle contraction on obtient le tenseur scalaire $R = R_i^i = g^{il} R_{il}$, nommé *courbure riemannienne scalaire de* V *en* M.

Enfin, on définit le *tenseur d'Einstein* : c'est le tenseur symétrique $S_{rs} = R_{rs} - \frac{1}{2} g_{rs} R$. On montre que, en tout point $M \in V$: $\nabla_s S_r^s = 0$: le tenseur d'Einstein est donc *à divergence nulle.*

8 L'espace-temps de la relativité générale

8.1 Position du problème

La théorie de la *relativité générale* (tout comme celle de la relativité restreinte, voir § 5-7) décrit le monde physique (monde d'*évènements spatio-temporels)* par une certaine structure d'ensemble ; mais ici, cette structure sera celle d'un espace de Riemann de dimension 4, telle qu'à un point-évènement M se trouve associé un quadruplet $\left(y^1, y^2, y^3, y^4\right)$ où ces nombres sont interprétés comme les coordonnées mesurées de l'évènement : y^1, y^2, y^3 correspondant aux coordonnées spatiales (quel que soit le mode de présentation choisi pour ces dernières : cartésiennes (on les note alors x, y, z)), sphériques (alors notées r, ψ, θ) ou autres), et y^4 correspondant au temps (noté t). Cet espace de Riemann particulier qui doit rendre compte de notre monde physique est *l'espace-temps de la relativité générale.*

Mais pour déterminer complètement un espace de Riemann de dimension 4, il faut non seulement savoir associer à chacun de ses points un quadruplet de nombres comme on vient de le faire (ce qui revient à définir, avec des notations vues au § 7-1, les $\mathrm{U}_\alpha, \Omega_\alpha$ et φ_α déterminant la structure de variété différentielle sous-jacente à l'espace de Riemann) mais encore définir (pour chaque Ω_α) les applications g_{ij}, ici au nombre de $4^2 = 16$, ou, ce qui revient au même, déterminer la métrique riemannienne $ds^2 = g_{ij} dy^i dy^j$ (élément différentiel *intrinsèque,* donc indépendant du système de coordonnées spatio-temporelles utilisé pour repérer l'évènement).

Le problème posé, qui est celui de la description mathématique de notre monde physique, est donc ramené à la *connaissance, pour chaque point-évènement* M *de l'espace-temps, des 16 composantes* g_{ij} *du tenseur fondamental en ce point, relativement au choix des coordonnées spatio-temporelles* y^i *pour cet évènement.*

8.2 L'espace-temps de Minkowski comme solution-limite

La relativité restreinte a donné une première réponse à ce problème, en lui donnant pour solution l'espace-temps de Minkowski : ce dernier, espace affine pseudo-euclidien de dimension 4, est bien un cas particulier d'espace de Riemann ; rappelons que sa métrique s'écrit, en coordonnées cartésiennes liées à un repère $(\mathrm{O}, \mathfrak{B})$ défini au § 5-7 : $ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2$, et en coordonnées sphériques liées au même repère : $ds^2 = -dr^2 - r^2 \cos^2\theta d\psi^2 - r^2 d\theta^2 + c^2 dt^2$.

Les g_{ij} sont donc ici parfaitement déterminés ; on peut remarquer que dans les deux expressions les termes rectangles sont nuls, et que dans la première les termes non-rectangles sont constants (indépendants du point où la métrique est évaluée).

Or, la relativité générale n'admet cette solution que comme cas-limite : celui d'un monde physique en l'absence totale de masse, ou infiniment éloigné de toute masse. Il va s'agir dorénavant de déterminer une métrique riemannienne dont les termes vont dépendre, d'une façon à préciser, de l'influence de masses au point-évènement où l'on veut écrire la métrique.

8.3 Géodésiques de l'espace-temps

On rappelle qu'une géodésique d'un espace de Riemann V est la trajectoire dans V d'un mouvement d'accélération nulle, et qu'elle réalise une extrêmale de la longueur d'un arc de courbe reliant deux points donnés.

Par ailleurs, on peut paramétrer tout arc de courbe de l'espace-termps (encore appelé *ligne d'univers)* en prenant pour paramètre la coordonnée temporelle t ; un tel arc de courbe de V détermine donc, par la donnée des coordonnées spatiales en fonction de t, le mouvement d'un point dans l'espace euclidien usuel de dimension 3, et réciproquement.

En particulier, une géodésique de l'espace-temps, paramétrée par le temps, correspond à un tel mouvement. La relativité générale postule deux lois fondamentales à propos de ces géodésiques, lois que devra respecter tout choix de métrique pour l'espace-temps :

<u>Première loi</u> : *Les géodésiques de l'espace-temps sont les lignes d'univers associées, dans l'espace euclidien de dimension 3, soit au mouvement d'une particule matérielle libre (i.e. soumise uniquement à la gravitation), soit au mouvement d'un photon.*

<u>Deuxième loi</u> : *Il existe des géodésiques de l'espace-temps de longueur nulle : ce sont celles qui sont associées dans l'espace euclidien de dimension 3 au mouvement d'un photon.*

<u>Remarque</u> : Ces lois prolongent à l'espace-temps de la relativité générale des propriétés rencontrées dans le cas particulier de l'espace-temps de Minkowski : en effet, dans ce cas, les géodésiques correspondent à un mouvement rectiligne uniforme ; quand la vitesse est strictement inférieure à c, il s'agit bien du mouvement d'une particule matérielle libre en l'absence de gravitation ; une géodésique de longueur nulle est ici un segment [AB] , lorsque cette ligne d'univers décrit le mouvement d'un photon.

8.4 Forme générale d'une métrique-solution

On doit donc chercher une métrique telle que les géodésiques qui s'en déduiront par intégration des équations vues au § 7-7 vérifient les deux lois ci-dessus. On est amené à simplifier la recherche des g_{ij} en introduisant des considérations et hypothèses simplificatrices (par exemple la symétrie sphérique attribuée à l'espace) ; moyennant quoi, on établit que la métrique la plus générale recherchée prend la forme (en coordonnées sphériques) :

$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - r^2 \cos^2 \theta d\psi^2 - r^2 d\theta^2 + e^\nu c^2 dt^2$

où λ et μ sont des fonctions des coordonnées.

Il s'agit donc de trouver les fonctions λ et ν telles que le ds^2 correspondant décrive notre monde physique ; le cas de l'espace-temps de Minkowski est celui pour lequel les deux fonctions λ et ν sont la fonction nulle.

On montre que les espaces-temps correspondant aux métriques-solutions sont tous des espaces courbes, à l'exception de l'espace-temps de Minkowski (qui est un espace de Riemann plat, comme tout espace affine pré-euclidien : voir § 7-9).

8.5 Les équations d'Einstein

On fait intervenir, en mécanique des fluides et des milieux continus, un tenseur du second ordre, symétrique, défini en chaque point du fluide : c'est le *tenseur impulsion-énergie,* dont les composantes sont des fonctions de la pression p et de la densité ρ en ce point.

Conformément aux notations tensorielles générales, on notera T_{ij}, T_i^j, T^{ij} respectivement ses composantes covariantes, mixtes et contravariantes en ce point.

On montre que le tenseur impulsion-énergie est à divergence nulle, i.e. $\nabla_j \mathrm{T}_i^j = 0$. Cette propriété,qui se traduit par 4 égalités numériques ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) exprime en langage tensoriel deux propriétés physiques fondamentales : la conservation de l'impulsion (vecteur tri-dimensionnel) et celle de l'énergie (scalaire), d'où le nom donné à ce tenseur.

Par ailleurs, en utilisant d'une part la propriété de divergence nulle vue pour le tenseur d'Einstein S_{rs} (voir le § 7-9) et d'autre part le théorème de Ricci (§ 6-3), on voit que le tenseur $\mathrm{S}_{ij} + \Lambda g_{ij}$ (où Λ est une constante arbitraire) est lui aussi un tenseur du second ordre, symétrique, et à divergence nulle.

Les *équations d'Einstein* posent la relation tensorielle suivante entre deux tenseurs d'ordre 2, symétriques et de divergence nulle : d'une part le tenseur $\mathrm{S}_{ij} + \Lambda g_{ij}$, purement *géométrique,* et d'autre part le tenseur impulsion-énergie T_{ij}, dont la signification est *physique* :

$$\boxed{\mathrm{S}_{ij} + \Lambda g_{ij} = -\frac{8\pi \mathrm{G}}{c^4} \mathrm{T}_{ij}} \; (i, j \in \{1, 2, 3, 4\})$$

où G est la constante de gravitation et c la vitesse de la lumière ; la constante Λ est dite "constante cosmologique".

Nous allons indiquer deux solutions possibles pour ces équations, selon la distribution de masses envisagée. L'une, locale, dite *métrique de Schwarschild,* s'appliquera par exemple à la région du système solaire (assimilé à une unique masse sphérique entourée d'un univers vide) ; l'autre, globale, dite *métrique de Robertson-Walker,* conviendra pour l'univers entier (on rappelle que la solution donnée par la métrique de Minkowski vaut pour une zone de l'espace suffisamment éloignée de toute masse pour ne pas en subir l'influence). Pour chacune de ces métriques, on imposera le choix de $\Lambda = 0$.

8.6 La métrique de Schwarzschild

L'univers décrit ici est réduit à une unique masse sphérique M ; il constitue une bonne approximation de la région du système solaire, les masses des planètes étant négligeables devant celle du soleil.

Cet univers est statique (la métrique en un point est indépendante du temps) et à symétrie sphérique (l'origine du repère définissant r, ψ, θ est au centre de la sphère de masse M) ; on en déduit que les fonctions λ et ν introduites ci-dessus sont fonctions de r seul. On montre que, en un point extérieur à la masse M, les fonctions λ et ν vérifient : $e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 - \dfrac{2\mathrm{GM}}{c^2 r}$; et donc, en un tel point, la métrique de Schwarzschild s'écrit :

$$\boxed{ds^2 = \frac{-dr^2}{1 - \dfrac{2\mathrm{GM}}{c^2 r}} - r^2 \cos^2\theta d\psi^2 - r^2 d\theta^2 + \left(1 - \frac{2\mathrm{GM}}{c^2 r}\right) c^2 dt^2}$$

De cette métrique on peut déduire par le calcul la détermination des géodésiques, c'est à dire en fournir une représentation paramétrique donnant r, ψ, θ en fonction du temps t. On peut alors vérifier que les mouvements des planètes, décrits empiriquement par Képler et théorisés par Newton, correspondent effectivement à des géodésiques de l'espace-temps relatif à cette métrique.

Plus précisément, les géodésiques trouvées permettent même d'expliquer l'avance du périhélie de Mercure, résultat d'expérience dont la théorie newtonienne ne pouvait pas exactement rendre compte.

Une autre vérification remarquable pour cette métrique est la mesure de la déviation d'un rayon lumineux passant au voisinage de la masse solaire (observation faite en 1919 en profitant d'une éclipse totale du soleil) : le mouvement d'un photon dans l'espace ordinaire correspond en effet à une géodésique (de longueur nulle) de l'espace-temps et la trajectoire de ce mouvement est la courbe "projection" dans l'espace usuel de cette géodésique. La déviation mesurée correspond exactement à la prédiction théorique relative à cette trajectoire.

8.7 La métrique de Robertson-Walker

La découverte par Hubble, en 1929, d'un décalage vers le rouge pour la lumière émise par les galaxies fut interprétée comme une expansion continue de l'univers depuis une explosion initiale, le "big-bang". Ce sont donc des solutions non-statiques des équations d'Einstein qui furent désormais recherchées pour la description de l'univers dans sa globalité.

En maintenant la forme générale donnée au § 8-4 (qui suppose la symétrie sphérique), les fonctions λ et ν deviennent désormais des fonctions de r et de t. La forme générale d'une métrique qui décrive globalement l'univers est dite métrique de Robertson-Walker :

$$ds^2 = -\mathrm{R}(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \cos^2\theta d\psi^2\right)\right] + c^2dt^2.$$

La constante k ne peut prendre que les valeurs $-1, 0$ ou $+1$. Chacune de ces valeurs correspond à un type de structure distinct pour l'espace-temps (structure dite respectivement "hyperbolique", "parabolique" ou "elliptique").

La dépendance de la métrique par rapport au temps se manifeste par le terme $\mathrm{R}(t)$; la fonction R doit être croissante pour que cette métrique puisse rendre compte de l'expansion de l'univers. Selon la densité moyenne de matière dans l'univers (qui "freinera" plus ou moins l'expansion) cette expansion pourra être illimitée *ou* aboutir à un maximum, à partir duquel commencerait une phase de contraction (qui pourrait à son tour se terminer en un "big crunch" symétrique du big bang initial).

Il semble acquis aujourd'hui que l'expansion de l'univers sera perpétuelle ; mais ce qui ne faisait pas de doute jusqu'à ces dernières années, c'est que cette expansion doive être décélérée, du fait de la gravitation. Or des mesures récentes semblent indiquer, au contraire, une expansion *accélérée,* a priori incompréhensible : faute d'explication, on doit postuler une énergie de nature inconnue, capable de contrebalancer la gravitation.

La métrique de Robertson-Walker ne suffirait plus, dès lors, à décrire cet univers en expansion accélérée : il serait nécessaire d'introduire dans une métrique-solution la constante cosmologique Λ.