Équations algébriques

Une équation n'est rien d'autre qu'une égalité entre deux membres. Souvent, il s'agit de déterminer une certaine quantité, connaissant simplement une égalité qui fait intervenir cette quantité inconnue. Comme le fait de nommer les choses permet souvent de mieux les étudier, l'on donne alors un certain nom à notre inconnue (le plus souvent on l'appelle x). On obtient ainsi une égalité que doit vérifier x, c'est ce qu'on appelle une équation. Bien sûr, il y a des équations de toutes sortes. Il y a les affines, c'est-à-dire celles de la forme $ax + b = 0$. Il y a les équations de degré 2, celles de degré 3, etc. Mais il y en a aussi une multitude d'autres, par exemple celles de la forme $a^x = b$, ou encore l'équation $\cos(5x+1) = 3^{x^2} - 2x$. Résoudre une équation, c'est trouver *tous* les nombres x qui vérifient l'égalité de départ.

Enfin, on appelle *équation algébrique* une équation pouvant se mettre sous la forme $a_n x^n + \ldots + a_0 = 0$, où les a_i sont des nombres réels. Ce sont en fait les équations polynomiales, d'un certain degré. Nous allons ici nous intéresser plus spécifiquement à ce type d'équation, et voir notamment des méthodes générales pour résoudre les équations algébriques de degré allant de 1 à 4.

Soit donc une équation $a_n x^n + \ldots + a_0 = 0$, ($n$ entier) On appelle $\mathrm{P}(x)$ la quantité polynomiale $a_n x^n + \ldots + a_0$. L'idée fondamentale est que, si l'on a trouvé une solution, c'est-à-dire un nombre a vérifiant $\mathrm{P}(a) = 0$, on est ramené à un problème plus simple qui est celui de résoudre une équation de degré $n-1$.

En effet, pour tout entier k et tous réels x et y, on a la factorisation :

$$x^k - y^k = (x-y)\left(x^{k-1} + yx^{k-2} + y^2x^{k-3} + \ldots + y^{k-2}x + y^{k-1}\right)$$

En conséquence, $\mathrm{P}(x) - \mathrm{P}(y)$ s'écrit sous une forme $(x-y)\,\mathrm{Q}_y(x)$, où Q_y est une expression de degré $n-1$ en x. En particulier si a est solution de $\mathrm{P}(x) = 0$, on peut écrire :

$$\mathrm{P}(x) = (x-a)\,\mathrm{Q}_a(x)$$

Pour résoudre l'équation de départ, on est ramené à résoudre l'équation $\mathrm{Q}_a(x) = 0$, de degré $n-1$. On en déduit entre autre qu'une équation de degré n a au plus n solutions.

1 Premier et second degré

Pour ce qui est du premier degré, il n'y a pas grand chose à dire... Ou rien que de très connu : les équations du premier degré sont celles qui peuvent se mettre sous la forme $ax + b = 0$. Il y a une unique solution qui est $x = \dfrac{-b}{a}$.

Signalons toutefois qu'il faut faire attention au cas particulier où $a = 0$. Dans ce cas, l'expression $-b/a$ n'a aucun sens. Mais alors, résoudre l'équation est encore plus simple. En effet, si $b = 0$, tout x est solution et si $b \neq 0$, il n'y a aucune solution. Passons au second degré.

L'équation générale se met ici sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$. Bien entendu, l'on peut supposer que $a \neq 0$, car sinon l'équation serait en fait de degré 1 et donc releverait du paragraphe précédent. Là aussi, la résolution de ces équations est très classique.

Tout d'abord, quitte à diviser par a (que l'on vient de supposer non nul), on peut supposer que $a = 1$. Autrement dit, en divisant par $a \neq 0$ l'égalité $ax^2 + bx + c = 0$, on obtient l'équation :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

qui a exactement les mêmes solutions que l'équation de départ. Il s'agit d'une équation de la forme précédente, à la différence près que désormais le coefficient de x^2 vaut 1. Ainsi si l'on sait résoudre les équations du second degré dont le coefficient dominant est 1, on saura résoudre toutes les équations du second degré. Ensuite, quitte à poser $x' = x + b/2$, on peut supposer que $b = 0$. En effet, l'équation $x^2 + bx + c = 0$ devient, en remplaçant x par $x' - b/2$:

$$x'^2 - \frac{b^2}{4} + c = 0$$

On s'est ainsi ramené à une équation sans terme en x. Et si l'on sait résoudre cette dernière, alors on saura trouver x' et donc x, c'est-à-dire que l'on sait résoudre l'équation $x^2 + bx + c = 0$.

On s'est finalement ramené au problème de résoudre l'équation simplifiée $x^2 + c = 0$. Celle-ci à 2 racines réelles $\sqrt{-c}$ et $-\sqrt{-c}$ lorsque $c < 0$, une racine double égale à 0 lorsque $c = 0$, et aucune lorsque $c > 0$.

En fait, dans la pratique, on présente les calculs de la façon suivante. On cherche à résoudre $ax^2 + bx + c = 0$. Pour cela, on calcule ce que l'on appelle le *discriminant* de l'équation qui est le réel $\Delta = b^2 - 4ac$. La nature des solutions dépend alors du signe de Δ.

- Si $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solutions réelles.
- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution $-b/2a$.
- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Signalons pour finir que la résolution de l'équation générale du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ (avec a non nul) est équivalente à la résolution du système :

$$\begin{cases} x + y = -b/a \\ x \cdot y = c/a \end{cases}$$

En effet, si x_1 et x_2 sont solutions de $ax^2 + bx + c = 0$, alors le polynôme $a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$ se factorise par $\mathrm{X} - x_1$ et $\mathrm{X} - x_2$, c'est-à-dire que l'on a :

$$a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c = a\left(\mathrm{X} - x_1\right)\left(\mathrm{X} - x_2\right)$$

Développant le membre de droite, on obtient par identification des coefficients :

$$x_1 + x_2 = -b/a \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = c/a$$

et donc le couple (x_1, x_2) est solution du système. Inversement, si le couple (x_1, x_2) est solution du système alors $x_2 = -b/a - x_1$, donc en remplaçant dans la seconde équation :

$$x_1 \left(-b/a - x_1\right) = c/a$$

soit
$$a x_1^2 + b x_1 + c = 0$$

Autrement dit, x_1 est alors racine de l'équation $ax^2+bx+c = 0$. Il en va bien sûr de même pour x_2... Inversement, ceci sert à résoudre les système de la forme :

$$\begin{cases} x + y = \mathrm{S} \\ x \cdot y = \mathrm{P} \end{cases}$$

Une solution de ce système, si elle existe, est en effet nécessairement formée d'un couple de racines de l'équation $x^2 - \mathrm{S}x + \mathrm{P} = 0$.

2 Le troisième degré : méthode de Cardan

L'équation à résoudre ici est $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Comme précédemment, on va supposer $a \neq 0$, car sinon l'équation serait en fait de degré 2 et relèverait de ce qui précède.

Quitte à diviser par a puis à poser $x' = x + b/3$, on peut supposer que $a = 1$ et que $b = 0$. On se ramène en effet à une équation en x' sans terme de degré 2. Et, bien sûr, la détermination de x' permet de déterminer x également ($x = x' - b/3$).

Ainsi, l'équation qu'il nous faut résoudre devient $x^3 + cx + d = 0$, ce qui est quand même a priori plus simple. L'idée pour ce faire est de chercher x sous la forme d'une somme $p + q$, en espérant que ceci donne suffisamment de liberté pour pouvoir imposer au moins une autre condition sur p et q, et obtenir ainsi un problème plus simple. En substituant $p + q$ à x, l'équation devient :

$$(p + q)^3 + c(p + q) + d = 0$$

soit
$$p^3 + q^3 + (p + q)\,(3pq + c) + d = 0$$

La condition supplémentaire que l'on aimerait imposer sur p et q est alors $3pq+c = 0$, pour éliminer le terme du milieu. On obtient ainsi le système suivant dont une solution va nous donner une solution de notre équation de départ.

$$\begin{cases} 3pq = -c \\ p^3 + q^3 = -d \end{cases}$$

Ce système ressemble assez fortement au système somme/produit. Élevant la première équation au cube (ce qui ne change rien à l'ensemble des solution, la fonction cube étant une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$), on obtient le système :

$$\begin{cases} p^3 q^3 = -c^3/27 \\ p^3 + q^3 = -d \end{cases}$$

p^3 et q^3 sont donc racines de l'équation du second degré $\mathrm{X}^2 + d\mathrm{X} + \dfrac{-c^3}{27} = 0$, de distriminant $d^2 + \dfrac{4c^3}{27}$. Lorsque celui-ci est positif, on obtient alors p^3 et q^3, dans le désordre, comme les nombres :

$$\frac{-d - \sqrt{d^2 + \dfrac{4c^3}{27}}}{2} = -\frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{c^3}{27}} \quad \text{et} \quad -\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{c^3}{27}}$$

D'où une racine $x = p + q$ du polynôme $x^3 + cx + d$, à savoir :

$$\sqrt[3]{-\frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{c^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{c^3}{27}}}$$

N.B. On peut montrer que si $\frac{d^2}{4} + \frac{c^3}{27} > 0$, alors la solution que l'on a trouvé précédemment est en fait l'unique solution de l'équation. Il suffit pour cela d'étudier la fonction f définie par $f(x) = x^3 + cx + d$. Dans le cas où $\frac{d^2}{4} + \frac{c^3}{27} = 0$, l'étude de la fonction montre qu'il y a en fait deux solutions, celle donnée par la méthode précédente qui est $-2\sqrt[3]{\frac{d}{2}}$ et une autre racine, double, qui est $\sqrt[3]{\frac{d}{2}}$. (Ces deux solutions n'en sont en fait qu'une dans le cas très particulier où $c = d = 0$).

Le dernier cas, lorsque $\frac{d^2}{4} + \frac{c^3}{27} < 0$ est beaucoup plus frustrant. On peut montrer, toujours en étudiant la fonction f, qu'il y a trois solutions réelles, mais la méthode précédente n'en fournit aucune. En fait, ce que l'on aimerait faire, c'est donner un sens aux racines carrées de nombres négatifs. Ceci se résout par l'introduction des nombres complexes qui ont d'ailleurs été développés à l'origine précisément pour résoudre ce genre d'équations.

Exemple : La méthode décrite est impuissante face à l'équation $x^3 - 2x + 1 = 0$ sans l'aide des complexes : si l'on pose $x = p + q$, on se ramène à l'équation :

$$p^3 + q^3 + (p + q)(3pq - 2) + 1 = 0$$

La méthode consiste à chercher p et q vérifiant le système $\begin{cases} 3pq = 2 \\ p^3 + q^3 = -1 \end{cases}$

Donc p^3 et q^3 sont solutions de $\begin{cases} xy = \dfrac{8}{27} \\ x + y = -1 \end{cases}$

On cherche donc p^3 et q^3 comme racines du polynôme $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + \dfrac{8}{27}$. Mais ce dernier polynôme a pour discriminant $-5/27 < 0$, donc pas de racines réelles.

On vérifie pourtant que 1, $\dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ sont trois solutions de l'équation $x^3 - 2x + 1 = 0$. (Ce sont les seules puisque le polynôme est de degré 3). Si l'on s'autorise les complexes, on obtient p^3 et q^3 sous la forme :

$$-\frac{1}{2} - \frac{i}{6}\sqrt{\frac{5}{3}} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2} + \frac{i}{6}\sqrt{\frac{5}{3}}$$

Mais cette fois (dans $\mathbb{C}$), nos deux nombres ont 3 racines cubiques chacun. Soit au total 9 possibilités pour $x = p + q$, qui ne peuvent toutes être racine du polynôme de degré 3. Ceci s'explique par le fait qu'élever au cube l'équation

$3pq = 2$ est légitime dans $\mathbb{R}$, mais dans $\mathbb{C}$ on perd de l'information. Il s'agit de trouver un couple de racines cubiques de nos deux nombres dont le produit vaut $\frac{2}{3}$. Pour un tel couple, on aura une racine du polynôme de degré 3.

N.B. On est ramené au problème de l'extraction d'une racine cubique dans $\mathbb{C}$. Celui-ci est en général équivalent à la résolution d'un polynôme de degré 3, puisqu'il s'agit de déterminer $\cos x/3$ connaissant $\cos x$. (En pratique, si l'on cherche la rascine cubique du complexe sous forme algébrique, on retombe assez rapidement sur l'équation de départ.)

Enfin, il n'y a pas de méthode plus simple, c'est-à-dire qui ne demanderait que de savoir résoudre des problèmes de degré 2. Sinon, on saurait trisecter un angle quelconque à la règle et au compas...

3 Le quatrième degré : méthode de Ferrari

L'équation à résoudre ici est $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ et comme d'habitude on va supposer que $a \neq 0$. Comme précédemment, quitte à diviser par a puis à faire un changement de variable $x' = x + \frac{b}{4}$, on peut supposer que $a = 1$ et $b = 0$.

L'équation à résoudre devient alors $x^4 + cx^2 + dx + e = 0$. Si $d = 0$, c'est en réalité une équation « bicarrée ». Le changement de variable $\mathrm{X} = x^2$ permet alors de se ramener à une équation de degré 2, on sait donc résoudre...

Sinon ($d \neq 0$), on introduit un paramètre t (que l'on va choisir judicieusement par la suite) et l'on réécrit l'équation sous la forme suivante :

$$\left(x^2+t\right)^2 - \left[(2t-c)\,x^2 - dx + \left(t^2-e\right)\right] = 0$$

L'idée sous-jacente est d'essayer de faire en sorte que la partie entre crochets de l'expression précédente puisse s'écrire comme un carré, car dans ce cas, on saurait factoriser notre expression et l'on n'aurait plus qu'à résoudre deux équations de degré 2, ce que l'on sait déjà faire.

Si t est tel que $4\,(2t-c)\left(t^2-e\right) = d^2$ (discriminant nul), alors on a :

$$(2t-c)\,x^2 - dx + \left(t^2-e\right) = (2t-c)\left(x - \frac{d}{4t-2c}\right)^2$$

Pour conclure, il suffit de voir que trouver un nombre t vérifiant la relation $4\,(2t-c)\left(t^2-e\right) = d^2$ est un problème de degré 3. On peut toujours trouver un réel qui marche (par la méthode de Cardan, quitte à passer par les complexes...).

4 Et après ...

De telles méthodes générales n'existent plus pour les degrés supérieurs à 5... Abel a en effet montré, au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, que la résolution par radicaux de l'équation du cinquième degré était impossible dans le cas général. Indépendamment, Galois a généralisé cette démonstration à tous les degrés $n \geq 5$ (voir par exemple [3]). On est souvent réduit à chercher une racine

« au hasard » pour pouvoir se ramener à une équation de degré inférieur. Dans quelques cas très particuliers, il existe des méthodes efficaces. Par exemple, lorsque l'équation n'a que des termes de degré pair (généralisation des équations bicarrées), un changement de variable $\mathrm{X} = x^2$ permet de diviser par 2 le degré de l'équation à traiter.

Les équations réciproques : Signalons enfin un cas particulier, celui des *équations réciproques*, c'est-à-dire les équations de la forme $a_n x^n + \ldots + a_0 = 0$ où n est pair et $a_n = a_0 \neq 0$, $a_{n-1} = a_1$, $a_{n-2} = a_2$, etc.

Ici, le fait de diviser par $x^{n/2}$ ne change pas les solutions : comme le terme constant est non nul ($a_0 = a_n \neq 0$), on sait que 0 n'est pas solution.

On pose ensuite $\mathrm{X} = x + \frac{1}{x}$. La structure de l'équation de départ permet de prouver que X vérifie une certaine équation algébrique de degré plus petit, $n/2$ plus précisément.

Le résultat est clair pour $n = 2$: l'équation de départ est de la forme $ax^2 + bx + a = 0$, on se ramène donc à l'expression $ax + b + a/x = a\mathrm{X} + b$.

Supposons le résultat établi jusqu'au rang n (n pair). Soit une équation réciproque de degré $n+2$. Après division par $x^{n/2+1}$, on a une expression du type :

$$b_0 + \sum_{k=1}^{n/2+1} b_i(x^i + 1/x^i) \qquad (\mathbf{1})$$

Or, par la formule du binôme, on a $(x+1/x)^{n/2+1} = \sum_{k=0}^{n/2+1} \mathrm{C}_{n/2+1}^{k} x^k (1/x)^{n/2+1-k}$

Et, comme on a la relation $\mathrm{C}_{n/2+1}^{n/2+1-k} = \mathrm{C}_{n/2+1}^{k}$, on obtient $(x+1/x)^{n/2+1}$ sous la forme d'une somme $c_0 + \sum_{k=1}^{n/2+1} c_i(x^i + 1/x^i)$, avec $c_{n/2+1} = 1$. Cela signifie que l'on a une relation du type :

$$(x^{n/2+1} + 1/x^{n/2+1}) = \mathrm{X}^{n/2+1} - \left(c_0 + \sum_{k=1}^{n/2} c_i(x^i + 1/x^i)\right)$$

Dans l'expression ($\mathbf{1}$), ceci nous donne :

$$b_0 + \sum_{k=1}^{n/2+1} b_i(x^i + \frac{1}{x^i}) = b_{n/2+1}\mathrm{X}^{n/2+1} + (b_0 - b_{n/2+1}c_0) + \sum_{k=1}^{n/2}(b_i - b_{n/2+1}c_i)(x^i + \frac{1}{x^i})$$

Or, par hypothèse de récurrence, l'expression $\sum_{k=1}^{n/2}(b_i - b_{n/2+1}c_i)(x^i + 1/x^i)$ s'écrit comme un polynôme en X de degré au plus $n/2$. On a donc obtenu l'expression ($\mathbf{1}$) comme un polynôme en X, de degré $n/2+1$, et le résultat annoncé est établi par récurrence.

Exemple : Par le changement de variable $\mathrm{X} = x + 1/x$, on se ramène ainsi de l'équation de degré 6 : $x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$ à l'équation de degré 3 : $\mathrm{X}^3 - 2\mathrm{X}^2 + 1 = 0$. Il ne reste plus qu'à appliquer la méthode de Cardan, puis à résoudre des équations du type $x + 1/x = c$, de degré 2 donc.

Annexe : historique

Antiquité : La notion moderne d'équation n'émerge qu'assez tardivement, et ce que l'on appelle « algèbre » dans l'antiquité correspond le plus souvent à la résolution de problèmes numériques concrets visant à déterminer une certaine quantité, qui dépend algébriquement des données.

À cet égard, les mathématiciens Mésopotamiens furent particulièrement avancés. Les Babyloniens, par exemple, sans pour autant dégager de formule générale, disposent de méthodes systématiques de résolution des problèmes de degré 1 ou 2, dont certaines mettent en jeu des systèmes, linéaires ou non. Dans quelques cas particuliers, ils résolvent même des problèmes de degré 3 ou 4.

Par comparaison, l'algèbre égyptienne de la même époque (début du II^e millénaire avant notre ère) peut paraître assez rudimentaire. Pénalisés par un système de numération inadapté et des notations lourdes (pour les fractions par exemple), les Égyptiens résolvent au cas par cas des problèmes du premier degré uniquement, et ce par des méthodes qui nous sembleraient aujourd'hui bien peu rigoureuses.

Les Grecs eux-mêmes, à cause peut-être de la fameuse crise des irrationnels, se méfient un peu de l'algèbre et l'ont peu fait progresser. Ni les Pythagoriciens (plus préoccupés des entiers), ni les successeurs d'Euclide (qui se consacrent avant tout à la géométrie) ne s'y sont beaucoup intéressés. Le dixième livre des *Éléments* constitue néanmoins le fondement de nombreuses recherches algébriques du Moyen-âge.

Exception éclatante : Diophante d'Alexandrie, mathématicien du III^e siècle après J.C., dont les *Arithmétiques* constituent peut-être le premier traité qu'on peut qualifier d'« algèbre classique ». Il y introduit en effet la notion d'équation algébrique, c'est-à-dire la relation entre les puissances successives d'un nombre inconnu (*arithmos*) qu'il s'agit de déterminer par des transformations successives de la relation. Sa démarche déductive est certes en recul par rapport à la démarche axiomatique d'Euclide, mais il se permet notamment de considérer les fractions et les irrationnels comme des nombres à part entière, ce qui renforce la généralité de ses méthodes.

Du IV^e au XIV^e siècle : S'inspirant peut-être de la numération chinoise, les Indiens inventent un système décimal de position comportant le zéro et les relatifs négatifs dès le IV^e ou le V^e siècle après J.C., ce qui permet des notations algébriques bien plus élégantes.

Ainsi, au VII^e siècle, le mathématicien Brahmagupta, dans son traité *Brahmasphutasiddhanta*, énonce-t-il des règles générales de transformation des expressions algébriques qui contiennent éventuellement des quantités négatives ou nulles, et donne explicitement la solution de l'équation générale de degré 2. Au VIII^e siècle, Bhaskara généralise ces méthodes, qu'il étend à des équations particulières de degré supérieur à 2. Il tient compte, en outre, de la seconde racine des équations de degré 2.

L'algèbre arabe fait en quelque sorte la synthèse des mathématiques grecques et indiennes, et constitue le sujet de prédilection des mathématiciens arabes. Au IX^e siècle, al-Khwarizmi remarque que la transformation des équations constitue une théorie à part entière, dont il écrit les principes dans le *Kitab al-jabr wa-l-*

muqabala, dont l'algèbre tire son nom. Il reprend les méthodes de Diophante et la numération indienne, qu'il contribue à populariser. Néanmoins, il est encore gêné par les nombres négatifs, ce qui n'est pas le cas de son principal successeur, Abu Kamil.

Forts des progrès de l'algèbre arabe vers l'abstraction, al-Karaji à la fin du X^e et al-Samaw'al au XII^e siècle développent une puissante arithmétique des polynômes et des fractions rationnelles : multiplication, division, et même extraction des racines et une sorte de développement limité en $\mathrm{O}\left(\frac{1}{x^n}\right)$. Dès le XI^e siècle, l'équation cubique suscite par ailleurs un vif intérêt. Le Persan Umar al-Khayyam donne notamment de nombreux éléments d'une étude géométrique, voire en des termes modernes « analytique » du problème.

Les travaux de Léonard de Pise (le célèbre Fibonacci) au début du XIII^e siècle diffusent en Europe le savoir algébrique arabe. Son *Liber Abaci* constitue la source principale des nombreuses recherches de ses successeurs. De plus, il propose avec l'empereur Frédéric II des sortes de « défis scientifiques », sous forme de problèmes réunis dans le *Liber Quadratorum* et comprenant la résolution de plusieures équations de degré 3.

La renaissance : Pendant la renaissance, les mathématiques et plus particulièrement l'algèbre se développent rapidement en Italie, sur la base d'un héritage gréco-arabe. Les premiers progrès s'effectuent sur le terrain du symbolisme, de plus en plus concis et suggestif. Nicolas Chuquet et Luca Pacioli présentent sous une forme concise les résultats alors classiques sur les équations algébriques. Jusqu'au XVII^e siècle, beaucoup s'attachent à perfectionner le symbolisme, qui atteint à peu près sa forme actuelle avec Descartes...

Mais le grand apport des mathématiciens italiens à l'algèbre est la résolution par radicaux des équations de degré 3 et 4. À la toute fin du XV^e siècle, Scipione dal Ferro parvient à l'expression par radicaux des racines de l'équation cubique sans terme en x^2 (ce qui est équivalent à la résolution complète, mais il semblerait qu'il ne le savait pas). Quoi qu'il en soit, dans une tradition médiévale un peu surrannée, il choisit de garder sa découverte secrète. Il la confie à sa mort à son gendre Annibale della Nave et à son élève Antonio Maria Fior, qui la gardent secrète. En 1535, Tartaglia, établi à Venise comme professeur de mathématiques, propose une méthode de résolution des équations cubiques sans terme en x, mais Fior lui en conteste la priorité. Ce genre de querelles se réglaient souvent par des défis : Fior met Tartaglia au défi de résoudre l'équation sans terme en x^2, et celui-ci y parvient également, assurant sa victoire.

Quelques années plus tard, un médecin et mathématicien milanais du nom de Cardan vient trouver Tartaglia pour obtenir l'autorisation de publier ses formules dans la grande somme mathématique qu'il prépare, l'*Ars Magna*. Tartaglia refuse que ses formules soient publiées, mais consent à exposer à Cardan sa méthode devant l'insistance de celui-ci, ce avec la promesse qu'elle ne sera pas publiée. Pendant quelques années, Cardan tient parole... Jusqu'au jour où Annibale della Nave fait connaître la méthode de son défunt beau-père. Cardan se sent alors délié de son serment, et c'est ainsi qu'apparaissent les fameuses « formules de Cardan » dans l'*Ars Magna* (1545), ce qui provoque violente querelle avec Tartaglia, querelle qui ne prend fin que trois ans plus tard. Dans ce traité, on trouve également la solution de l'équation générale de degré 4 que l'on peut attribuer avec certitude à l'élève de Cardan, Ferrari (auquel on pense en fait devoir un grand nombre des résultats publiés par Cardan)...

Une particularité de la méthode de Tartaglia est de faire intervenir, au cours des calculs, des racines carrées de nombres négatifs, ce qu'il avait d'ailleurs du mal à prendre en considération. Le premier à avoir véritablement admis les complexes en tant que nombres, plutôt qu'artifices calculatoires, est Bombelli. Il présente les règles générales de calcul sur les complexes et tous les progrès récents de l'algèbre peu avant sa mort, dans *Algebra, parta maggiore dell'arithmetica* (1572).

Vers l'algèbre moderne : Après le XVI^{e} siècle, les mathématiciens semblent se désintéresser de l'algèbre au profit de la géométrie et de la toute jeune analyse.

Les diverses tentatives de résolution de l'équation de degré 5 sont infructueuses, de même que les essais de démonstration de la « conjecture » de Girard, selon laquelle toute équation algébrique de degré n admet exactement n racines distinctes ou confondues. Étrangement, le rigoureux Descartes semble avoir considéré ce résultat comme évident.

En tous les cas, l'algèbre pure fait peu de progrès jusqu'à la seconde moitié du XVIII^{e} siècle, à l'exception des recherches liées à l'analyse, sur l'approximation des racines notamment (Rolle, Newton). Le tournant majeur se situe aux alentour de 1770, lorsque Lagrange et Vandermonde entament des recherches sur la théorie des Substitutions.

Lagrange saisit, en particulier, l'importance de la notion de permutations sur la famille des racines d'une équation algébrique, et développe avec Waring l'idée selon laquelle, si la conjecture de Girard est vraie, alors les coefficients d'une équation algébrique sont au signe près les fonctions symétriques élémentaires de ses racines (Viète puis Girard avait remarqué ce résultat longtemps auparavant, mais seulement dans quelques cas particuliers). Ce résultat lui permet de présenter une méthode élégante de résolution des équations de degré 3 et 4. Vandermonde étudie les fonctions invariantes par permutations circulaires, et en déduit les solutions par radicaux de certaines équations particulières (au groupe de Galois cyclique), telle l'équation $x^{11} - 1 = 0$.

Une nouvelle étape est franchie avec la première démonstration rigoureuse de la conjecture de Girard, publiée par Gauss en 1799. D'Alembert s'y était essayé avant lui, mais sa démonstration était incomplète. Gauss perçoit par ailleurs l'importance du *groupement des opérations* (selon l'expression de Galois) et dans ses recherches sur les formes quadratiques et sur l'arithmétique modulaire se dégagent déjà les concepts qui fondent l'algèbre moderne. Il développe également les idées de Vandermonde, et montre notamment que le polygône régulier à 17 côtés est constructible à la règle et au compas.

Ruffini, appliqué à l'étude de la théorie des substitutions, effectue des recherches sur les valeurs prises par une fonction de cinq variables par toutes les permutations de ces variables. Il parvient à des résultats, généralisés par Cauchy, qui l'amènent à conclure en 1813 à l'impossibilité de résoudre par radicaux l'équation de degré 5.

Ses arguments ne suffisent pas pour une démonstration rigoureuse, cependant Abel apporte rapidement des arguments plus probants sur ce point, et parvient aux alentours de 1826 à l'impossibilité de la résolution par radicaux de l'équation générale de degré premier supérieur ou égal à 5.

Son raisonnement présente encore des difficultés, il maîtrise mal ses propres méthodes, qui ne se formalisent correctement que dans le cadre de la théorie des corps (laquelle n'émergera que bien plus tard). Galois est le premier à adopter une méthode très générale, en introduisant la notion de groupe d'une équation (l'ensemble des permutations des racines conservant les relations algébriques entre celles-ci). Dans des mémoires successifs rédigés de 1830 à 1832, il dégage le critère général de résolubilité par radicaux d'une équation algébrique. Ainsi Galois clôt-il définitivement la question essentielle de l'algèbre classique, tout en posant, plus encore que Gauss, les jalons de l'algèbre moderne.

Références

[1] G. Godefroy *L'aventure des nombres*, Odile Jacob, 1997.

[2] E. Cousquer *La fabuleuse histoire des nombres*, Diderot Editeur, 1998.

[3] I. Stewart *Galois Theory*, Chapman and Hall, 1973.