L.G.Vidiani 64 rue de l'EUROPE 21121 FONTAINE LÈS DIJON TEL : 03 80 56 65 54
Adresse email Internet : *lg_vidiani@club − internet.fr*

Chaos et transformation du Boulanger

(emtex TeXzip chaosq.tex) version 28 11 06 09h40

Introduction Dans les années 1990 le thème de TIPE (Travail d'Intérêt Personnel Encadré) au concours des grandes écoles scientifiques (les seules) étaient les systèmes dynamiques, aussi parmi la cinquantaine de directions que je proposais cette année là à mes élèves, il y eu “la transformation du boulanger”, ainsi dénommée car c'est une transformation qui conserve l'aire : le boulanger prend un morceau de pâte (pour faire simple de la forme d'un carré) et l'étire avec le rouleau à patisserie et replie les morceaux débordants dans les emplacements devenus vides du carré, et recommence. C'est une transformation équi-aire : elle laisse invariante l'aire occupée par la pâte, celle du carré.

Pour l'équipe de trois élèves qui choisit ce sujet, j'avais une documentation particulièrement intéréssante : des articles de la revue “pour la Science” [2,3], d'autres articles ou chapitres plus précis [1,4,6], un programme en Pascal de huit pages (que je peux envoyer à qui voudra le transformer en Maple V5 : je n'arrive pas à comprendre le sens du progrès, le sens de l'histoire, quand un programme en Pascal de huit pages de 1992 sujet d'un TP d'informatique, faisait plus qu'un logiciel formel “moderne” : dessin manuel avec code de touches, enregistrement de chaque dessin, relecture, symétrisation de Steiner, anamorphose, prise de frontière. Je mets les lecteurs de Quadrature au défi (contre une bouteille de Mercurey, en hommage au mathématicien Bourguignon, issu de cette bourgade : Charles Hugues Meray 1836-1911) de transformer ce programme Pascal en programme Maple). Parmi les documents présentés au élèves, il y avait même un petit film remarquable [7] commenté par le savant géomètre Marcel Berger directeur de l'IHES (Institut des Hautes Études Scientifiques de Bry sur Yvette). La revue [2] et le film illustraient leur propos d'une image particulièrement percutante du portrait de Poincaré, initiateur de la théorie du Chaos (par sa théorie du mouvement des planètes) déformé par cette transformation du boulanger, puis complètement déstructuré par la répétition de la transformation, et oh surprise au bout de 241 transformations, l'image de Poincaré pourtant bien maltraitée, réapparaissait intacte.

Le but de cet article est d'expliquer ce qui se passe, comment on trouve la période, comment le carré se transforme.

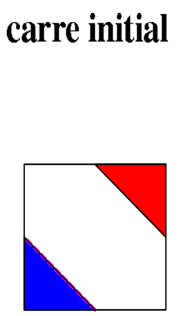
La transformation T

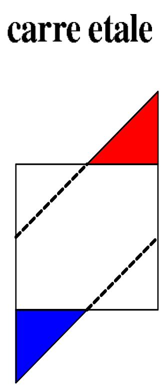
Pour mieux suivre mon propos, le plus simple est soit de photocopier (si possible en couleur) la page 27 de [2], soit de l'imprimer à partir de l'adresse http://www.astrosurf.com/cieldaunis/chaos/pluspoinc.html. Parfois on la retrouve sous google image en demandant : Poincaré chaos. À chaque fois que je vous demanderais de vous y reporter, je l'appellerais le “Document”.

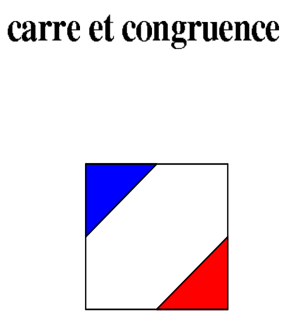
Le lecteur peut voir une simulation animée, sur une image de tournesol, en
http://www.saliege.com/dynamique/baker/tournesol.html.

Le carré où se trouve l'image est le carré $[0,1]\times[0,1]$. La transformation du boulanger et de sa pâte feuilletée est définie par les formules $\boxed{\begin{cases} \mathbf{x'=y \bmod 1} \\ \mathbf{y'=x+y-\frac{1}{2} \bmod 1} \end{cases}}$

Les figures suivantes illustrent cette transformation dite du boulanger (sans affiner les frontières de zones, ce qui sera fait au moment de l'étude de l'injectivité). Le programme maple générateur (préciser dessin.mws) pourra être envoyé à tout lecteur en faisant la demande par mail.







Le fait que la matrice de la transformation soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est là que pour une illustrtion concrète, ce qui compte c'est qu'elle soit à coefficients entiers et de déterminant de valeur absolue 1, pour que la transformation soit "équi-aire", et qu'elle n'ait pas de valeur propre 1. Tout ce qui est dit dans cet article, pourrait être adapté à un autre exemple. Ici le déterminant de A étant égal à -1, il y a changement de sens de l'orientation : regardez le document, l'oreille droite de la figure 0 est devenue l'oreille gauche de la figure 1.

On voit immédiatement qu'il n'y a pas de problème de modulo pour y, puisque par définition $0 \leq y \leq 1$ (pour $0 \leq y < 1$, $x' = y$, pour $y = 1$, alors $x' = 0$. par contre se posent des problèmes dès que $x + y - \frac{1}{2}$ franchit les valeurs 0 et 1.

Dans toute la suite nous désignons par $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$ sans qu'il y ait de confusion possible vue le contexte, avec la matrixe A, $B = (0, 1)$, $C = (1, 1)$ les sommets du carré et par $I = (\frac{1}{2}, 0)$, $J = (0, \frac{1}{2})$, $K = (\frac{1}{2}, 1)$, $L = (1, \frac{1}{2})$ les milieux des cotés du carré.

- Si $M(x, y)$ est dans le triangle rectangle hypothénuse exclue, délimité par les droites $x = 0$, $y = 0$, $x + y = \frac{1}{2}$, alors $-\frac{1}{2} \leq x + y - \frac{1}{2} < 0$ et en ajoutant 1 à tous les membres de cet encadrement, on a : $\frac{1}{2} \leq x + y - \frac{1}{2} + 1 < 1$, par conséquent dans ce triangle, la transformation a pour formules $\begin{cases} x' = y \\ y' = x + y + \frac{1}{2} \end{cases}$. Le coté $x = 0$ devient $x' = y$, $y' = y + \frac{1}{2}$, le coté $y = 0$ devient une partie de $x' = 0$, et enfin l'hypothénuse $x + y = \frac{1}{2}$ se transformer en une partie du coté du carré ; $y' = 1$. Sur le document le triangle qui contient la partie gauche du costume de Poincaré devient un triangle du coin gauche du carré de la figure 2 du document.

Dans cette première zone, cherchons un point fixe éventuel : il doit vérifier $x = y = 2x + \frac{1}{2}$, qui a pour seule solution $y = x = -\frac{1}{2}$, qui n'est pas dans le carré.

- Si $M(x, y)$ est dans la bande $\frac{1}{2} \leq x + y < \frac{3}{2}$, alors la transformation a pour formules $\begin{cases} x' = y \\ y' = x + y - \frac{1}{2} \end{cases}$. La limite inférieure de la bande $x + y = \frac{1}{2}$ devient une partie de $y' = 0$, la frontière supérieure exclue $x + y = \frac{3}{2}$ se transforme en une partie de $y' = 1$.

La portion de $x = 0$ qui s'y trouve (dans la bande considérée) devient une partie de $y' = x' - \frac{1}{2}$.

La portion de $x = 1$ qui s'y trouve devient une partie de $y' = x' + \frac{1}{2}$.

La portion de $y = 1$ qui s'y trouve (dans la bande considérée) devient une partie de $x' = 1$.

Sur le document image 2, on constate bien l'encadrement de ce qui reste la plus grande partie du visage de Poincaré, encadré par deux parallèles à la première bissectrice, le haut de la chevelure plafonnant à $y = 1$. On constate aussi que l'oreille droite est devenue l'oreille gauche : c'est normal puisque comme $det(A) = -1$, l'orientation est inversée.

Dans cette seconde zone, cherchons un point fixe éventuel : il doit vérifier $x = y$, $y = 2y - \frac{1}{2}$: il reste $x = y = \frac{1}{2}$. En regardant l'image 1 et l'image 2 du document vous constatez que le bout du nez du grand homme est un point fixe. On pourrait prendre ce point fixe comme nouvelle origine du repère, mais par suite de la définition $t \ mod\ 1 = t - [t]$, les formules de la transformation dans ce nouveau repère, ne seraient pas simplifiées, comme le lecteur le vérifiera rapidement.

- Si $M(x, y)$ est dans le triangle délimité par $x = 1$, $y = 1$, $x + y = \frac{3}{2}$, alors en excluant ici le point $C = (1, 1)$, comme $2 > x + y - \frac{1}{2} \geq 1$, alors la transformation y a pour formules $\begin{cases} x' = y \\ y' = x + y - \frac{3}{2} \end{cases}$. La partie de $x = 1$ privée de C devient une partie de $y' = x' - \frac{1}{2}$; la partie de $y = 1$ privée de C devient une partie de $x' = 1$. La portion de l'hypothénuse $x + y = \frac{3}{2}$, qui se trouve dans le carré devient une partie de $x' = 0$. Sur le document on voit que le coin nord-est du carré devient le coin sud-est. On devine même une touffe du sinciput (*) du grand homme qui a sa transformée affleurant le bord inférieur de ce coin sud-est.

Quant au point C, on le transforme directement en $x' = 1 \ mod\ 1 = 0$, $y' = 2 - \frac{1}{2} \ mod\ 1 = \frac{1}{2}$.

Cherchons un point fixe éventuel de la transformation, pour ce troisième domaine : le système $x' = x$, $y' = y$ donne $x = y$ puis $y = 2y - \frac{3}{2}$, qui a pour solution $x = y = \frac{3}{2}$ qui n'est pas dans le carré.

Surjectivité et injectivité de la transformation T ?

Comme par définition $t \ mod\ 1 = t - [t] \in [0, 1[$; les cotés BC et CA du caré, ne sont jamais atteints. Mais comme aussi lorsque $t \in [n, n+1[$ $n \in \mathbb{Z}$, $t - [t] = t - n$ est affine donc continuie sur $[n, n+1[$, le théorème des valeurs intermédiaires nous prouve que T est surjective sur le carré privé de son coin-bord, nord-est. T n'est donc pas une bijection, on perd des points à chaque itération. Mais comme c'est un ensemble d'aire nulle, cela ne se voit pas !

Quant à l'injectivité éventuelle cherchons les points images qui peuvent provenir de points distincts $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$. $y' = y \ mod\ 1$, n'a qu'une solution y si $0 < y' < 1$. Le seul cas restant est $y' = 0$ qui est image de $y = 0$ et $y = 1$.

Cherchons maintenant en sachant que $y_1 = y_2 \ mod\ 1$ les solutions de $x_1 + y_1 - \frac{1}{2} = x_2 + y_2 - \frac{1}{2} \ mod\ 1$: il reste $x_1 = x_2 \ mod\ 1$. Autrement dit la transformation est bijective sur le carré ouvert, et n'est pas injective sur les cotés du carré.

- Transformés de OB et AC :

$(0, y)$ a pour transformé $x' = y - [y]$, $y' = y - \frac{1}{2} \ mod\ 1 \begin{cases} 0 \leq y < \frac{1}{2} \Longrightarrow y' = y + \frac{1}{2} & \text{segment } [JK[\\ \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \Longrightarrow y' = y - \frac{1}{2} & \text{segment } [IL[\cup \{J\} \end{cases}$.

(*) *Sommet arrière de la tête, voir le chœur des gnomes, des "nuits d'octobre" de Gérard de Nerval !*

OB est transformé en l'union de JK (ouvert en K) et de IL (ouvert en L)

On constate que $J = T(O) = T(B) = T(A) = T(C)$ et $I = T(J) = T(L)$.

$(1, y)$ a pour transformé $x' = y - [y],\ y' = y + \frac{1}{2}\ mod\ 1 \begin{cases} 0 \le y < \frac{1}{2} \Longrightarrow y' = y + \frac{1}{2} & \text{segment } [JK[\\ \frac{1}{2} \le y \le 1 \Longrightarrow y' = y - \frac{1}{2} & \text{segment } [IL[\cup\{J\} \end{cases}$.

On constate que quel que soit $y \in [0, 1]$ les points $(0, y)$ et $(1, y)$ ont le même transformé.

Un programme Maple avec animation, illustrant cette non ijectivité est joint en annexe.

Procédons de même pour les

- Transformés de OA et BC :

$(x, 0)$ a pour transformé $x' = 0,\ y' = x - \frac{1}{2}\ mod\ 1 \begin{cases} 0 \le x < \frac{1}{2} \Longrightarrow y' = x + \frac{1}{2} & \text{segment } [JB[\\ \frac{1}{2} \le x \le 1 \Longrightarrow y' = x - \frac{1}{2} & \text{segment } [0J] \end{cases}$

De même $(x, 1)$ a pour transformé $x' = 0,\ y' = x + \frac{1}{2}\ mod\ 1 \begin{cases} 0 \le x < \frac{1}{2} \Longrightarrow y' = x + \frac{1}{2} & \text{segment } [JB[\\ \frac{1}{2} \le x \le 1 \Longrightarrow y' = x - \frac{1}{2} & \text{segment } [0, J] \end{cases}$.

OA et BC ont pour transformé OB (B exclu), les points $(x, 0)$ et $(x, 1)$ ayant le même transformé (sur OB).

On en déduit quela transformation du boulanger ne conserve pas la convexité, puisque par exemple, OB est un segment dont le transformé est constitué de deux segments disjoints $[JK[$ et $[IJ[$.

Transformés des segments passant par le point fixe :

On peut chercher comment se transforment les segments du carré, passant par le point fixe $F = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Un tel segment a un support d'équation $y - \frac{1}{2} = t(x - \frac{1}{2})$.

Les formules analytiques de la transformation deviennent (le (1) en bout de lignes signifie "modulo 1") :

$\begin{cases} x' = y\ (1) \\ y' = x + y - \frac{1}{2}\ (1) \end{cases}$ soit $\begin{cases} x' = tx + \frac{1-t}{2}\ (1) \\ y' = (1+t)x - \frac{t}{2}\ (1) \end{cases}$, x variant de 0 à 1.

Les valeurs intéréssantes de t : $t = 0,\ t = 1,\ t = -1$, se dégagent naturellement.

- $t = -1$: le segment initial est la diagonale descendante du carré et comme $\begin{cases} x' = 1 - x\ (1) \\ y' = \frac{1}{2} \end{cases}$, il a donc comme transformé le segment horizontal semi-ouvert $[0, 1[\times\{\frac{1}{2}\}$.

- $t = 0$: le segment horizontal contenant le point fixe, a ses points qui se transforment par les formules $\begin{cases} x' = \frac{1}{2} \\ y' = x\ mod\ 1 \end{cases}$, et a donc comme image le segment vertical semi-ouvert $\{\frac{1}{2}\} \times [0, 1[$.

- $t = 1$: le segment initial est la diagonale montante du carré et comme $\begin{cases} x' = x\ (1) \\ y' = 2x - \frac{1}{2}\ (1) \end{cases}$. Comme $y'(0) < 0$ et $y(1) > 0$, il y a "cassure" à cause de la condition modulo (1). On précise facilement le détail du transformé.

D'ailleurs pour $t > 1$, il y a cassure de l'image pour x', y, puisque $x'(0) = \frac{1-t}{2} < 0,\ y(0) = -\frac{t}{2} < 0$ mais $x'(\frac{1}{2}) = y'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} > 0$. De même pour $0 < t < 1$ il y a aussi cassure de l'image du segment initial car $y(0) < 0$ et $y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} > 0$. Enfin pour $t < -1$ il y a aussi cassure puisque $x'(1) < 0,\ y(1) < 0$.

Donc à part $t = 0$, $t = -1$ déja vus, il ne reste que la possibilité $-1 < t < 0$ pour que le segment initial puisse avoir une image connexe. Et c'est effectivement le cas puisque $x'(0) = \frac{1-t}{2} > 0,\ y(0) = -\frac{t}{2} > 0,\ x'(1) =_f rac1 + t2 > 0,\ y(1) = \frac{t}{2} + 1 > 0$.

Pour $\mathbf{t \in [-1, 0[}$ les segments passant par F, ont comme image un segment contenant F et dont les extrémités décrivent les hypothénuses des triangles bleu et rouge de la troisième figure. Les cas extrèmes $\mathbf{t = 0}$ et $\mathbf{t = -1}$ ont été précisés.

Le segment image a pour équation $y' = (1 + \frac{1}{t})x' - \frac{1}{2t}$. Sa pente décroît de 0 à $-\infty$ quand t parcourt $[-1, 0]$, et il balaye la zone délimitée par le secteur de centre F et limité par les deux médianes du carré et les hypoténuses précédemment évoquées. (l'extrémité "droite" obtenue pour $x = 0$ est $(\frac{1-t}{2}, -\frac{t}{2})$ et est supportée par $y' = x' - \frac{1}{2}$ parcourue dans le sens $(1, \frac{1}{2}) \to (\frac{1}{2}, 0)$ tandis que l'extrémité "gauche" $(\frac{1+t}{2}, \frac{t}{2} + 1)$ appartient à $y' = x' + \frac{1}{2}$, parcourue dans le sens $(0, \frac{1}{2}) \to (\frac{1}{2}, 1)$). Une animation permettrait de suivre l'évolution du segment initial dans son lecteur de centre F et celle de son image.

On pourrait aussi préciser les zones du carré en correspondance par la transformation. De plus on pourrait chercher les zones stables éventuelles. Par exemple pour certaines transformations (reste à donner les coefficients de la matrice associée), il y a des points fixes attractifs. Ici il ne semble pas il y en avoir (le point F semble répulsif ou au mieux indifférent) : tout ceci demande des justifications et des arguments précis. Un lecteur aura peut être des idées et des arguments à ce sujet. Par exemple le théorème de Kac (1947) qui donne une valeur moyenne de la période de chaque point, pourrait intervenir.

Dans [5] page 10, le lecteur désirant approfondir, verra qu'en fait au fûr et à mesure des itérations de T; bien que tous les points aient une période commune (voir ci-après) les figures ont tendance à se mélanger, ce qui est une conséquence de l'ergodicité.

On peut rechercher également les transformées de courbes algébriques, par exemple de coniques ou de cercles de centre F et suivre les modifications des transformés, selon les paramètres de la courbe initiale, par exemple le rayon des cercles. On peut dégrossir par une étude informatique.

Recherche de la période de la transformation

Appelons T la transformation : nous voulons prouver qu'il existe une valeur entière n telle que $T^n = Id\ modulo\ N$ (N étant un entier ≥ 1 donné). Pour cela il faut $A^n = I\ mod\ N$, mais comme $det(A) < 0$, il faut ici que n soit pair.

Il savoir d'abord, qu'il n'y a pas de formule générale donnant , même avec une matrice particulière telle que A, la période en fonction de N. Tout au plus peut-on espérer des valeurs de N très sporadiques pour lesquelles on peut soit donner un encadrement ou une majoration de cette période, soit miraculeusement une valeur exacte (voir [4]).

Le passage par un logiciel de calcul formel quel que Maple, par exemple, est donc quasi iméпratif pour déterminer cette période, d'autant que les valeurs de N, ainsi que la période correspondante sont souvent très grandes.

Le programme ci-dessous, très rustique, permet de le faire. Pour des programmes plus élaborés, voir l'annexe. On peut aussi demander par mail le document de travail (poinc.mws) regroupant les différents programmes de ce type et comparant leurs performances.

On calcule les puissances de A, modulo N.

$> restart : A := array([[0,1],[1,1]]) : p2 := proc(n,N)$
$> localk, B, s, t;$
$> if\ n = 1\ then\ evalm(A)\ else$
$> B := copy(A);$
$> for\ k\ from\ 2\ to\ n\ do$
$> s := B[1,1];$
$> B[1,1] := B[1,2]\ mod\ N;$
$> B[1,2] := s + B[1,2]\ mod\ N;$
$> t := B[2,1];$
$> B[2,1] := B[2,2]\ mod\ N;$
$> B[2,2] := t + B[2,2]\ mod\ N;$
$> od;$
$> eval(B)$
$> fi;$
$> end :$
$> st := time() : p2(61,10) - evalm(A); chronoVD := (time() - st) * seconde(s);$

Puis la période se calcule par :

$> periode2 := proc(N) localk;$
$> k := 2 : while\ p2(k,N)[1,1] <> 0\ or\ p2(k,N)[1,2] <> 1\ or\ p2(k,N)[2,1] <> 1$
$or\ p2(k,N)[2,2] <> 1\ do\ k := k+1 : p2(k,N); od; k; end :$

Il se trouve que dans l'exemple donné dans [2], le N est très grand et (nom donné dans l'article) $N = Phi120 = 535835925499096664087184 0$.

Alors $periode2(Phi120)$ donne en moins de deux secondes 241. Mais comme cette procédure donne en fait n tel que $A^n = A\ mod\ N$, la période est en fait $241 - 1 = 240$.

Or il se trouve que cette période est ridiculement petite, non seulement par rapport à $N = Phi120$, mais par rapport à ce qu'elle devrait être. [5] (nous incitons les lecteurs à s'y reporter) explique par quelle succession de quatre miracles, l'exemple choisi dans [2] a ainsi une période anormalement petite.

Une des raisons est, sans doute la suivante :

Le nombre N choisi se factorise : $ifactor(Phi120)$; donne :

$Phi120 = (2)^5(3)^2(5)(7)(11)(23)(31)(41)(61)(241)(20641)(2521)(2161)$.

Or les constructeurs d'ordinateurs ont naturellement tendance à choisir les tailles de leurs écrans parmi les entiers qui sont des produits de petits entiers tels que $2,3,5$ et il semble que ce soit finalement cette propriété de $Phi120$ qui est à l'origine du retour après 240 itérations.

Remarquons que grâce à une diagonalisation ou une récurrence, on peut expliciter $A^n = (\,a_n \quad b_n \quad b_n \quad c_n\,)$. On a $a_0 = 1,\ b_0 = 0,\ c_0 = 1$ et $a_1 = 0,\ b_1 = 1,\ c_1 = 1$, et comme $A^{n+1} = A^n.A$, on a les relations de récurrence : $\begin{cases} a_{n+1} = b_n \\ b_{n+1} = c_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \\ c_{n+1} = b_n + c_n \end{cases}$ qui donnent $a_{n+2} = b_{n+1} = a_n + b_n = a_n + a_{n+1}$.

Dons a_n est de la forme $a_n = Ar_1^n + Br_2^n$ avec $r_1,\ r_2$ racines de l'équation caractéristique $r^2 - r - 1 = 0$. $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. (les ésotériques, remarquent de r_1 est le "nombre d'Or" !).

Compte tenu des conditions initiales on trouve rapidement $\boxed{\mathbf{a_n = \frac{(1+\sqrt{5})^{n-1} - (1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}\sqrt{5}}}}$

Comme $b_n = a_{n+1},\ c_n = a_{n+2}$, on a tous les coefficients de A^n. Pour des valeurs de n affectées, si l'on tient à avoir des coefficients entiers, il suffit de le demander à Maple par la commande radnormal devant a_n. On peut donc claculer A^n directement et même sa valeur modulo N, par la formule $\begin{pmatrix} a_n\ mod\ N & b_n\ mod\ N \\ b_n\ mod\ N & v_n\ mod\ N \end{pmatrix}$.

On peut programmer a_n par Maple et par exemple $A^{241} = A^{1+240} =$

$$\begin{pmatrix} 642020148637230941269017774288731118023075486236 80 & 1038810421957299147085105183827754016801420367758 41 \\ 1038810421957299147085105183827754016801420367758 41 & 1680830570594530088354122958116485134824495853995 21 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 + Phi120 * 11981655542024930675232002 & 1 + Phi150 * 19386725908489881939795601 \\ 1 + Phi120 * 19386725908489881939795601 & 1 + Phi120 * 31368381450514812615027603 \end{pmatrix}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. Arnold : chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires p 120-131 (Éditions Mir Moscou 1984).
[2] J. Crutchfield, D. Farmer, N. Packard, R. Shaw : Le Chaos ; Pour la science, février 1987 p 26-39 et 121.
[3] J.P. Delahaye, P. Mathieu : Images brouillées, images retrouvées : Pour la science, Décembre 1997 p 102-106, avec indication d'un site http://www.lift.fr/∼mathieu/transform où l'on peut télécharger un logiciel gratuit de simulation.
[4] F.J. Dyson, H. Falk : period of a discrete Cat Mapping : American Mathematical Monthly, volume 99, number 7 ; August-September 1992 p 603-614.
[5] E. Ghys : Variations autour du théorème de récurrence de Poincaré, document pdf de 11 pages, le journal de maths des éléèves de l'École Normale Supérieure de Lyon, volume 1, 1994, téléchargeable en http://www.umpa.ens-lyon.fr/JME/Vol1Num1/artGhys.artEGhys.html
[6] M. Grayson, B.Kitchens, G. Zettler : Visualizing Toral Automorphisms ; Mathematical Intelligencer vol 15 numéro 1, 1993 p 63-66.
[7] P. Trivic : 1− > 241 La Tempête : Film du quart d'heure mathématique sur les systèmes mélangeants, avec Marcel Berger, Jean Bourgain, Jean Serra ; diffusé sur la 7 le 24-11-1990 22h30 et 30-11-1990 18h, FR3 24-11-1990 14h30. Archivé à l'INA Bry sur Marne dont les coordonnées se trouvent rapidement par google.

Annexe : programmes en Maple

Programme animé illustrant la non injectivité de T

```
> restart : with(plots) :
> one_poly := [[0, 0], [0, 1], [1, 1], [1, 0]] :
> opt1 := t = 0..1, frames = 20, style = point :
> C := polygonplot(one_poly, style = line) :
> A0 := animate([0, t, u = 0..1], opt1, symbol = circle, color = blue) :
> A1 := animate([1, t, u = 0..1], opt1, symbol = circle, color = blue) :
> Im0 := animate([t, t − 1/2 − floor(t − 1/2), u = 0..1], opt1, symbol = diamond, color = red) :
> Im1 := animate([t, t + 1/2 − floor(t + 1/2), u = 0..1], opt1, symbol = box, color = black) :
> display([A0, A1, Im0, Im1, C], scaling = constrained,
title=`non injectivité de la Transformation Du Boulanger`,axes=none);
```

Programme pour la puissance modulo N de A

(programme plus esthétique dû à Alain Esculier)

```
> p := proc(n, N)localk, B;
> ifn = 1 then evalm(A) else
> B := copy(A);
> for k from 2 to n do
> B := map(u− > u mod N, evalm(B& ∗ A))
> od;
> fi;
> end :
```

Programme Maple V5 : Transformation du Boulanger

Alain Esculier, a ciselé le petit programme (petit par la taille, mais d'efficacité optimale et géniale, et il a tout d'un grand !) suivant :

```
> restart :
> n := 128 :
> ######## ne pas oublier de changer n ##########
> print("NE PAS OUBLIER de mettre le n convenable : ", n);
> nom_du_fichier := cat("d : /emtex/Maple/papillon", n, ".coord") :
# Dans cat vous marquez le chemin du répertoire où vous avez le fichier *.coord
> fich := fopen(nom_du_fichier, READ, BINARY) :
> base := parse(readline(fich)) :
> close(fich) :
> printf("Taille de l'image de départ%ax%a = %a, nombre de points de l'image %a", n, n, n ∗ n, nops(base));
> # ======== on se ramène à [0, 1]x[0, 1] ===========
> base := map(u− > expand(u/n), base) :
> #==================================
> f := u− > u[2] :
> g := u− > u[1] + u[2] − floor((u[1] + u[2])) :
> trans := L− > map(u− > [f(u), g(u)], L) :
> trans_n := proc(n) global base : option remember :
> if n = 0 then base : else trans(trans_n(n − 1)) : fi; end :
```

> $b := 0 : a := 1 : carre := [[b, b], [a, b], [a, a], [b, a]] :$

>

> # ==== on garde un point sur pp dans l'image =====

> #pp:=10:

> #base:=[seq(base[pp*i+1],i=0..nops(base)pp-1)]:

> #$printf$("Nombre de points conservés =%a", nops(base));

> #==== mettre des # devant les 3 lignes précédentes pour avoir l'image complète =====

"NE PAS OUBLIER de mettre le n convenable : ", 128

> $with(plots)$:

> $pap0bleu := display([polygonplot(carre, color = COLOR(RGB, 1, 1, 0.8)),$

> $pointplot(trans\_n(0), symbol = circle, color = blue)], axes = none, titlefont = [TIMES, BOLD, 10], title =$ '$n = 0, Papillonbleu$') : # on peut changer la couleur.

Pour faire marcher ce programme vous pouvez remplacer le 0 qui est dans $trans\_n(0)$ par tout nombre entier, qui indique le nombre d'itération souhaitées.

Les lecteurs qui le désirent peuvent demander par mail les fichiers *.coord. (Alain Esculier pour les créer, part d'une image en format bmp en noir et blanc, et y récupère avec Maple la partie intéréssante en extrayant les coordonnées des points noirs, qu'il sauve dans ces fichiers *.coord).

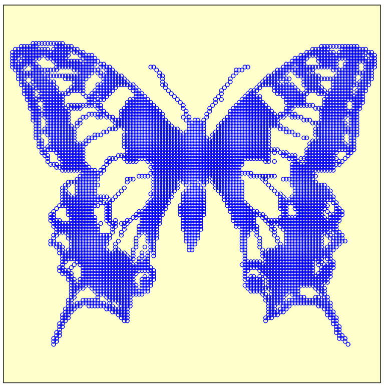
Des illustrations animées et commentaires divers sont sur le site passionnant d'Alain Esculier :

http://aesculier.chez.tiscali.fr/ ; Il faut cliquer sur Maple puis sur Boulanger, partie qu'il a créée à ma demande.

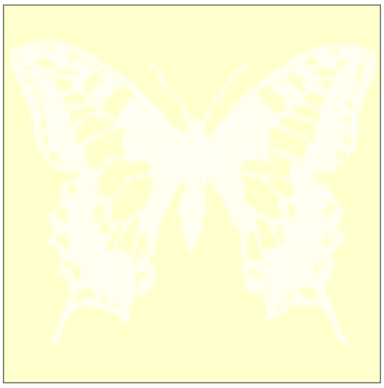
Dans la page suivante on a quelques essais.

Tout d'abord une suite patriotique :

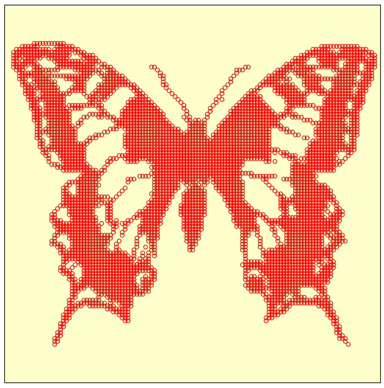
n=0, Papillon bleu



n=0, Papillon blanc



n=0, Papillon rouge

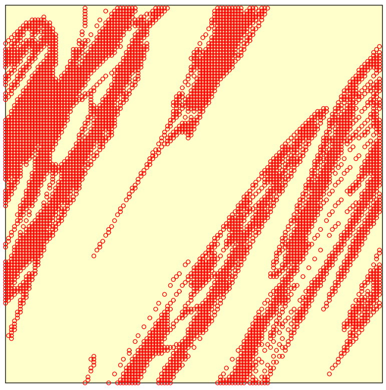


Puis l'effet pour $n = 1$

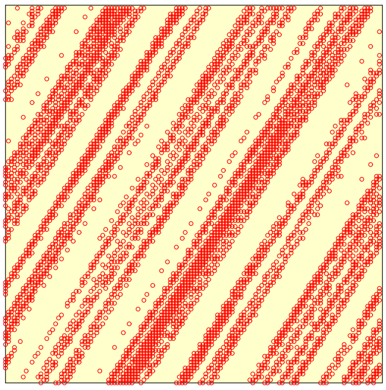
n=1

Puis des itérés $n = 2, 5, 10$:

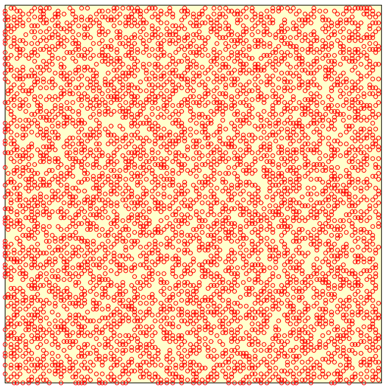
n=2



n=5

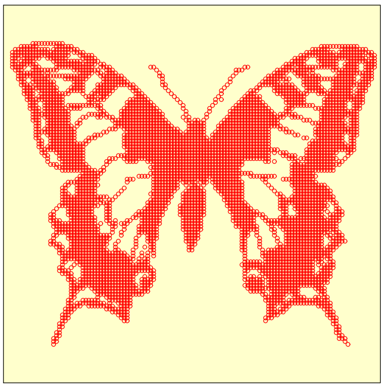


n=10



Et enfin oh! surprise ! tournez la page !

n=192 : oh surprise ! le papillon est intact



La période est ici 192.

FIN