Imparité rythmique

André Bouchet *

20 octobre 2010

Résumé

L'ethnomusicologue Simha Arom a observé une structure rythmique asymétrique utilisée entre autres par les Pygmées Aka de la vallée de la Lobaye, République centrafricaine. La propriété caractéristique de ces formules rythmiques, l'*imparité rythmique*, a été étudiée par Marc Chemillier (Mathématiques de la musique d'Afrique centrale, CultureMATH, 2009). Cet article propose une nouvelle approche de cette propriété et en donne un théorème de caractérisation.

*6, rue Jean-Jacques Noirmant, 37000 Tours, France. andre.bouchet@laposte.net

1 Motivation

Dans un article récent Marc Chemillier a étudié deux exemples de structure mathématique associés à des répertoires musicaux de sociétés africaines de tradition orale. L'un de ces exemples concerne une structure rythmique asymétrique utilisée entre autres par les Pygmées Aka, un peuple de chasseurs-cueilleurs vivant dans la forêt tropicale, au sud-ouest de la République centrafricaine, dans la vallée de la Lobaye.

L'ethnomusicologue Simha Arom a observé que ces rythmes africains ont un aspect asymétrique caractéristique, obtenu en combinant des durées successives de 2 et 3 unités. Considérons par exemple la suite de durées 32222322222 et représentons la sur un cercle (voir la Figure 1 ci-dessous extraite de l'article "Mathématiques de la musique d'Afrique centrale" de Marc Chemillier) pour signifier qu'elle est répétée plusieurs fois. La propriété, appelée imparité rythmique, exprime le fait qu'on ne peut couper le cercle en deux parties égales faites de durées successives.

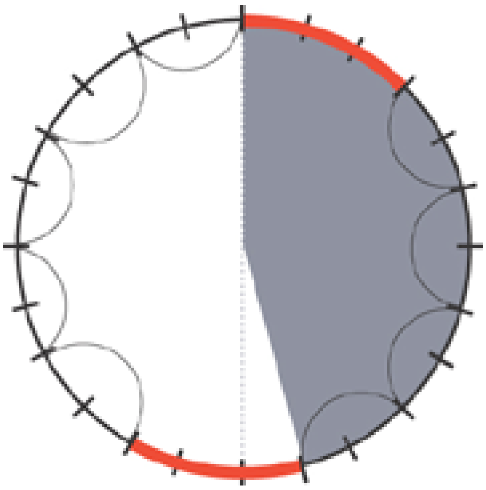


FIGURE 1 – Représentation circulaire de la suite de durées 32222322222

Un *mot rythmique* est une séquence finie $m = x_0x_1 \dots x_{l-1}$ dont chaque terme x_i est égal à l'entier 2 ou 3. L'entier l est la *longueur* de m et l'entier $h = \sum_{0 \le i < l} x_i$ est la *hauteur* de m. Le mot rythmique m est *impair* s'il n'existe aucun sous-mot $x_ix_{i+1} \dots x_{j-1}$, $0 \le i < j \le l$, de hauteur égale à $h/2$. Il est évident qu'un mot rythmique est impair si sa hauteur est un entier impair. Nous proposons quelques caractérisations et une construction des mots rythmiques impairs de hauteur paire.

2 Énoncé des résultats de base

2.1 Test de l'imparité rythmique

Notons $\mathcal{R}$ l'ensemble des mots rythmiques et ϵ le mot rythmique de longueur nulle. Soit δ la permutation de $\mathcal{R}$ définie par $\delta(\epsilon) = \epsilon$ et $\delta(au) = ua, a \in \{2, 3\}, u \in \mathcal{R}$. Les *conjugués* d'un mot rythmique m sont les mots de la forme $\delta^k(m)$ pour tout entier k.

Le *préfixe* de longueur λ d'un mot rythmique $m = x_0x_1 \dots x_{l-1}$, $l \ge \lambda$, est le mot $x_0x_1 \dots x_{\lambda-1}$. Le mot $x_ix_{i+1} \dots x_{j-1}$, $0 \le i < j \le l$, est le préfixe de longueur $j-i$ du mot conjugué $\delta^i(m)$. Un mot rythmique m de hauteur h est donc impair si et seulement si tout préfixe de tout conjugué de m est de hauteur différente de $h/2$. La caractérisation suivante affirme que l'on peut tester l'imparité rythmique en examinant seulement les préfixes d'une longueur fixe.

Lemme 1 *Un mot rythmique m de hauteur paire égale à $2h$ est impair si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :*
- *La longueur de m est impaire, soit $2l + 1$.*
- *Les préfixes de longueur l des conjugués de m ont une hauteur égale à $h - 2$ ou $h - 1$.*

Exemple Le mot rythmique $m = 332323323$ engendre par répétition le rythme mokongo des pygmées Aka. Chacun des conjugués, listés ci-dessous en appliquant itérativement δ, engendre le même rythme.
332323323, **3232**33233, **2323**32333, **3233**23332, **2332**33323, **3323**33232, **3233**32323, **2333**23233, **3332**32332

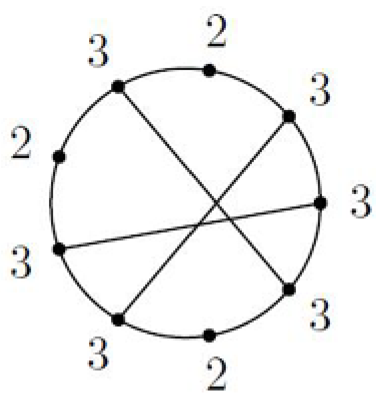
La longueur de m est $2l + 1 = 9$ et sa hauteur est $2h = 24$. Chaque préfixe de longueur $l = 4$ d'un conjugué de m a une hauteur égale à $h - 2 = 10$ ou $h - 1 = 11$. Il s'ensuit que m est impair d'après le lemme.

2.2 Appariement d'un mot rythmique

À partir de maintenant les opérations arithmétiques sur les indices d'un mot $m = x_0 x_1 \dots x_{l-1}$ seront effectuées mod l. Soit un entier d tel que $0 < d \leq l/2$. Un *appariement* de m à distance d est une partition du sous-ensemble d'indices $\{i : 0 \leq i < l, x_i = 3\}$ en paires d'indices de la forme $\{j, j + d\}$.

Théorème 1 *Un mot rythmique m de hauteur paire est impair si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :*
- *La longueur de m est impaire, soit $2l + 1$.*
- *Le mot m admet un appariement à distance l.*

Exemple (suite) Répartissons les valeurs successives de m le long d'un cercle trigonométrique (la première lettre de m figure le plus à droite). Les trois cordes représentent un appariement à distance 4.



3 Applications

3.1 Lecture par sauts

Soit un mot $m = x_0x_1 \dots x_{l-1}$ et un entier p premier avec l. Notons $m^{(p)}$ le mot de longueur l obtenu en lisant les lettres de m de façon circulaire en partant de l'indice 0 et en sautant à chaque fois p indices plus loin pour lire la prochaine lettre. Formellement, si l'on pose $m^{(p)} = y_0y_1 \dots y_{l-1}$, on a

(1) $\quad y_i = x_{ip},\ 0 \leq i < l$

en calculant chaque produit $ip \bmod l$.

Puisque p est premier avec l il existe un entier q tel que $qp = 1 \mod\ l$. On a alors

(2) $\quad y_{iq} = x_{iqp} = x_i, 0 \leq i < l.$

Il s'ensuit que

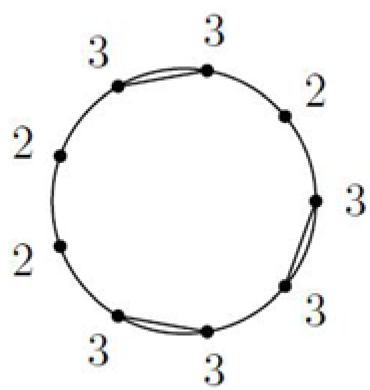
(3) $\quad m^{(p)(q)} = m.$

Corollaire 1 *Un mot rythmique m de hauteur paire est impair si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :*

- *La longueur de m est impaire, soit $2l+1$.*
- *Le mot $m^{(l)}$ admet un appariement à distance 1.*

Remarque Posons $m' = m^{(l)}$. On retrouve le mot m en appliquant la relation (3) avec $q = -2$, soit $m = m'^{(-2)}$.

Exemple (suite) On vérifie que $m' = m^{(4)} = 323322333$. Le mot m' admet l'appariement $A = \{\{2,3\},\{6,7\},\{8,0\}\}$ à distance 1, qui est représenté ci-dessous. On vérifie que $m = m'^{(-2)}$ (lecture circulaire de m' par sauts successifs de 2 positions vers la gauche).



3.2 Réduction d'un mot rythmique bien apparié

Propriété 1 *Si un mot rythmique de longueur impaire admet un appariement à distance 1 alors cet appariement est unique.*

Posons les définitions suivantes pour un mot rythmique m' de longueur impaire qui admet un appariement A à distance 1 (unique d'après la propriété précédente). Un *sous-mot réductible* de m' est un sous-mot égal à 33 dont les indices forment une paire appartenant à A. Le mot m' est *bien apparié* si chaque occurrence de 3 apparaît dans un sous-mot réductible. La *réduction* d'un mot m' bien apparié est le mot binaire (sur l'alphabet $\{0, 1\}$) obtenu en remplaçant chaque occurrence de 2 par 0 et chaque sous-mot réductible par 1.

Exemple (suite) Marquons chaque sous-mot réductible en l'écrivant sous un chapeau, soit $m' = 32\widehat{33}22\widehat{33}3$. On voit que m' n'est pas bien apparié à cause de la première et de la dernière occurrence de 3 qui n'apparaissent pas dans un sous-mot réductible. Par contre $\delta(m') = 2\widehat{33}22\widehat{33}\widehat{33}$ est bien apparié. La réduction de $\delta(m')$ est égale à 010011.

De façon générale on vérifie facilement que si un mot rythmique m' de longueur impaire admet un appariement à distance 1 sans être bien apparié alors $\delta(m')$ est bien apparié.

Nous venons de voir comment associer un mot binaire à un mot rythmique impair de hauteur paire. Nous allons maintenant faire le chemin inverse.

3.3 Construction des mots rythmiques impairs de hauteur paire

Soient deux entiers positifs p et q. Nous désirons énumérer l'ensemble $R = R(2p + 1, 2q)$ des mots rythmiques impairs de hauteur paire comprenant $2p + 1$ occurrences de 2 et $2q$ occurrences de 3. Ce n'est pas l'énumération complète de R qui nous intéresse car deux mots conjugués engendrent le même rythme par répétition. Il importe plutôt d'énumérer les classes de conjugaison contenues dans R en fournissant un représentant dans chacune d'entre elles.

Disons de façon générale qu'un ensemble de mots C *représente* un ensemble de mots M si C contient un élément et un seul de chaque classe de conjugaison incluse dans M. Il s'agit donc de construire un ensemble de mots qui représente R. Nous allons voir que ce problème peut se ramener à celui de la construction d'un ensemble de mots qui représente l'ensemble $B = B(2p+1, q)$ des mots binaires (sur l'alphabet $\{0, 1\}$) contenant $2p+1$ occurrences de 0 et q occurrences de 1.

Soit un mot $b \in B$. Remplaçons chaque occurrence de 0 par 2 et chaque occurrence de 1 par le mot 33. Nous obtenons ainsi un mot m' dans l'ensemble $A = A(2p + 1, 2q)$ des mots rythmiques admettant un appariement à distance 1 et contenant $2p+1$ occurrences de 2 et $2q$ occurrences de 3. Considérons la fonction $f : B \to A$ définie par $f(b) = m'$. Le mot $m = m'^{(-2)}$ appartient à R d'après le corollaire 1 et la remarque qui suit. Considérons la fonction $g : A \to R$ définie par $g(m') = m$. La composée $h = g \circ f$ associe à tout mot $b \in B$ un mot $h(b) \in R$.

Corollaire 2 *Si C est un ensemble de mots qui représente B alors $h(C)$ représente R.*

Exemple L'ensemble $B(3, 3)$, qui contient quatre classes de conjugaison, est représenté par $C = \{000111, 001011, 001101, 010101\}$ (le minimum lexicographique a été choisi dans chaque classe de conjugaison). Le tableau ci-dessous reprend une partie de la table 2 d'un article de Marc Chemillier et Charlotte Truchet (1). Il détaille la construction d'un mot rythmique impair de hauteur 24 pour chaque élément $b \in C$.

	b	m'	$m = m'^{(-2)}$
1	000111	222333333	233323332
2	001011	223323333	233323323
3	001101	223333233	233323233
4	010101	233233233	233233233

Remarques Le mot rythmique de la ligne numéro 1 engendre le rythme mokongo. Celui de la ligne 2 engendre le rythme mokongo rétrograde. Celui de la ligne 3 n'est pas utilisé dans un rythme connu. Le mot rythmique 4 a une période égale à 3 ; il engendre le même rythme que 233.

4 Preuves

Preuve du lemme 1 Condition suffisante. Chaque suffixe de longueur $l+1 = (2l+1) - l$ a une hauteur égale à $2h - (h-2) = h+2$ ou $2h - (h-1) = h+1$. Pour tout entier i le préfixe de longueur $l+1$ du mot conjugué $\delta^i(m)$ est égal au suffixe de longueur $l+1$ du mot conjugué $\delta^{i+l+1}(m)$. Ainsi les préfixes de longueur l ont une hauteur inférieure à h et les préfixes de longueur $l+1$ ont une hauteur supérieure à h. Il n'existe donc aucun préfixe de hauteur h et le mot rythmique m est impair.

Condition nécessaire. Commençons par établir deux propriétés intermédiaires satisfaites lorsque le mot m est impair. Notons L la longueur de m.

(1) Soient deux entiers λ et n tels que $0 \leq \lambda < L$ et $0 \leq n$. Si le préfixe de longueur λ du mot $\delta^n(m)$ a une hauteur égale à $h-1$ ou $h-2$ alors le préfixe de longueur λ du mot $\delta^{n+1}(m)$ a une hauteur égale à $h-1$ ou $h-2$.

Preuve de (1). Posons $m' = \delta^n(m) = x_0 x_1 \ldots x_{L-1}$. Le préfixe p' de longueur λ du mot m' est égal à $x_0 x_1 \ldots x_{\lambda-1}$. Le mot $m'' = \delta^{n+1}(m)$ est égal à $x_1 x_2 \ldots x_{L-1} x_0$ et son préfixe p'' de longueur λ est égal à $x_1 x_2 \ldots x_{\lambda-1} x_\lambda$. La hauteur h' du préfixe p' et la hauteur h'' du préfixe p'' sont reliés par l'égalité $h'' = h' - x_0 + x_\lambda$. Puisque chacune des valeurs x_0 et x_λ est égale à 2 ou 3, la valeur de $-x_0 + x_\lambda$ est égale à -1, 0 ou 1. Il s'ensuit, puisque la valeur de h' est égale à $h-2$ ou $h-1$, que h'' est égal à $h-3$, $h-2$, $h-1$ ou h. La valeur h est exclue car, le mot m'' étant impair, son préfixe p'' ne peut être de hauteur égale à h. Pour que h'' soit égal à $h-3$ il faut que les termes h' et $-x_0 + x_\lambda$ de l'égalité $h'' = h' + (-x_0 + x_\lambda)$ soient tels que $h' = h-2$ et $-x_0 + x_\lambda = -1$. La dernière égalité est réalisée seulement si $x_0 = 3$ et $x_\lambda = 2$. Mais alors le préfixe $p = x_0 x_1 \ldots x_{\lambda-1} x_\lambda$ a pour hauteur $h' + x_\lambda = h$, ce qui est interdit. Il ne reste donc que les valeurs permises $h-1$ et $h-2$ pour h''.

(2) Le mot m admet un préfixe p de hauteur égale à $h-1$ ou $h-2$.

Preuve de (2). Posons $m = x_0 x_1 \ldots x_{L-1}$. Les hauteurs des préfixes successifs de m croissent de 0 à $2h$ lorsque la longueur croît de 0 à L. Soit λ l'entier maximal tel que le préfixe $m' = x_0 x_1 \ldots x_{\lambda-1}$ soit de hauteur h' inférieure à h. Le préfixe m'' obtenu en ajoutant x_λ à la fin de m' est de hauteur $h'' > h$. On a donc $x_\lambda = h'' - h' > h - h' > 0$. Il s'ensuit que $h - h' = 1$ ou $h - h' = 2$ puisque $x_\lambda = 2$ ou $x_\lambda = 3$.

Fin de la preuve de la condition nécessaire. Soit λ la longueur du préfixe p défini dans la propriété (2). La propriété (1) entraine que le préfixe de longueur λ de tout mot conjugué de m a une hauteur égale à $h-1$ ou $h-2$. Considérons le mot concaténé $m' = mp$, de longueur $L + \lambda$, et le préfixe q de longueur 2λ du mot m'. Le préfixe q est la concaténation du préfixe

p avec le préfixe de longueur λ du mot $\delta^\lambda(m)$. Puisque chacun de ces préfixes a une hauteur égale à $h-1$ ou $h-2$ le mot q a une hauteur H telle que

(3) $2h-4 \leq H \leq 2h-2$.

Notons pour la suite que si l'égalité $H = 2h-4$ est réalisée alors p est de hauteur $h-2$.

Cas 1 : $L \leq 2\lambda$. Alors m, qui est de longueur L, est un préfixe de q, qui est de longueur 2λ. Il s'ensuit que la hauteur de m est au plus égale à celle de q, soit $2h \leq H$, qui contredit (3).

Cas 2 : $2\lambda \leq L-2$. Alors q est un préfixe de m. En outre puisque la différence des longueurs de m et q est au moins égale à 2, les deux derniers termes de m, soit x_{L-2} et x_{L-1}, ne sont pas dans q. La hauteur de q est donc telle que

(4) $H \leq 2h - x_{L-2} - x_{L-1} \leq 2h-4$.

Compte tenu de (3) il vient $H = 2h-4$. L'égalité $H = 2h-4$ est réalisée dans (3) seulement si la hauteur du préfixe p est égale à $h-2$. L'égalité $H = 2h-4$ est réalisée dans (4) seulement si $x_{L-2} = x_{L-1} = 2$. Mais alors $x_{L-1}p$, qui est un préfixe de $\delta^{-1}(m)$, a une hauteur égale à h, ce qui est interdit pour le mot impair m.

Les cas 1 et 2 étant exclus il vient $2\lambda = L-1$, ce qui achève la preuve de la condition nécessaire. ∎

Preuve du théorème 1 Soit $2h$ la hauteur du mot m.

Condition nécessaire. On sait par le lemme que la longueur de m est impaire, soit $2l+1$. Le lemme implique que chaque mot m_i de la forme $x_i x_{i+1} \dots x_{i+l-1}$, $0 \leq i < 2l+1$, a une hauteur h_i égale à $h-1$ ou $h-2$. Lorsque $h_i = h-2$ on a $x_{i-1} = x_{i+l} = 3$ sinon l'un des mots m_i précédé de x_{i-1} ou suivi de x_{i+l} serait de hauteur h, ce qui est interdit. Montrons que l'ensemble P des paires $p_i = \{i-1, i+l\}$ définies pour les mots m_i tels que $h_i = h-2$ est un l-appariement de m. Puisque $(i-1)-(i+l) = -l-1 = l \bmod 2l+1$ il suffit de montrer que P est une partition du sous-ensemble d'indices $\{i : 0 \leq i < 2l+1, x_i = 3\}$. Pour cela il reste à établir deux propriétés.

(1) Si $p_i = \{i-1, i+l\}$ et $p_j = \{j-1, j+l\}$ sont des paires non disjointes appartenant à P, alors ces paires sont égales. C'est évident si $i-1 = j-1$ ou $i+l = j+l$. Supposons que $j-1 = i+l$. On a $m_i = x_i x_{i+1} \dots x_{i+l-1}$ et $m_j = m_{i+l+1} = x_{i+l+1} x_{i+l+2} \dots x_{i+2l}$. La concaténation $m_i x_{i+l} m_j$ est égale au mot $\delta^i(m)$. Il s'ensuit $2h = h_i + x_{i+1} + h_j = h-2 + x_{i+l} + h-2$, qui est impossible puisque $x_{i+l} \leq 3$. Il est aussi impossible par symétrie que $i-1 = j+l$. Il ne reste donc que les deux premiers cas et la propriété (1) est démontrée.

(2) Tout indice k tel que $x_k = 3$ est couvert par une paire p_i appartenant à P. Considérons les mots $m_{k-l} = x_{k-l} x_{k-l+1} \dots x_{k-1}$, x_k et $m_{k+1} = x_{k+1} x_{k+2} \dots x_{k+l}$. Le mot $\delta^{k-l}(m)$ est égal à la concaténation $m_{k-l} x_k m_{k+1}$. Il s'ensuit que $2h = h_{k-l} + x_k + h_{k+1} = h_{k-l} + h_{k+1} + 3$. Puisque chacune des hauteurs h_{k-l} et h_{k+1} est égale à $h-1$ ou $h-2$ l'égalité précédente implique $h_{k-l} = 2$ ou $h_{k+1} = 2$. Dans le premier cas x_k est couvert par la paire p_{k-l} et dans le second cas x_k est couvert par la paire p_{k+1}. Ainsi la propriété (2) est démontrée ainsi que la condition nécessaire.

Condition suffisante. Nous allons montrer que si le mot m satisfait les conditions du théorème alors il satisfait aussi les conditions du lemme. La condition d'imparité sur la longueur de m étant commune il reste à établir que, pour tout mot conjugué $\delta^i(m) = y_0 y_1 \dots y_{2l}$, le préfixe $p = y_0 y_1 \dots y_{l-1}$ a une hauteur égale à $h-1$ ou $h-2$. Posons $s = y_l y_{l+1} \dots y_{2l}$, $a = |\{i : 0 \leq i < l, x_i = 3\}|$ et $b = |\{i : l \leq i \leq 2l, x_i = 3\}|$. La hauteur de m est égale à $2(2l+1)+a+b$ et la hauteur de p est égale à $2l+a$. Il s'ensuit, en notant $h(p)$ la hauteur de p, que

(1) $h(p) = h-1 \iff a = b$ et

(2) $h(p) = h-2 \iff a = b-2$.

Cas 1. Chaque paire du l-appariement contient un indice i de p tel que $x_i = 3$ et un indice j de s tel que $x_j = 3$. On a donc $a = b$ et il vient $h(p) = h - 1$ d'après (1).

Cas 2. Il existe une paire π du l-appariement incluse dans $\{0, 1, \ldots, l-1\}$ ou dans $\{l, l+1, \ldots, 2l\}$. La première inclusion est impossible car on ne peut pas trouver deux indices de différence égale à l dans l'ensemble $\{0, 1, \ldots, l-1\}$. La seconde inclusion peut avoir lieu, mais alors on a nécessairement $\pi = \{l, 2l\}$. Toute autre paire du l-appariement contient un indice i de p tel que $x_i = 3$ et un indice j de s tel que $x_j = 3$. On a donc $a = b - 2$ et ceci implique $h(p) = h - 2$ d'après (2). La condition suffisante est donc prouvée. ∎

Preuve du corollaire 1 Il suffit de montrer qu'un mot rythmique m de longueur impaire égale à $2l + 1$ admet un appariement à distance l si et seulement si $m^{(l)}$ admet un appariement à distance 1. Posons $q = -2$ et notons que $ql = -2l = 1 \mod 2l + 1$.

Supposons que le mot m admet un appariement $\{\{i, i + l\} : i \in I\}$ à distance l. L'égalité $x_i = x_{i+l} = 3$ implique, en utilisant (2), $y_{iq} = y_{(i+l)q} = y_{iq+1}$ pour chaque indice $i \in I$. Donc $\{\{iq, iq + 1\} : i \in I\} = \{\{j, j + 1\} : j \in Iq\}$ est un appariement à distance 1 de $m^{(p)}$. La condition nécessaire est ainsi prouvée. Réciproquement si l'on suppose que le mot $m^{(l)}$ admet un appariement $\{\{j, j + 1\} : j \in J\}$ à distance 1 on montre de la même façon, en utilisant (1), que $\{\{jl, jl + l\} : j \in J\} = \{\{i, i + l\} : i \in Jl\}$ est un appariement à distance l de m. ∎

Preuve de la propriété 1 Soit m le mot rythmique considéré, $2l + 1$ sa longueur et A l'appariement de m à distance 1. On trouve au moins une occurrence de 2 dans m. Soit x_i une occurrence de 2 suivie par une occurrence de 3. Puisque $x_{i+1} = 3$ l'appariement A doit contenir l'une des paires $\{i, i + 1\}$ ou $\{i + 1, i + 2\}$. La première paire est interdite puisque $x_i = 2$. Donc $\{i + 1, i + 2\} \in A$. Si $x_{i+3} = 3$ on voit de même que $\{i + 3, i + 4\} \in A$ et par induction que $\{i+2k+1, i+2k+2\}$ pourvu que $x_{i+1} = x_{i+3} = \ldots = x_{i+2k+1} = 3$, les opérations arithmétiques sur les indices étant effectuées mod $2l + 1$. Ceci étant vrai pour toutes les occurrences x_i de 2 suivies par une occurrence de 3, l'appariement A est complètement déterminé. ∎

Preuve du corollaire 2 Il s'agit essentiellement d'une suite de vérifications formelles. Notons $m \equiv n$ lorsque deux mots m et n sont conjugués. Le corollaire sera prouvé si les propriétés suivantes sont satisfaites.

(4) Pour $m', n' \in A$, $m' \equiv n' \iff g(m') \equiv g(n')$.

(5) Pour $a, b \in B, a \equiv b \iff f(a) \equiv f(b)$.

Preuve de (4). Supposons $m' \equiv n'$. Il existe k tel que $n' = \delta^k(m')$. Les définitions de g et δ impliquent $g(\delta(m')) = \delta^{-2}(g(m'))$. Cette dernière égalité entraine $g(n') = g(\delta^k(m')) = \delta^{-2k}(g(m'))$ et ainsi $g(n') \equiv g(m')$. Réciproquement si l'on suppose $g(n') \equiv g(m')$ on pose $m = g(m')$, $n = g(n')$ et l'on montre de la même façon, en considérant la bijection inverse de g et en utilisant l'égalité $g^{-1}(\delta(m)) = \delta^{p+q}(g^{-1}(m))$, que $m' = g^{-1}(n) \equiv g^{-1}(n) = n'$.

Preuve de (5). Supposons $a \equiv b$. Il existe k, $0 \leq k \leq 2p + q$, tel que $b = \delta^k(a)$. Considérons le préfixe α de longueur k dans a. Si n est le nombre d'occurrences de 1 dans α on vérifie que $f(b) = \delta^{k+n}(f(a))$ et ainsi $f(b) \equiv f(a)$. Réciproquement supposons $f(a) \equiv f(b)$ et posons $m' = f(a)$ et $n' = f(b)$. Les mots m' et n' sont bien appariés et leurs réductions sont respectivement égales à a et b. Considérons l'entier positif minimal k tel que $n' = \delta^k(m')$. Soit α' le préfixe de longueur k du mot m' et β' le suffixe complémentaire de α. On a donc $m' = \alpha'\beta'$ et $n' = \beta'\alpha'$. Chaque sous-mot réductible de $m' = \alpha'\beta'$ est un sous-mot de α' ou un sous-mot de β' sinon il y aurait une occurrence de 3 à la fin de α' et une occurrence de 3 au début de β', mais alors $n' = \beta'\alpha'$ ne serait pas bien apparié. Il s'ensuit que, si α est la réduction de α' et β est la réduction de β', on a $a = \alpha\beta$ et $b = \beta\alpha$ et ainsi a et b sont conjugués. ∎

5 Conclusion

Le théorème 1 donne une caractérisation facile à vérifier de l'imparité rythmique. La section 2.3 établit une bijection entre l'ensemble de mots rythmiques $R(2p+1, 2q)$ et l'ensemble de mots binaires $B(2p+1, q)$, dont la compréhension est très simple. Cependant la construction donnée dans cette section manque de naturel en requérant de calculer le mot $m'^{(-2)}$ à partir d'un mot binaire m' appartenant à $B(2p+1, q)$.

Nous préférons la construction suivante d'un mot rythmique impair. Pour la décrire convenons de dire que, pour un nombre impair positif $2p+1$, le nombre p en est la *moitié*.

Partons d'un mot rythmique impair de longueur $2p+1$ ne contenant que des occurences du symbole 2 réparties sur un cercle. Plaçons une occurence du symbole 3 n'importe où sur le cercle sauf en un point où l'on a déjà placé une occurence de 2. En parcourant le cercle à partir de cette occurence de 3 sautons par dessus un nombre d'occurences de 2 égal à la moitié du nombre de symboles écrits initialement (la moitié est ici égale à p) et plaçons alors une nouvelle occurence de 3. On peut recommencer la même opération en écrivant sur le cercle une nouvelle occurence de 3 et, après avoir sauté la moitié des occurences déjà placées (la moitié est maintenant égale à $p+1$), en écrivant une nouvelle occurence de 3. Et ainsi de suite en prenant la précaution de sauter successivement au dessus de $p+2$, $p+3$, ... occurences déjà placées avant d'écrire une seconde occurence de 3.

La validité de la construction peut se vérifier à partir du théorème 1. Elle est simple en exigeant seulement de sauter au dessus de symboles déjà écrits en les comptant jusqu'à la moitié de ces symboles. Un principe semblable pourrait-il avoir été utilisé dans la construction originale des rythmes des pygmées Aka ?

Il faut signaler ici que Marc Chemillier a déjà décrit une construction des rythmes impairs en appliquant successivement, à partir du couple de mots (ϵ, ϵ), deux transformations $a : (u, v) \mapsto (3u, 3v)$ et $b : (u, v) \mapsto (v, 2u)$, où (u, v) est un couple de mots. Si la transformation b est appliquée un nombre impair de fois et si (u, v) est le couple de mots final, alors uv est un mot rythmique impair. Est-il possible de relier cette transformation aux méthodes introduites dans cette note ?

Références

[1] Marc Chemillier et Charlotte Truchet, Computation of words satisfying the "rhythmic oddity property" (after Simha Arom's works), Information Processing Letters 86 (2003) 255-261.