Fiche 4 : L’étude des bâtons à multiplier

1. La multiplication *per gelosia*

Avant de nous consacrer aux bâtons à multiplier, nous allons nous intéresser à la multiplication *per gelosia* (*par jalousie*). Cette technique de multiplication à l’aide d’un tableau a été utilisée en Islam, en Chine et en Europe entre les 13ème et 15ème siècles. Elle est aussi appelée méthode *par grillage* ou *par filets*. Sur cette question et afin d’améliorer le calcul des produits de deux nombres naturels, Brousseau (1973) a comparé l’algorithme traditionnel et l’algorithme *per gelosia*. La conclusion très nette est que l’algorithme *per gelosia* est beaucoup plus fiable pour les calculs. Cette méthode s’enseigne aujourd’hui aux futurs professeurs des écoles et est envisagée en introduction de la multiplication traditionnelle dont l’algorithme est beaucoup plus complexe.

Prenons l’exemple de 721 par 59 (qui donne 42 539).

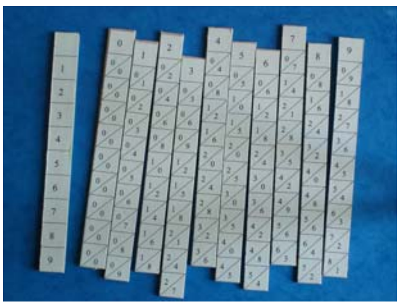
Remarque : Pour rester proche du calcul avec des bâtons, nous écrivons le multiplicande, 59, à gauche, en effet, l’index est toujours à gauche des bâtons utilisés. La lecture s’effectue diagonale par diagonale.

	7	2	1
5	$^{1}3$ / 5	1 / 0	$^{1}0$ / 5
9	6 / 3	1 / 8	0 / 9
42	**5**	**3**	**9**

Selon les pays, l’écriture s’effectue de droite à gauche et donc le tableau est dans l’autre sens. C’est de ces calculs avec des tableaux que l’idée des baguettes matérielles a vus le jour sous la forme des bâtons de Néper puis des réglettes de Genaille-Lucas.

La disposition actuelle (en colonne) de la multiplication est connue dès la fin du 17ème siècle mais le calcul avec jetons sera utilisé encore par la suite, jusqu’à l’adoption définitive du système décimal de position. En effet, en 1745 Le Gendre publie *Arithmétique par les jetons*. Cet ouvrage est destiné aux marchands et comptables qui utilisent les symboles romains (en vigueur jusqu’au 18ème pour les comptes publics). Il suffit d’essayer de faire une opération avec des nombres romains pour comprendre la nécessité d’utiliser des jetons pour les calculs !

2. Les bâtons de Néper



John Néper est un mathématicien écossais qui mit au point en 1617 un instrument de calcul permettant d’effectuer des multiplications, qui sera utilisé jusqu’à la fin du 19ème siècle en Europe. L’avantage de cette technique, c’est que pour faire une multiplication, on ne fait que des additions.

Un jeu de bâtons compte au moins onze baguettes : de zéro à neuf (le zéro peut-être utile quand il n’est pas en dernière position pour 107 par exemple), ainsi qu'un index. Chaque baguette est formée de dix cases, celle du haut indique le numéro de la table et les autres cases sont divisées avec une diagonale, qui part du haut à droite. Les diagonales placent de manière spécifique chaque unité et chaque dizaine obtenues par les produits de zéro à neuf. Quand les bâtons sont rangés, ils forment une table de Pythagore. Cette technique permet d'écrire chaque nombre avec le décalage adéquat pour réaliser une multiplication. Tous les chiffres qui sont dans une même diagonale appartiennent au même rang dans le nombre résultat (par rang nous entendons unité, dizaine, etc.). Par contre, il faut que l'utilisateur fasse le report des retenues (quand l'addition réalisée dans la diagonale donne plus que neuf), la retenue se reporte dans la diagonale immédiatement à gauche.

En réalité, chaque bâton comportait quatre faces utilisables, ce qui permettait de pouvoir utiliser un même chiffre plusieurs fois dans un nombre.

3. Les réglettes de Genaille-Lucas

Édouard Lucas est un mathématicien français qui proposa d'améliorer les bâtons de Néper, c'est-à-dire de rendre automatiques certains calculs. C'est Henri Genaille, un ingénieur français qui donna une réponse en 1885. Ces réglettes qui seront utilisées jusque dans les années 1910, permettent une lecture directe en supprimant les additions intermédiaires. On soulève ici l'étude des retenues lors des multiplications. Tout d'abord, quelle est la retenue maximale possible pour une addition de deux nombres ? Et pour une multiplication de deux nombres ?

Comme pour les bâtons de Néper, on a une réglette par chiffre, de zéro à neuf, et un index. Pour comprendre le mode de fonctionnement, regardons par exemple comment la baguette du trois est construite. Mettons l'index à gauche de la baguette du trois. Comme souvent en mathématiques, nous regardons un exemple particulier qui nous sert de base pour étendre notre raisonnement au cas général.

La question est alors : *Comment lire le résultat de trois fois un, trois fois deux, trois fois trois etc. sur ces réglettes ?* Le principe est que chaque réglette possède une colonne à droite où sont inscrites les unités, en haut de chaque case. Pour la dizaine il suffit de suivre le triangle. Trois fois un : trois unités puis pour la dizaine on lit zéro, donc le résultat est bien trois. Et pour quatre fois trois ? L'unité en haut à droite est deux et le triangle nous amène vers la dizaine : un, on a bien quatre fois trois qui donne 12. Et six fois trois ? Ça fait bien 18 ! On remarque que parfois deux triangles de lecture sont nécessaires à l'intérieur d'une même case (pour trois, six, huit et neuf fois trois). On réfléchira à ceci par la suite. Essayons d'abord de comprendre comment chaque bâton est construit.

Rappelons que le progrès de ces bâtons est qu'ils gèrent la retenue lorsque l'on multiplie un nombre par un chiffre, par exemple 567 fois 9. Par rapport à Néper, on n'a plus l'addition en diagonale à effectuer, ce sont les réglettes qui le gèrent. Par contre comme pour Néper, lorsque l'on multiplie deux nombres à plusieurs chiffres (9 312 fois 109), les additions sont à effectuer par l'utilisateur.

Regardons maintenant l'index en changeant les réglettes. Dans la ligne du un, avec comme dizaine possible zéro car au maximum on peut avoir neuf (neuf fois un). Dans celle du deux, au maximum 2×9=18, la dizaine envisageable est donc zéro ou un et ainsi de suite. L'index se construit donc en énumérant les dizaines possibles pour la multiplication de deux chiffres.

Ensuite nous allons réfléchir au fait qu'il est nécessaire, sur chaque réglette de table, de pouvoir incrémenter de un le résultat obtenu pour les unités. Ceci est nécessaire si l'on veut pouvoir mettre les réglettes à la suite pour réaliser des multiplications. La question à se poser est : *Quelles sont les retenues envisageables lors des multiplications ?* Pour les additions la réponse est simple : au maximum, c'est un de retenue (9+9=18), c'est le mécanisme du boulier, des additionneuses ou de la Pascaline. Après neuf, on passe une retenue à gauche et on remet le compteur à zéro, c'est dix ! Pour les multiplications ce n'est pas immédiat, les retenues possibles dépendent de la table, par exemple pour cinq, c'est quatre (9×5=45), pour sept, c'est six (9×7=63), etc. Même si on a déjà une retenue au rang inférieur, ça ne change pas la retenue maximale (tableau suivant). On comprend maintenant l'intérêt des triangles de lecture : ils décalent en prenant compte de la retenue et permettent une lecture directe.

Table (ou multiplicande)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Résultat maximum	9	18	27	36	45	54	63	72	81
Dizaine ou retenue possible	0	0, 1	0, 1, 2	0, 1, 2, 3	0, 1, 2, 3, 4	0, 1, 2, 3, 4, 5	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

Tableau 1 : Retenues possibles pour les multiplications

$$\begin{array}{rrrr} & & 7 & 2 \\ \times & & & 5 \\ \hline & & 1 & 0 \\ + & 3 & 5 & 0 \\ \hline & 3 & 6 & 0 \end{array}$$

Regardons l'exemple 72 fois 5. Si on regarde les deux réglettes séparément : 5×2=10, on lit zéro unité et une dizaine c'est-à-dire que le triangle de lecture se décalera de un si on place une autre réglette entre l'index et celle de deux, ici ce sera celle du sept. 70×5=350, mais avec le décalage on lit bien 360. Si on cherche directement le résultat de 72 fois 5 : dans les unités, on lit zéro puis pour les dizaines six (le triangle fait passer du cinq au six avec la retenue de un) puis trois centaines, c'est-à-dire 360. La décomposition ci-contre permet de visualiser cela.

$$\begin{array}{rrrr} & & 7 & 8 \\ \times & & & 7 \\ \hline & & 5 & 6 \\ + & {}^{1}4 & 9 & 0 \\ \hline & 5 & 4 & 6 \end{array}$$

Pour l'exemple 78 fois 7. De combien va être la retenue à reporter dans les dizaines ? De cinq car 8×7=56 et 7×70=490, le triangle de lecture va faire passer du neuf au quatre. Dans cet exemple, il faut aussi gérer la retenue obtenue dans les centaines et qui provient de l'addition dans les dizaines (9+4), elle est donc de un (comme pour les additions). On a donc cinq dans les centaines (4+1) et le résultat est 546. Regardons de plus près l'exemple de sept fois sept avec le triangle supérieur on lit 49, dès que la retenue est égale à un, on passe à 50. En effet, dans les dizaines on passe du quatre au cinq et c'est ce que permet de réaliser le rectangle inférieur.

On peut généraliser ce passage de 19 à 20, de 29 à 30, de 39 à 40, etc. Si on observe une réglette on s'aperçoit bien qu'à chaque fois que l'unité passe de neuf à zéro, on change de triangle de lecture qui décale pour gérer la retenue.

4. Multiplication : l'exemple de 632 par 83

Regardons les différentes techniques de multiplication.

- Multiplication per gelosia (ou par grillage)

	6	**3**	**2**
8	$^{1}4$ / 8	$^{1}2$ / 4	$^{1}1$ / 6
3	1 / 8	0 / 9	0 / 6
52	**4**	**5**	**6**

- Méthode traditionnelle (ou de Fibonacci ou à l'italienne)

632×83 = 632×3 + 632×80

			6	3	2	
		×		8	3	
		$^{1}1$	$^{1}8$	9	6	3×632
+	5	0	5	6	0	80×632
	5	2	4	5	6	

- Méthode par décomposition

632×83 = 3×2 + 3×30 + 3×600 + 80×2 + 80×30 + 80×600.

			6	3	2	
		×		8	3	
					6	3×2
+				9	0	3×30
+		$^{1}1$	$^{1}8$	0	0	3×600
+			1	6	0	80×2
+		2	4	0	0	80×30
+	$^{1}4$	8	0	0	0	80×600
	5	2	4	5	6	

- Avec les bâtons de Néper (dessin de la page suivante à gauche)

632×83 = 632×8×10 + 632×3 = 50560 + 1896. On place l'index à gauche et les bâtons du six, du trois et du deux à la suite. Attention à ne pas oublier les retenues.

- Avec les réglettes de Genaille-Lucas (dessin de la page suivante à droite)

632×83 = 632×8×10 + 632×3 = 50560 + 1896.

On place l'index à gauche et les bâtons du six, du trois et du deux à la suite. Ici les retenues sont gérées par les réglettes. On commence la lecture par les unités, les triangles noirs indiquent le sens de lecture.

×	6	3	2
1	0 / 6	0 / 3	0 / 2
2	1 / 2	0 / 6	0 / 4
3	**1** / **8**	**0** / **9**	**0** / **6**
4	2 / 4	1 / 2	0 / 8
5	3 / 0	1 / 5	1 / 0
6	3 / 6	1 / 8	1 / 2
7	4 / 2	2 / 1	1 / 4
8	**4** / **8**	**2** / **4**	**1** / **6**
9	5 / 4	2 / 7	1 / 8

×		6	3	2
1	0	6	3	2
2	0 1	2 3	6 7	4 5
3	0 **1** 2	**8** 9 0	**9** 0 1	**6** 7 8
4	0 1 2 3	4 5 6 7	2 3 4 5	8 9 0 1
5	0 1 2 3 4	0 1 2 3 4	5 6 7 8 9	0 1 2 3 4
6	0 1 2 3 4 5	6 7 8 9 0 1	8 9 0 1 2 3	2 3 4 5 6 7
7	0 1 2 3 4 5 6	2 3 4 5 6 7 8	1 2 3 4 5 6 7	4 5 6 7 8 9 0
8	0 1 2 3 4 **5** 6 7	8 9 **0** 1 2 3 4 5	4 **5** 6 7 8 9 0 1	**6** 7 8 9 0 1 2 3
9	0 1 2 3 4 5 6 7 8	4 5 6 7 8 9 0 1 2	7 8 9 0 1 2 3 4 5	8 9 0 1 2 3 4 5 6

5. La division avec des bâtons

Tout d'abord, reprenons la remarque de Lucas concernant la division avec les bâtons de Néper. Dans son ouvrage sur la *Théorie des nombres* (1891), il consacre un chapitre à la division des nombres entiers et en particulier un paragraphe sur la *division accélérée* (p 40-41). La division accélérée permet de simplifier les calculs lorsque le diviseur possède beaucoup de chiffres. De plus, " Cette méthode, très pratique, supprime les essais pour déterminer chaque chiffre du quotient ; elle est surtout avantageuse lorsqu'il s'agit de diviser plusieurs nombres par un même diviseur. " Tout d'abord, on calcule les dix premiers multiples du diviseur. Pour cela on a deux méthodes : soit " par des additions successives, avec preuve au moyen du dixième multiple " ; soit avec une lecture directe des multiples sur les bâtons de Néper. Ensuite, " l'opération se réduit à une suite de soustractions ". (Lucas, 1891)

Exemple :

Effectuons 55 123 ÷ 4 382 avec cette méthode et les bâtons de Néper. Avec les bâtons de Néper, on obtient les multiples de 4 382 (en plaçant les bâtons 4, 3, 8, 2 à côté de l'index) :

1×4 382 = 4 382
2×4 382 = 8 764
3×4 382 = 13 146
4×4 382 = 17 528
5×4 382 = 21 910
6×4 382 = 26 292
7×4 382 = 30 674
8×4 382 = 35 056
9×4 382 = 39 438
10×4 382 = 43 820

Puis on effectue les soustractions :

55 123 − 43 820 = 11 303 et 11 303− 8 764 = 2 539. Ainsi, le quotient est 12 et :

55 123 = 4 382 × 12 + 2 539

À la fin du 19$^{\text{ème}}$ siècle, Lucas et Genaille ont mis au point des réglettes pour divisions appelées *réglettes multisectrices*. Tout comme pour les *réglettes multiplicatrices*, la lecture est directe pour l'utilisateur[1]. L'utilisation de ces réglettes est a priori un peu magique. Pour l'enseignement des mathématiques elles sont intéressantes lorsque l'on se pose la question de savoir comment elles ont été fabriquées. À quelles questions doit-on avoir répondu pour construire des réglettes sans modèle ? Quels sont les quotients possibles, les restes possibles étant donnés un diviseur, un dividende ?

6. Une progression pour la classe

- Avec les bâtons de Néper

Effectuer : 582×2, 582×6, 582×9, 753×27, 753×67.

Réponses :

582×2=1 164

[1] Pour un modèle des réglettes multisectrices, voir http://infohost.nmt.edu/~borchers/napier/napier.html

582×6=3 492

582×9=5 238 (retenue)

753×27=2 0331, on a deux méthodes de résolution :

Soit on utilise la propriété 753×27=753×(20+7)=(753×2×10)+(753×7) et on utilise les bâtons de Néper sur les lignes du deux et du sept, sans oublier de multiplier le résultat de la multiplication par deux, par dix. Ensuite on fait l'addition finale. C'est-à-dire 753×27 = 15 060 + 5 271 = 20 331.

Soit on réécrit les lignes du deux et du sept l'une en dessous de l'autre et on effectue les additions par diagonales. Ce qui revient à faire une multiplication avec la méthode des grillages (ci-dessous à gauche). Et on vérifie bien l'égalité avec la décomposition (ci-dessous à droite).

	7	**5**	**3**
2	$^{1}1$ / 4	$^{1}1$ / 0	$^{1}0$ / 6
7	4 / 9	3 / 5	2 / 1
20	**3**	**3**	**1**

			7	5	3	
×				2	7	
				2	1	7×3
+			3	5	0	7×50
+		4	9	0	0	7×700
+				6	0	20×3
+		1	0	0	0	20×50
+	1	4	0	0	0	20×700
	2	0	3	3	1	

- Avec les réglettes de Genaille-Lucas

Effectuer 524×7, 584×7, 619×82.

Réponses :

524×7=3 668

584×7=4 088

Regardons les décompositions des deux opérations précédentes :

		5	2	4	
×				7	
			2	8	7×4
+		1	4	0	7×20
+	3	5	0	0	7×500
	3	6	6	8	

		5	8	4	
×				7	
			2	8	7×4
+		5	6	0	7×80
+	$^{1}3$	5	0	0	7×500
	4	0	8	8	

Pour 584×7, on change de triangle de lecture pour les milliers et on passe de trois milliers à quatre milliers.

619×82=50 758, on utilise la propriété suivante :

619×82 = 619×8×10 + 619×2 = 49 520+1 238=50 758. La lecture s'effectue sur les lignes du huit puis du deux, sans oublier de multiplier la ligne du huit, par dix avant l'addition finale.