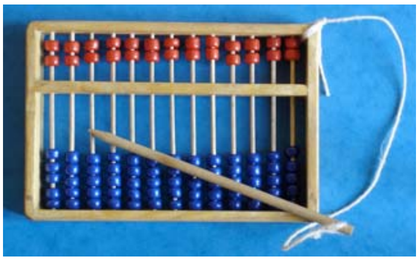
Fiche 3 : L'étude du boulier chinois

1. Le principe du boulier chinois

Le boulier chinois commercialisé



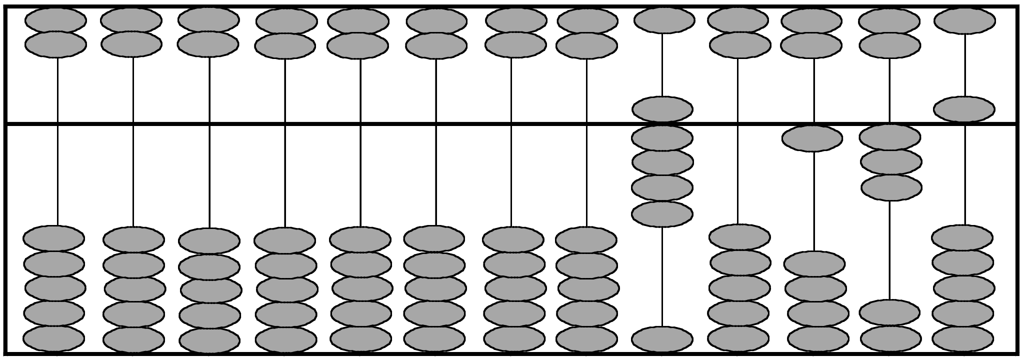
Un boulier chinois fabriqué par un enfant de CM2

La trace d'un usage d'un système décimal remonte au 14ème siècle avant J.-C. en Chine, celle-ci a donc précédé l'Europe de 2 300 ans ! Pour Temple (1987) :

> " Une des raisons en est sans doute que l'écriture chinoise emploie des idéogrammes et non un alphabet. Un alphabet comprend nécessairement plus de neuf lettres et, si les nombres sont représentés par des lettres, on est tenté de ne pas s'arrêter après " neuf ", mais de continuer " (Temple, 1987, p 139).

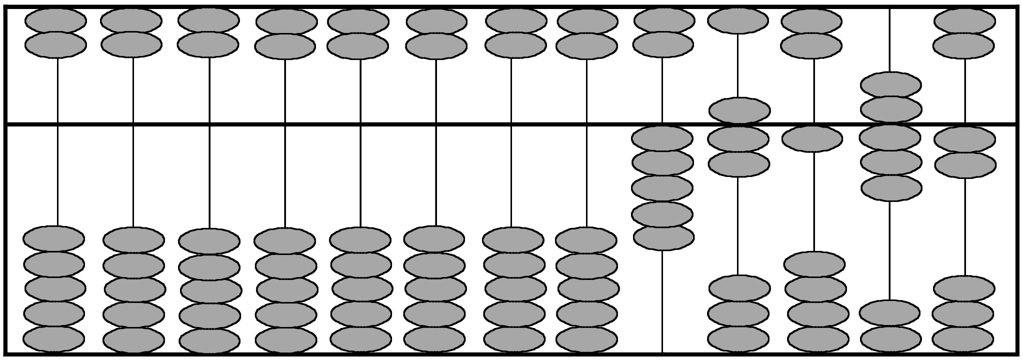
La numération chinoise est définie par Guitel (1975) comme une *numération de position de type hybride* (pour les nombres inférieurs à 10^5). L'écriture d'un nombre en idéogramme est très régulière et très proche du développement polynomial, par exemple 982 est représenté par les idéogrammes successifs : 9, 10^2, 8, 10, 2. Sans l'écriture des puissances de dix, on retombe sur une numération de position. En effet, la numération de position cache en quelque sorte les puissances de 10.

Dans chaque tige, le boulier chinois possède deux quinaires (qui valent chacune cinq) et cinq unaires (qui valent chacune un). Chaque tige représente une position du système décimal : unités, dizaines, centaines, etc. en partant de la droite vers la gauche. La position zéro s'obtient lorsque les boules sont vers le cadre extérieur : celles du haut en haut et celles du bas en bas. Pour marquer un nombre on ramène les boules vers le cadre intérieur afin de déplacer les unaires et les quinaires en même temps. Il est inscrit 90 135 sur le boulier ci-dessous. On remarquera que la décomposition polynomiale de ce nombre est : $90\,135 = 9\times10^4 + 0\times10^3 + 1\times10^2 + 3\times10^1 + 5\times10^0$.



9 0 1 3 5

Pour mieux comprendre le principe du boulier, regardons l'exemple suivant. Comment lire ce nombre écrit sur le boulier ? Comment écrire autrement 13 dizaines ? Combien de possibilités a-t-on sur le boulier chinois ?



5 7 1 13 2

Dans les dizaines de mille, on peut échanger les cinq unaires contre une quinaire. Ensuite 13 dizaines c'est 130, on peut donc remonter les deux quinaires des dizaines et monter une unaire des centaines. Le résultat se lit alors : 57 232.

Remarque sur les symboles écrits et les noms oraux des nombres et des chiffres en français :

Les symboles que l'on utilise pour écrire les nombres sont très réguliers, on utilise dix symboles de 0 à 9 (les chiffres) que l'on combine pour écrire tous les nombres.

Les noms des nombres en français sont eux beaucoup moins réguliers. On a nécessairement dix noms différents de 0 à 9, un nom pour 10, 10^2, 10^3, etc. mais on ne les combine pas toujours pour nommer un nombre.

En effet, les noms : zéro, un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, cent, mille, million, milliard sont nécessaires. Ensuite pour nommer 11, on emploie onze à la place de dix-un qui, lui, est régulier, de même douze pour dix-deux, treize pour dix-trois, quatorze pour dix-quatre, quinze pour dix-cinq, seize pour dix-six puis dix-sept est à nouveau régulier. De 11 à 16, des noms spécifiques sont utilisés alors que l'on pourrait combiner les noms des chiffres. De 17 à 19 c'est régulier. Et puis pour 20, à nouveau on emploie vingt pour deux-dix, trente pour trois-dix, quarante pour quatre-dix, cinquante pour cinq-dix, soixante pour six-dix, soixante-dix pour sept-dix, quatre-vint pour huit-dix et quatre-vingt-dix pour neuf-dix. D'ailleurs, les septante, octante et nonante sont plus proches de la régularité que les combinaisons françaises. Pour 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 c'est irrégulier. Ensuite on a le 100, cent, deux cents (ou deux-cent)… on ne précise pas que pour le premier il n'y a qu'un cent : un-cent, ce que font les Anglo-saxons avec one-hundred. De même avec 1000, mille, deux mille (ou deux-mille)… on ne précise pas un-mille comme one-thousand. D'ailleurs pour 10 aussi on pourrait préciser un-dix (ce qui n'est pas non plus le cas chez les Anglo-saxons).

Quelle est la définition d'un dictionnaire pour les chiffres et les nombres ?

De zéro à seize on trouve des définitions de la forme " vient après tel chiffre ou nombre ". De zéro à dix, la construction est bien celle-là. Mais pour la suite, d'un point de vue mathématique, onze c'est un après dix (dix-un, $10+1=1\times10^1+1\times10^0$), douze c'est deux après dix (dix-deux, $10+2=1\times10^1+2\times10^0$), etc. jusqu'à seize. Ensuite, les nombres réguliers ne sont pas mentionnés dans le dictionnaire. De 20 à 60 c'est 2×10, 3×10, … 6×10. Ensuite, on a notre fameux soixante-dix, très irrégulier qui est 60+10. Le dictionnaire ne fait pas cette remarque et donne directement la définition 7×10. C'est pareil pour quatre-vingts et quatre-vingt-dix construits respectivement sur 4×20 et 4×20+10 et la définition est 8×10 et 9×10. En conclusion, la distinction entre symboles écrits (en base 10) et noms parlés n'est pas claire dans un dictionnaire courant.

Avec l'analyse de l'apprentissage des grands nombres en primaire, Mercier (1997) a montré que ce problème relevant de la langue concerne l'articulation entre des savoirs mathématiques et des savoirs sociaux et que ce point est presque ignoré en classe.

2. L'étude du boulier chinois comme situation de recherche

Certains ouvrages scolaires de mathématiques, souvent pour le CE2, traitent du boulier comme instrument pour compter. Ces bouliers se composent alors de dix boules par tige, de différentes couleurs, et sont plus ou moins adéquats pour l'enseignement nous semble-t-il. Balacheff et Neyret (1981 et 1982)[1] ont étudié le boulier chinois en explicitant en particulier la base alternée (5,2) pour l'écriture, l'addition et la soustraction.

Pour nous, l'enjeu est d'approfondir la notion de numération positionnelle en base dix et de retravailler les algorithmes de calcul avec le boulier chinois. Pour cela, nous proposons d'étudier le boulier chinois comme situation de recherche. Par situation de recherche[2], nous pointons l'importance d'une question de départ, facile d'accès et comportant des stratégies de résolution variées dont la résolution n'est pas immédiate. Nous insistons aussi sur l'étude du lien entre les techniques habituelles de calcul et la diversité de celles disponibles avec le boulier.

Nous présentons trois[3] situations de recherche, avec les trois questions de recherche suivantes : *Comment ça marche ? Peut-on enlever des boules ? Peut-on changer la valeur des boules ?*

---

[1]Balacheff, N. & Neyret, R. (1981). Bouliers et écriture des nombres au CM. *Grand N*, 25, 39-81.

Balacheff, N. & Neyret, R. (1982). Bouliers et opérations au CM. *Grand N*, 28, 67-87.

[2] Grenier, D. & Payan, C. (2003). Situations de recherche en "classe", essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques.* Éd ARDM, 189-203. (Disponible sur www-leibniz.imag.fr/LesCahiers, *Les cahiers de laboratoire Leibniz*, 92). Sur la définition d'une situation de recherche, voir aussi le Chapitre 5 de la thèse.

[3] Dans le texte complet de la thèse, une 4ème situation est proposée. Le boulier devient un support pour se poser de nouvelles questions qui aboutissent en particulier à un questionnement sur les bases de numération.

Nous précisons que pour la lecture qui suit, il est souhaitable de se munir d'un boulier chinois. On considère un boulier chinois (ou suan-pan) à treize tiges, les boules du haut correspondent aux rangées de deux boules et celles du bas à celles de cinq boules. En haut, on a 26 boules (13×2) et 65 en bas (13×5). Le boulier permet en particulier d'écrire, d'additionner, de soustraire des nombres d'une manière très rapide quand on maîtrise son utilisation.

2.1 Situation 1 : Le boulier, comment ça marche ?

Le boulier est considéré comme un support d'activité en mathématiques, l'utilisation montrée ici n'est pas celle d'une utilisation courante, machinale comme c'est le cas lorsqu'on apprend à l'utiliser en Chine ou au Japon, depuis l'enfance. Le but est de comprendre pourquoi un tel objet est efficace pour faire des calculs et non pas d'apprendre par cœur les règles de son utilisation. En fin de primaire, la notion de numération positionnelle est souvent mal installée et constitue un obstacle concernant l'apprentissage des techniques opératoires. L'étude du boulier permet de remonter au sens mathématique en se posant des questions sur l'écriture des nombres, la notion de position d'un chiffre dans un nombre, sur la définition des retenues…

L'exploration du boulier doit être large au début, elle nécessite du temps : deux ou trois heures au cycle 3. La confrontation finale des opinions permettra de se mettre d'accord sur une méthode.

- Question de recherche

Comment ça marche ? Le boulier est un instrument à calculer c'est-à-dire qu'il facilite les calculs. Il faut essayer d'imaginer comment on peut l'utiliser. D'après nos observations, la consigne de départ peut aussi être : Écrivez un nombre sur le boulier. La grande majorité des élèves commence quand même par écrire un, deux, trois… De plus, la question peut aussi se décliner : *Comment on compte ?* ou *Comment on calcule ?* sans affecter notablement les recherches des élèves. Effectivement, en mathématiques, compter et calculer ce n'est pas la même chose : compter c'est dénombrer et calculer c'est faire des opérations. Par contre, dans le sens commun ou dans un dictionnaire, compter se définit comme :

> " Déterminer le nombre, la quantité en procédant à un calcul. Effectuer un calcul, énoncer la suite des nombres "

Et calculer comme :

> " Déterminer par le calcul. Opérer sur des nombres "

Compter, c'est faire des comptes c'est-à-dire des additions, des multiplications, donc faire des calculs, calculer. Le sens courant de calculer et compter est trop proche pour que ce soit une variable de poids dans le choix de stratégie pour répondre à la question. Ceci a bien été confirmé par nos observations de classe. C'est quoi compter pour vous ? Question posée à une classe de 4$^{\text{ème}}$, deux élèves ont répondu : " Faire des additions ! Et des multiplications aussi ! " Par contre, ce qui fausserait complètement la recherche c'est de donner un nombre à inscrire : écrire 5 123. Cela suppose que l'on peut écrire ce nombre et ce n'est alors plus du tout la même étude.

- Choix des variables

Le niveau de la classe est au moins CM1. L'enjeu est une réorganisation des connaissances relatives à la numération et aux algorithmes de calcul avec la mise en relation des techniques avec le boulier et des techniques papier–crayon. La compréhension du système de numération positionnelle n'est pas évidente. D'ailleurs, si l’on regarde à l’échelle de l’histoire, la numération romaine non positionnelle a survécu longtemps (jusqu’au 18ème siècle pour les comptes publics en France) mais elle nécessitait l’usage de jetons pour réaliser des calculs. Une numération positionnelle est avantageuse pour effectuer des *calculs à la plume*, pour s’en convaincre on pourra calculer XXV+IX. Combien d’unités, de dizaines ? L’étude du boulier permet de reconstruire ce concept de numération positionnelle en base dix.

- À propos des élèves

Cette recherche permet de souligner deux points :

- un chiffre n’a pas la même valeur selon sa position sur le boulier (système positionnel en base dix), c’est-à-dire qu’un chiffre ne représente pas la même quantité selon sa position,
- et certaines boules ne valent pas un mais cinq, elles marquent cinq.

Le passage de ces deux étapes est nécessaire pour répondre à la question.

On voit apparaître deux stratégies. Pour la majorité, la méthode est d’écrire, de dénombrer tous les nombres : un, deux, trois, quatre, cinq. Jusqu’à cinq ça va. Pour la suite il faudra se donner des règles d’utilisation. Pour d’autres, la méthode est d’écrire directement un nombre, ceci est beaucoup moins courant. Nous avons observé, au fil des séances avec des enfants et des adultes, que choisir par soi-même un exemple que l’on va tester n’est pas spontané mais relève d’un raisonnement particulier (que les professeurs de mathématiques ont mieux maîtrisé lors des séances). Avec cette seconde stratégie, certains élèves proposent de donner la valeur 100 aux boules de la partie supérieure et un à celles de la partie inférieure. Ils peuvent alors inscrire 922 mais il est impossible d’inscrire 77. En effet, la partie inférieure ne possède que 65 boules ! On voit aussi apparaître des procédés *multiplicatifs à trous* : les boules ont différentes valeurs et on les multiplie entre elles pour fabriquer d’autres nombres, mais certains nombres ne peuvent pas apparaître par multiplication : les nombres premiers !

Concernant l’écriture des nombres, certains élèves commencent et continuent longtemps avec la méthode suivante : pour écrire sept, ils dénombrent : un, deux, trois, quatre, cinq et cinq unaires s’échangent contre une quinaire puis six, sept. Penser sept comme cinq plus deux est une méthode très rapide pour inscrire un nombre mais pas obligatoire. Il n’est donc pas indispensable de connaître les décompositions des nombres entre cinq et dix par rapport à cinq, c'est-à-dire : 6=5+1, 7=5+2, 8=5+3, 9=5+4 pour écrire un nombre. Bien sûr, comme pour le calcul mental, utiliser ces décompositions simplifie la tâche !

Remarque :

Le boulier chinois, utilisé depuis des siècles sert à effectuer des calculs : additions, soustractions, multiplications, divisions, extractions de racines. À l’inverse des bouliers-compteurs des écoles qui possèdent dix boules par tiges et qui sont utilisés pour apprendre à compter, le boulier chinois possède des marqueurs de cinq qui en font indéniablement un instrument de calcul, pour calculer. Lors des séances observées, le comptage est apparu, pour certains élèves, comme une méthode pour trouver le mode de fonctionnement du boulier, pour inscrire un nombre qui puisse par la suite servir dans des opérations. Mais, la manière d’écrire un nombre, de le coder sur le boulier chinois ou en numération positionnelle est directement liée à l’objectif d’utilisation d’un algorithme de calcul. C’est aussi le cas pour le calcul mental, que l’on peut rapprocher des techniques avec le boulier chinois.

- Évolution de la séance

Maintenant, étudions les différentes étapes du raisonnement susceptibles d'apparaître lors de telles séances. Les points clefs sont le système décimal positionnel et la valeur de cinq pour certaines boules. Ce raisonnement comporte trois étapes : avant que le système positionnel en base dix ne soit installé sur le boulier, une fois que celui-ci est admis mais avant que le système unaires-quinaires ne le soit, et enfin lorsque ces deux points sont posés.

Pré-système décimal positionnel	**Post-système décimal positionnel** **Pré unaires-quinaires**	**Post-système décimal positionnel et unaires-quinaires**
- Unités et dizaines avec des processus : additif ou additif-soustractif (avec ou sans trous)ou multiplicatif (à trous) - Base 65	- En haut, on note les retenues - Les boules du haut valent deux (on garde un en bas)	- Écrire à gauche - Écrire à gauche en commençant par la puissance de dix la plus petite

Tableau 1 : Étapes du raisonnement pour arriver à l'utilisation du boulier chinois

Notons que généralement, la position choisie par quelqu'un qui découvre le boulier pour marquer le zéro sur celui-ci est de pousser les unaires vers la barre inférieure et les quinaires vers la barre transversale. Mais la position usuelle c'est-à-dire en poussant les quinaires vers la barre supérieure permet de déplacer en même temps unaires et quinaires pour les calculs ce qui représente un remarquable gain de temps… L'idée que l'on déplace des boules pour inscrire un nombre est intuitive.

- Unités et dizaines avec un processus additif :

Lors des mises en situation, les enfants commencent généralement par penser que le boulier est séparé en deux, en haut on a les dizaines et en bas les unités ce qui signifie que l'on accorde un comme valeur en bas et dix en haut (parfois cinq), puis on ajoute les boules entre elles. Le nombre maximal alors inscriptible est 325 (65+26×10=325). Pour permettre à la recherche de continuer, il est nécessaire de montrer le point faible, la limite en demandant d'écrire 9 253 par exemple. La méthode proposée doit être invalidée pour recevoir d'autres propositions. Certains trouvent une astuce pour compter plus loin : on marque les dizaines en bas et les unités en haut. On arrive à 676 (65×10+26=676), mais on ne peut toujours pas inscrire 9 253.

- Unités et dizaines avec un processus additif-soustractif :

D'autres procédés peuvent être imaginés avec les boules du haut qui valent dix et celles du bas un. Ces dernières possèdent deux positions de déplacement, si elles sont contre la barre on les soustrait, si elles sont en milieu de tige, on les additionne. On pense sept comme 10-3 et 13 comme 10+3. On écrit jusqu'à 25 dans une tige et 325 (25×13=325) au plus. Outre le fait que l'on n'écrit pas des grands nombres, ce système trop compliqué est source d'erreurs pour le demi-déplacement, il s'éteindra face à d'autres propositions plus adaptées. Dans ce procédé on n'a pas de trous car le raisonnement a été guidé par un dénombrement. Par contre, lorsque celui-ci amène directement à écrire un nombre, n'importe lequel, on arrive à des procédés à trous, c'est-à-dire qu'il manque des nombres. Par exemple, en haut une boule compte 100 et un en bas. Lorsqu'on déplace des boules en bas à droite on soustrait et en bas à gauche on ajoute. Pour écrire 1 731 on n'a pas de problème, mais pour écrire sept ? 7=100−93, mais on n'a que 65 boules en bas.

- Unités et dizaines avec un processus multiplicatif (à trous) :

Quand la méthode est toujours d'essayer d'écrire un nombre sans tous les dénombrer, on voit aussi apparaître un système à trous mais multiplicatif. On effectue le produit de la valeur des boules. Avec celles du bas on écrit un, deux, trois, quatre, cinq et avec celles du haut : 1×2=2, 2×2=4, 2×3=6, 2×4=8, 2×5=10. Et sept ? Et neuf ? Avec cette méthode, il manquera les nombres premiers qui ne s'obtiennent pas comme produit de deux entiers.

- Base 65 :

Si on part de la remarque : en bas, on a 65 boules, mais comment inscrire un nombre plus grand ? Et bien, pour compter plus loin, on va marquer 65 avec une boule en haut et ainsi pouvoir à nouveau utiliser les boules du bas. On a l'idée essentielle qu'en haut, ce sont des *boules témoins* qui gardent en mémoire une certaine valeur. On écrit jusqu'à 1 755 (26×65+65=1 755), mais par exemple pour écrire 1 721, qui est déjà donné en base 10, on a besoin de le décomposer en multiples de 65…

- Numération de position en base dix :

Avec la nécessité de la base dix vient celle d'écrire de zéro à neuf (au moins) dans chaque rang. En première analyse, on peut penser qu'il est nécessaire d'écrire jusqu'à dix, mais ce ne sont que les dix chiffres de zéro à neuf qui sont indispensables. Arrêtons-nous sur une remarque importante. Nous avons choisi de travailler sur le boulier chinois car on peut inscrire jusqu'à 15 dans une colonne, ce qui permet lors des additions et des soustractions de bien voir le passage des retenues. Par contre, lors de la découverte le fait qu'il y ait trop de boules en quelque sorte, peut constituer un obstacle. Il pourra être utile de faire remarquer que le boulier japonais possède moins de boules mais fonctionne exactement sur le même principe. Revenons sur le boulier chinois, l'idée qui peut apparaître, en cherchant à écrire jusqu'à dix c'est de regarder uniquement la partie inférieure du boulier et de regrouper deux tiges pour avoir dix et utiliser un système positionnel. Les deux tiges à l'extrémité droite représentent les unités, les deux autres immédiatement à gauche les dizaines, etc. À partir de là, on a gagné l'écriture positionnelle, mais on doit pouvoir encore l'améliorer, il faut prendre en compte la partie supérieure du boulier.

- En haut, on note les retenues :

En haut, on note les retenues, mais quelles sont les retenues possibles ? Pour l'addition ? Et pour la multiplication ? Cette idée est très intéressante dans le sens où elle ouvre sur d'autres questions qui ont été en particulier la clef de la mécanisation du calcul. Pour l'addition de deux nombres la retenue maximale est un (9+9=18) et pour la multiplication de deux nombres c'est huit (9×9=81). On n'a pas alors la nécessité d'avoir 26 boules en haut.

- Les boules du haut valent deux (on garde un en bas) :

Si on revient à l'idée d'écrire jusqu'à neuf dans un rang, peut-on donner deux comme valeur aux boules du haut ? On construit donc des nombres pairs et impairs. Cette méthode marche aussi bien que les valeurs cinq et un ! En fait, le boulier chinois fonctionne parfaitement si en gardant un pour les boules du bas, on donne aux boules du haut la valeur deux ou trois ou quatre ou six. On peut aussi donner la valeur un à celles du haut et deux ou trois à celles du bas. La faille est que l'écriture et la lecture des nombres sont moins rapides. Le choix d'une boule qui vaut cinq s'explique parce que l'œil arrive à dénombrer quatre boules, mais ensuite ce n'est plus possible rapidement. Notons que le boulier japonais est une amélioration du boulier chinois, il ne possède qu'une quinaire et quatre unaires et fonctionne sur le même principe. Il peut aussi fonctionner avec un pour la boule du haut et deux pour celle du bas. Maintenant l'écriture positionnelle en base dix avec des marqueurs de cinq est acquise, mais il reste encore quelques détails à mentionner.

- Écrire à gauche :

L'idée que l'on voit aussi arriver, c'est que comme sur une feuille de papier ou avec un logiciel de traitement de texte, on commence par écrire à gauche. Par exemple, on colle 127 à gauche, mais alors comment écrire 1 270 ? L'inscription du zéro a de l'importance et pour lire les nombres de gauche à droite, il faut les coller contre l'extrémité droite.

- Écrire à gauche en commençant par la puissance de dix la plus petite :

Aussi, il n'est pas rare de voir quelqu'un écrire un nombre en commençant par la gauche, mais en collant les unités à gauche c'est-à-dire que l'inscription : 9 / 5 / 2 se lit 259. Ce système est tout à fait correct. Si on décompose 259, on a : $259 = 2\times10^2+5\times10+9 = 9+5\times10+2\times10^2$.

Avec ce raisonnement, on inscrit un nombre en commençant par la plus petite puissance de dix, comme c'est d'ailleurs souvent le cas avec les polynômes : $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. La seule objection est que l'on écrit à l'envers sur le boulier par rapport à la méthode traditionnelle. C'est pour cette raison que l'on choisira la convention de coller les unités à droite.

Cette analyse reprend donc différents points importants du raisonnement mathématique pour parvenir à l'utilisation traditionnelle du suan-pan.

Reste une question à étudier : quel est le plus grand nombre inscriptible sur le boulier chinois ? 9 999 999 999 999 ou 16 666 666 666 665 ? Dans un premier temps, on peut réduire le problème (comme c'est souvent nécessaire en mathématiques) c'est-à-dire étudier un boulier à six tiges par exemple. Avec le soroban, la réponse ne donne pas lieu au débat car on n'écrit pas au-delà de neuf dans une colonne. Sur le boulier chinois, on inscrit jusqu'à quinze dans une colonne, quel est le nombre inscrit lorsque toutes les boules sont activées dans les treize tiges ? C'est :

$15 + 150 + 1\,500 +\ldots+15\times10^{12}$

$= 15\times(1 + 10 + 100 +\ldots+10^{12})$

$= 15\times1\,111\,111\,111\,111$

$= 16\,666\,666\,666\,665$. Ce nombre se lit 16 trillons 666 milliards 666 millions 666 mille 665.

Ce nombre est écrit en base dix. Et, comme il est possible d'inscrire jusqu'à 15 dans chaque tige du boulier chinois, il est nécessaire d'utiliser une théorie mathématique pour écrire ce nombre en système décimal sur le papier.

Une fois l'écriture des nombres admise pour les élèves, on pourra poursuivre l'étude du boulier de la même manière : *Comment faire une addition ? Une soustraction ? Une multiplication ?* Les techniques papier-crayon et boulier sont étudiées ci-après (paragraphes 5 et 6).

2.2 Situation 2 : Peut-on enlever des boules ?

Dans ces situations, chacun doit manier un boulier chinois (suan-pan). Lorsque que l'on veut étudier le boulier japonais (soroban), on demande d'imaginer que l'on enlève une boule en haut et une boule en bas. C'est-à-dire que la règle du jeu ne permet pas de déplacer la boule tout en haut et celle tout en bas.

- Question de recherche

À propos du nombre minimal de boules par tige pour écrire en base dix, la question de départ peut se formuler de deux manières : *Combien peut-on enlever de boules au maximum par tige pour pouvoir calculer à la manière traditionnelle ?* Mais aussi : *Peut-on avoir une écriture unique de tous les nombres en base dix ?* Ce qui équivaut à la question : *Si on enlève deux boules par tige, est-ce que l'on peut encore calculer ?* Mais la question est alors trop fermée et ce n'est plus une situation de recherche.

- Choix des variables

Le fonctionnement du boulier est supposé maîtrisé par chacun. Le niveau de la classe est au moins CM1. C'est un travail sur la numération positionnelle et la nécessité de pouvoir inscrire les nombres de zéro à neuf par tige pour travailler en base dix. C'est aussi plus généralement un travail sur les bases que l'on propose en élargissant la question à d'autres bases.

- Une réponse possible

Dans chaque tige le boulier chinois possède deux quinaires et cinq unaires, ce qui permet d'écrire jusqu'à 15 par tige. Par exemple : 12 peut s'écrire 12 unités mais mieux : une dizaine et deux unités.

Si on garde deux quinaires, à partir de trois unaires (ou moins) on perd des chiffres, même chose si avec une quinaire on ne garde que trois unaires (ou moins). Dans ces cas-là, le boulier ne pourra plus s'utiliser en base dix.

Il apparaît donc trois cas pour lesquels le boulier s'utilise avec des boules manquantes : soit deux quinaires et quatre unaires, soit une quinaire avec cinq ou quatre unaires.

Regardons quel est le nombre maximum que l'on doit pouvoir écrire dans une tige pour compter en base dix. La première idée est souvent dix ! Mais en fait, il suffit de pouvoir écrire de zéro jusqu'à neuf. En plus si chaque nombre s'inscrit de manière unique on a obtenu l'unicité d'écriture pour tous les nombres. Et ainsi, on (re)découvre le boulier japonais qui possède une quinaire et quatre unaires. C'est une amélioration du boulier chinois qui s'est produite tout d'abord au Japon mais qui actuellement tend à se répandre en Chine.

Nombre de boules		**Écriture encore possible**	**Écriture impossible**	**Écriture devenant unique**	**Utilisation du boulier**
Quinaires	**Unaires**				
2	4	De 0 à 14	15	5 et 10	oui
2	3	0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13	4, 9, 14, 15	5 et 10	non
1	5	De 0 à 10 (5 s'écrit de deux manières)	De 11 à 15	10	oui
1	4	De 0 à 9	De 10 à 15	5	oui
1	3	0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8	De 9 à 15	5	non

Tableau 2 : Peut-on enlever des boules ?

Remarquons qu'avec le boulier chinois on pourrait compter jusqu'en base 16 puisque l'on peut écrire de zéro à 15 dans une tige. L'intérêt de pouvoir inscrire plus que nécessaire dans une tige c'est que l'on peut effectuer le passage des retenues, à la main et le visualiser.

Apprendre à utiliser un soroban est plus laborieux mais pour un expert, les calculs se font plus rapidement que sur le suan-pan. Ce nouveau boulier pour lequel chaque nombre s'écrit de manière unique donne un exemple de fonctionnement optimum, d'optimisation.

2.3 Situation 3 : Peut-on changer la valeur des boules ?

- Question de recherche

Quelles valeurs peut-on donner aux boules pour que l'on puisse écrire tous les nombres (toujours en base dix) ?

- Choix des variables

Comme pour la situation 2 : Le fonctionnement du boulier est supposé maîtrisé par chacun. Le niveau de la classe est au moins CM1. C'est un travail sur la numération positionnelle et la nécessité de pouvoir inscrire les nombres de zéro à neuf par tige pour travailler en base dix. C'est aussi plus généralement un travail sur les bases que l'on propose en élargissant la question à d'autres bases.

- Une réponse possible

On peut étudier tout d'abord le suan-pan puis le soroban. Une fois que l'on a trouvé des solutions, on peut se poser des questions sur ses propriétés : *Quel est le nombre maximum inscriptible dans une tige ? Qu'en est-il de l'unicité d'écriture suivant la méthode ?*

L'idée que les boules valent un ou deux repose sur la formation de nombres pairs et impairs, on écrit tous les nombres pairs avec les boules du bas et on écrit les impairs en ajoutant une boule du haut. L'idée est bonne mais on se heurte au manque de rapidité d'écriture, de lecture et de tous les calculs. On voit la pertinence d'une boule qui marque cinq en système décimal. En plus sur le boulier chinois habituel, on peut faire le passage *à la main* de la retenue. En fait, la méthode avec les boules du haut qui valent un et celles du bas deux est plus appropriée avec le boulier japonais. En effet, avec le boulier chinois les deux boules du haut forment aussi des nombres pairs ce qui produit des nombres dont l'écriture n'est pas unique mais sans intérêt pour faciliter les calculs.

	Valeur des boules du haut	**Valeur des boules du bas**	**Nombre maximum inscriptible**	**Écriture non unique**
Suan-pan	6	1	17	-
	5	1	15	5 et 10
	4	1	13	4, 5, 8
	3	1	11	3, 4, 5, 6, 7, 8
	2	1	9	2, 3, 4, 5
	1	2	12	2, 4, 6, 8, 10
Soroban	5	1	9	-
	1	2	9	-

Tableau 3 : Peut-on changer la valeur des boules ?

Et si toutes les boules valent deux, quels sont les nombres que l'on ne peut pas inscrire ? Ce sont les nombres impairs bien sûr !

Ensuite, sur le suan-pan on peut essayer d'éliminer le doublon du cinq (cinq unaires ou une quinaire) en donnant la valeur six aux boules de la partie supérieure on peut alors écrire jusqu'à 17 par tige donc utiliser le boulier en base 18, ce qui n'a pas grand intérêt pour nos calculs en système décimal… Cette méthode ne s'applique pas au soroban qui, lui, n'inscrit cinq que d'une manière, avec une quinaire.

Par contre si on change la valeur des boules supérieures en leur accordant la valeur trois par exemple, on peut écrire tous les chiffres de zéro à neuf sans problème sur chaque tige. Ce que l'on remarque c'est qu'un plus grand nombre de chiffres s'écrivent de plusieurs manières. Par exemple trois se représente par 1+1+1 avec les boules du bas ou par une boule en haut. De même, 4=1+1+1+1=3+1,

5=1+1+1+1+1=3+1+1,
6=3+1+1+1=3+3,
7=3+1+1+1+1=3+3+1
Et 8=3+1+1+1+1+1=3+3+1+1.

Avec ce système on inscrit jusqu'à 11 par tige c'est-à-dire que l'on peut l'utiliser pour un système en base 12.

Lors des expérimentations, des propositions qui donnaient différentes valeurs aux boules d'un même cadre ont été émises. Par exemple, certains enfants ont proposé de donner un, puis deux, puis trois, puis quatre, puis cinq comme valeur aux boules sur une tige (du cadre inférieur). Notre choix a été de rejeter cette proposition rapidement car la lecture nous semble alors trop difficile. Toutefois, c'est une piste que le professeur peut laisser ouverte jusqu'à ce qu'elle soit invalidée par la classe.

3. Une remarque importante : la non-unicité d'écriture

Pour aborder ce point, étudions les différentes manières d'inscrire dix. On peut l'écrire comme une dizaine et zéro unité ou comme dix unités (deux quinaires ou une quinaire et cinq unaires). On a donc trois possibilités de codage pour ce même nombre. En classe de mathématiques, on rencontre une situation similaire avec les fractions que l'on apprend à écrire de façon irréductible. On a bien plusieurs manières pour écrire un même nombre : $\frac{10}{2} = 5$ ou $\frac{18}{12} = \frac{3}{2}$. C'est aussi le cas des radicaux $\sqrt{18} = 2\sqrt{3}$ et des entiers, 0,9999… = 1 !

De plus, une opération du type $1\,038 - 55$, montre que comme en algèbre, sur le boulier il est parfois nécessaire de décomposer une écriture pour arriver au résultat. Par exemple il faut parfois passer par $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ c'est-à-dire l'inverse de la factorisation pour trouver un résultat.

À ce propos : *Quelles sont les équivalences qui existent lorsque l'on code un nombre sur le boulier chinois ?*

Une tige comporte sept boules : les deux quinaires qui possèdent trois positions possibles (aucune ou une ou deux activées) et les cinq unaires qui possèdent six positions (aucune ou une ou deux ou trois ou quatre ou cinq activées). On a donc un total de 18 (six fois trois) possibilités de codages sur une tige, mais il existe des équivalences d'écriture. Regardons ces équivalences.

Notons le couple $(a,b)_i$ avec a=0 ou 1 ou 2 et b= 0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5, c'est-à-dire a est le nombre de quinaires et b le nombre d'unaires que l'on peut activer, sur une tige $i \in \mathbb{N}$.

On a les équivalences suivantes :

- Sur une même tige : $(0,5)_i \equiv (1,0)_i$ et $(2,0)_i \equiv (1,5)_i$.
- Et aussi : $(0,0)_{i+1}\ (2,b)_i \equiv (0,1)_{i+1}\ (0,b)_i$ pour b=0, 1, 2, 3, 4, 5.

Que l'on peut aussi énoncer :

- $(5 \text{ unaires})_i = (1 \text{ quinaire})_i$
- $(1 \text{ quinaires et } 5 \text{ unaires})_i = (2 \text{ quinaires})_i$
- $(2 \text{ quinaires})_i = (1 \text{ unaire})_{i+1}$

De plus, comme on a huit équivalences, 18−8=10, et on a bien les 10 chiffres (de 0 à 9) que l'on peut coder sur une tige du boulier.

Remarque :

Le boulier japonais (ou soroban) ne possède que quatre unaires et une quinaire par tige, ce qui permet d'écrire tous les nombres de manière unique en base dix. Alors, neuf doigts auraient suffi à faire émerger le système décimal…

4. L'addition puis la soustraction sur le boulier chinois

Ces opérations s'effectuent par-dessus, on ne garde pas de trace des calculs intermédiaires. On lit directement le résultat. Avec le boulier, on voit le passage des retenues car on l'effectue à la main. Par exemple, le passage de dix dizaines en une centaine se fait par l'échange de dix dans la tige des dizaines avec une dans celle des centaines. Le boulier comporte une très bonne gestion des retenues. On peut commencer une opération par la gauche pour avoir un ordre de grandeur du résultat, sans avoir de soucis de retenue. Les nombres sont inscrits (ou codés) et cette inscription est dynamique, ce qui est impossible avec papier et crayon.

- L'addition

On peut l'écrire de deux manières :

$$\begin{array}{cccc} & 7 & 8 & 5 \\ + & 1 & 6 & 3 \\ \hline & 8 & \mathbf{14} & 8 \\ \hline & 9 & 4 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 7 & 8 & 5 \\ + & 1 & 6 & 3 \\ \hline & & & 8 \\ + & 1 & 4 & 0 \\ + & 8 & 0 & 0 \\ \hline & 9 & 4 & 8 \end{array}$$

Peut-on réaliser 12,56 + 34,129 ? Oui, il est alors nécessaire d'établir une convention pour placer les unités, par exemple la quatrième tige en partant de la droite, ce qui laisse trois chiffres inscriptibles après la virgule. On peut donc aussi travailler avec les décimaux sur le boulier.

- La soustraction

Pour la soustraction, regardons de plus près deux algorithmes que l'on enseigne en classes de primaire.

Technique 1 :

Tout d'abord, la technique habituelle ou par ajouts parallèles se présente de la manière suivante :

$$\begin{array}{rccc} & 9 & \mathbf{10}+3 & 3 \\ - & \mathbf{+1} & 5 & 1 \\ \hline & 8 & 8 & 2 \end{array}$$

On dit à l’oral : " Cinq pour aller à trois, c’est impossible, je pose un et j’abaisse un ". On réalise le calcul : 933−51=(933+100)−(51+100) en prenant soin d’écrire 100 comme dix dizaines puis comme une centaine. On utilise d’une part que : a − b=(a+x) − (b+x) c'est-à-dire que l’on peut additionner (ou soustraire) un même nombre aux deux termes d’une soustraction, le résultat sera le même. Et d’autre part, une propriété du système positionnel à base dix : 10 unités = 1 dizaine, 10 dizaines = 1 centaine, etc. Le (+10) des dizaines ne s’écrit pas, on rajoute un devant le trois qui donne bien 13=10+3.

Technique 2 :

La deuxième technique s’appelle technique des échanges ou de transfert interne. Elle n’est pas totalement absente de la classe, mais elle est beaucoup moins répandue que la première. Elle peut servir d’introduction au cours élémentaire pour la technique habituelle.

$$\begin{array}{rccc} & \cancel{9}\,\mathbf{8} & \mathbf{10}+3 & 3 \\ - & & 5 & 1 \\ \hline & 8 & 8 & 2 \end{array}$$

Ici, on prend dans une colonne pour mettre dans une autre. On peut dire : " Cinq pour aller à trois, je ne peux pas. Je prends une centaine de 900 que j’écris dans les dizaines sous la forme de dix dizaines. "On décompose : 933 = 800+130+3 et 51 = 50+1, ainsi : 933−51 = 800+130−50+3−1 = 800+80+2 = 882. On utilise ici seulement la propriété du système positionnel décimal qui permet de faire des échanges entre les colonnes.

Avec le boulier, la technique habituelle ne se transpose pas. Par contre il permet de bien mettre en pratique la méthode des échanges. Cette méthode a l’avantage de bien montrer les propriétés du système de numération positionnelle en base 10 qui, lorsqu’il est mal ou pas compris par les élèves, crée un obstacle supplémentaire pour se familiariser avec les techniques opératoires. Le boulier semble donc un support adéquat pour faire un lien entre la numération et les opérations. Pour calculer 933−51 sur le boulier : pour enlever un c’est comme avec le papier/crayon, c’est immédiat, mais il reste à enlever 50 de 932. On abaisse une unaire des centaines que l’on remplace en abaissant les deux quinaires des dizaines. Dans la tige des dizaines, on en a 13, desquelles on peut maintenant enlever cinq dizaines et obtenir le résultat. Le passage d’une centaine à dix dizaines se fait *à la main*.

5. La multiplication sur le boulier chinois

La méthode classique s’écrit sur une feuille :

$$\begin{array}{rccc} & & 3 & 7 & \\ \times & & & 5 & \cancel{3} \\ \hline & 1 & 8 & 5 & \end{array}$$

On dit à l’oral ou dans sa tête : " Cinq fois sept : 35. Je pose cinq et je retiens trois. Cinq fois trois : 15 et 3 : 18. "

$$\begin{array}{rcccl} & & 3 & 7 & \\ \times & & & 5 & \\ \hline & & 3 & 5 & 5\times 7 \\ + & 1 & 5 & 0 & 5\times 30 \\ \hline & 1 & 8 & 5 & \end{array}$$

Avec le boulier, le calcul se décompose de telle manière que l’on n’a pas de retenue (le " je retiens trois " de précédemment). Ce qui est intéressant avec cette méthode, c’est que l’on voit mieux le décalage, on remonte au sens mathématique. Pour écrire la seconde ligne, on se place dans la tige des dizaines, on laisse la tige des unités vide car on va multiplier cinq unités par trois dizaines.

Mais, pas de miracle avec le boulier, il faut connaître ses tables !

6. Une progression pour la classe

Nous nous plaçons dans le cas où la découverte et la fabrication des instruments sont terminées. Nous proposons ici une progression, c'est-à-dire quelques exercices, pour l'étude du boulier, des réglettes à multiplier et de la règle à calcul. L'enjeu est d'aboutir à une institutionnalisation par le professeur.

- Inscrire et lire : 0, 3, 5, 7, 10, 17, 218, 500, 1 728, 5 399. On remarquera que l'on a deux possibilités pour inscrire cinq, et trois pour inscrire dix. On pourra se mettre d'accord sur une écriture économique c'est-à-dire qui déplace le moins de boules possible.
- Effectuer les additions suivantes : 17+2, 132+12, 240+17, 17+5, 25+8, 1 728+27, 629+3, 3 902+825, 12,56+34,129.

Réponses :

17+2=19

132+12=144

240+17=257 (cinq unaires = une quinaire)

17+5=22 (retenue : dix unités = une dizaine)

25+8=33 (retenue)

1 728+27=1855 (retenue, on peut utiliser l'astuce 27=30−3)

629+3=632 (retenue, dans les unités l'équivalence est à effectuer pendant le calcul ou on utilise que 3=5−2)

3 902+825=4 727 (retenue, on a 17 centaines ce qui est impossible à inscrire, on doit donc effectuer l'équivalence en cours d'addition ou utiliser que 800=1 000−200

12,56+34,129=46,689.

- Effectuer les soustractions suivantes : 534−21, 825−3, 163−81, 1 038−55, 800−99.

Réponses :

534−21=513

825−3=822(cinq unaires = une quinaire)

163−81=82 (retenue, une centaine = dix dizaines ou −80 = −100+20)

1 038−55=983 (retenue, un millier = dix centaines et une centaine = dix dizaines)

800−99=701 (−99 = −100+1)

- Effectuer les multiplications suivantes : 37×25, 561×37, 123×109, 172×49.

Réponses :

			5	6	1	
×				3	7	
					7	7×1
+			4	2	0	7×60
+		3	5	0	0	7×500
+				3	0	30×1
+		1	8	0	0	30×60
+	1	5	0	0	0	30×500
	2	0	7	5	7	

La gestion des retenues peut se réaliser en fin de calcul si c'est possible (on peut inscrire jusqu'à 15 par tige) ou bien au fur et à mesure.

37×25=925

561×37=20 757. Nous rappelons ci-contre la décomposition pour ce calcul.

123×109=13 407

172×49=8 428.

7. Quelques pistes pour poursuivre

- Les divisions

On peut envisager d'effectuer des divisions sur le boulier. En utilisant l'algorithme traditionnel de la division euclidienne, on effectue les soustractions sur le boulier.

- Les racines carrées

Prenons un exemple pour extraire une racine carrée avec le boulier. Comment effectuer $\sqrt{25}$ avec le boulier ? On peut utiliser la propriété que la somme des n premiers nombres impairs est égale à n², c'est-à-dire : $\sum_{i=0}^{n-1}(2i+1)=n^2$. Cette formule peut se démontrer (par récurrence) en classe de Terminale. Dans cet exemple : $1+3+5+7+9=25=5^2$. Pour ce calcul, sur le boulier on effectuera des soustractions successives en notant le nombre des soustractions effectuées (la partie gauche du boulier sert à comptabiliser le nombre de soustractions) :

25−1=24, on inscrit une boule à gauche. Total de soustractions = 1

24−3=21, on rajoute une boule à gauche. Total = 2.

21−5=16, total = 3.

16−7= 9, total = 4.

9−9=0, total = 5. Le résultat est un nombre entier et c'est 5.

- Les nombres négatifs

On utilise les nombres négatifs pour les soustractions dont le résultat est négatif, ce qui peut bien sûr se produire pour des comptes marchands. Pour cela on utilise les nombres complémentaires. Sur un boulier japonais leur lecture est facile, ce sont les boules qui ne sont pas activées plus un. Le complément de six par rapport à dix est quatre. Pour effectuer 3−7, les étapes intermédiaires sont : 3+10=13 puis 13−7=6 et 6−10= −4.

- Dans une autre base

Pour les grandeurs qui ne suivent pas le système métrique, on les écrit sur le boulier en laissant une ou deux colonnes entre chaque subdivision si nécessaire. Les conversions s'effectuent selon les méthodes de la multiplication et de la division. Pour une utilisation avec des enfants du primaire, les calculs avec les heures, minutes, secondes sont bien adaptés.