La fabrication et l'étude d'instruments à calculer

Caroline Poisard
Université d'Auckland, Nouvelle-Zélande
poisard@math.auckland.ac.nz

Les textes et documents suivants sont basés sur un mémoire de thèse en didactique des mathématiques :

Poisard, C. (2005). *Ateliers de fabrication et d'étude d'objets mathématiques, le cas des instruments à calculer*. Université de Provence, Aix-Marseille I. http://tel.ccsd.cnrs.fr/tel-00011850

Nous présentons ici d'une part, une synthèse de la thèse, dont le texte complet est téléchargeable en ligne, et d'autre part, des fiches et modèles.

Synthèse

Notre préoccupation est de comprendre comment et pourquoi l'Homme a inventé des machines pour l'aider à calculer. La question de départ, qui peut être formulée en classe, est : *Pourquoi utilisons-nous aujourd'hui des calculettes en classe ? Comment faisait-on avant leur invention ?*

Le mémoire s'organise en cinq chapitres :

- Le premier chapitre étudie le monde de la culture scientifique et technique, en particulier les associations, centres et musées qui développent la culture mathématique. Ce chapitre présente des clefs pour qu'une sortie scolaire soit bénéfique. Le paragraphe 2 présente les musées pour lesquels une sortie scolaire en mathématiques est envisageable.
- Le chapitre 2 est plus théorique. Il soulève la question de l'expérimental en mathématiques. Notre point de vue est que les instruments à calculer doivent être considérés comme des *objets mathématiques* par le professeur, afin que leur étude en classe soit pertinente. Nous avons choisi le mot *étude* des instruments plutôt qu'*utilisation* pour montrer notre préoccupation mathématique et historique.
- Les exemples que nous étudions sont : le boulier chinois, les bâtons de Néper, les réglettes de Genaille-Lucas et la règle à calcul. Le chapitre 3 situe ces instruments à calculer au niveau historique et présente leur mode de fonctionnement, avec des modèles pour fabriquer les bâtons et la règle à calcul. Il propose une progression d'étude pour la classe. La définition de la retenue, notion importante pour la mécanisation du calcul, est présentée ici.
- Le chapitre 4 constitue l'analyse des observations menées dans un centre d'animation. La fabrication est un moment important de l'apprentissage pour les enfants qui se sentent valorisés par la réalisation d'œuvres personnelles. L'étude des instruments soulève des questions mathématiques riches de sens autant pour les élèves que pour la formation des enseignants, en particulier concernant la numération positionnelle, les algorithmes de calcul et la retenue.
- Le chapitre 5 étudie de manière générale la notion de *situation de recherche en classe* et donne l'exemple de l'étude du boulier chinois comme situation de recherche. Les situations 1 à 3 sont des analyses des séances reproductibles en classe dès le primaire. La situation 4 est plus adaptée pour la formation des enseignants.

Fiche 1 : Une histoire des instruments et machines à calculer

1. Introduction

La particularité ici est que l'histoire de la mécanisation du calcul est au carrefour de l'histoire des techniques et de celle des mathématiques, avec les concepts et priorités de chaque domaine.

Afin d'éviter toute ambiguïté sur le vocabulaire que nous employons, nous nous référons à la classification (en histoire des techniques) de Marguin (1994) sur les instruments et machines à calculer. Pour l'auteur, les tables de comptes, jetons et bouliers sont considérés comme des *instruments primitifs* ; les bâtons et réglettes ainsi que les additionneurs rectilignes sont des *instruments arithmétiques*. Viennent ensuite les *machines arithmétiques* : additionneuses, inscripteurs, multiplicatrices… Les machines se distinguent des instruments par leur automatisation de la retenue. C'est cette charnière entre l'opération humaine du report de la retenue et son automatisation que nous allons particulièrement explorer.

De plus, l'auteur distingue :

> " - les *instruments et machines numériques* qui, par définition traitent de nombres entiers et dont la précision dépend uniquement du nombre de digits pris en compte ;
> - les *instruments et machines analogiques* basés sur des mesures de grandeurs continues, géométriques (longueurs, angles, etc.) ou physiques (force, poids, etc.) et dont les résultats ne sont qu'approchés.
> Ensuite, sont introduites les notions d'*instrument* et de *machine*, puis d'autres critères comme la nature des opérations effectuées (addition et multiplication) et enfin des caractères anatomiques (type de reporteur ou d'entraîneur) et morphologiques (forme rectangulaire ou circulaire).
> On obtient ainsi une classification arborescente.
> À cette classification méthodique, il manque la perspective du temps. " (Marguin, 1994, p 198)

Reprenons une chronologie sur les instruments et machines à calculer en privilégiant ceux qui nous intéressent particulièrement : le boulier, les bâtons à multiplier, et la règle à calcul.

2. L'évolution des instruments pour calculer

2.1 Les outils naturels

" Le plus ancien auxiliaire de calcul est la main, origine probable de la numération décimale " (Marguin, 1994, p 17). Le calcul digital (avec les dix doigts de la main) permet de représenter un nombre et il remplace le calcul mental. Ensuite viennent des *outils naturels* c'est-à-dire des cailloux et des bâtons. Le mot calcul provient du latin *calculus* qui désigne un petit caillou. Ces outils, utilisés pour dénombrer du bétail ou tenir des comptes sont à l'origine du calcul médiéval aux jetons, des abaques et des bouliers. Ils ont vraisemblablement favorisé l'apparition de la numération écrite, en Mésopotamie au troisième millénaire avant notre ère.

Dès la plus haute Antiquité, des *outils spécialement fabriqués* pour la manipulation des nombres sont mis au point : des entailles dans des tiges de bois ou des os, ce procédé pourrait avoir donné naissance à la numération romaine : V, X, M peuvent être représentés par des entailles croisées. Citons aussi plus tard, les nœuds sur des cordes : les *Quipus* des Incas, au 15ème siècle.

Les *premiers instruments* de calcul sont l'abaque, le calcul aux jetons et le boulier. L'abaque à poussière avec un stylet date de l'Antiquité et l'abaque avec des cailloux date, pour le plus ancien retrouvé, du 4ème siècle avant J.-C. Quant à l'abaque portatif romain fabriqué avec des rainures et des boutons liés à l'abaque, il n'est pas impossible qu'il soit " à l'origine des bouliers russes et persans, puis asiatiques, puis chinois et japonais " (Schärlig, 2001). Ensuite, au Moyen-Âge, le calcul aux jetons (proche du calcul avec un boulier) sera très utilisé par les commerçants en Europe occidentale jusqu'à la fin du 18ème siècle. Celui-ci coexistera plusieurs siècles avec le calcul écrit qui se répand en Europe à la fin du 19ème siècle.

Une autre méthode employée par les Babyloniens et les Égyptiens pour faciliter les calculs, était de constituer des *tables* pour répertorier les calculs usuels afin de ne pas les effectuer à chaque utilisation.

2.2 Le boulier

Avant l'apparition du boulier, les Chinois utilisaient des baguettes à calculer vraisemblablement positionnées sur des tables de compte (Martzloff, 1987). Les plus anciens manuels chinois dans lesquels figurent des indications sur les techniques de calcul datent du premier millénaire avant notre ère. Les calculs s'effectuent avec les baguettes à calculer et se commencent par l'unité d'ordre le plus élevé, ce qui permet d'avoir rapidement un ordre de grandeur du résultat, mais cette technique pose problème pour reporter des retenues… Il semble évident que cet instrument, qui ne permet pas un report facile des retenues n'a pas pu se développer. Les règles de calcul mises au point pour les baguettes s'utilisent aussi sur le boulier (divisions, extraction de racines...) sur lequel il est aussi nécessaire de connaître les tables de multiplication pour effectuer des calculs.

Le boulier est formé d'un cadre et de boules fixées sur des tiges, ce qui permet une utilisation aisée. Il forme un objet complet pour le calcul depuis le 12ème siècle en Chine. À la fin du 16ème siècle, les mathématiques chinoises " se réduisaient à presque rien, à peine plus que le calcul au boulier ", et " aux 17ème et 18ème siècles, rien ne pouvait être mis en parallèle avec les progrès révolutionnaires dont la science européenne était le théâtre " (Martzloff, 1987). En fait, d'importants travaux mathématiques datant du 2ème siècle avant J.-C. n'ont été redécouverts qu'à partir du dernier quart du 18ème siècle en Chine (puis dès le début du 19ème en Europe). En Chine, au milieu du 15ème siècle, le boulier, l'instrument des marchands remplace progressivement les baguettes à calculer.

La région Centre-Ouest est un terrain favorable à l'apparition du boulier car elle forme un carrefour commercial et novateur important à cette époque. Le boulier japonais semble être apparu au 15ème siècle (au Japon) mais il ne se popularisera que deux siècles plus tard et coexistera jusqu'à la fin du 19ème siècle avec le boulier chinois. C'est donc à cette période que la pratique du boulier au Japon devient exclusivement celle du soroban. Aujourd'hui, même la Chine s'initie au soroban. En Chine et au Japon, les techniques du boulier sont enseignées à l'école encore de nos jours.

Actuellement, trois types de bouliers sont d'usage courant : le stchoty russe (dix boules par tiges avec les cinquièmes et sixièmes d'une couleur différente), le suan-pan chinois (sept boules réparties sur deux rangées) et le soroban japonais (cinq boules triangulaires réparties sur deux rangées).

Les calculs avec le boulier pour un utilisateur expert s'effectuent très rapidement, parfois même plus rapidement qu'avec une calculatrice :

> " On estime généralement que le calcul mental basé sur l'utilisation du boulier est deux fois plus rapide que le calcul à la main au boulier qui est lui-même plus rapide, après un certain entraînement, que le calcul sur machine électronique pour l'addition et la soustraction. Avec un entraînement plus poussé, la multiplication devient elle-même plus rapide sur boulier ; pour la division, tout dépend de la précision souhaitée " (Cumin et Hossenlopp, 1994, p 61).

Marguin (1994) présente le boulier comme " le premier véritable instrument de calcul autonome et portatif " (p 23). Il poursuit en remarquant que " les techniques et doigtés des bouliers orientaux sont encore systématiquement enseignés aux écoliers. Les automatismes gestuels, acquis dès le plus jeune âge, déchargent le calculateur de toute réflexion et font de ces instruments des aides efficaces et sûres " (p 25). L'utilisation du boulier devient donc machinale, automatique. Il nous paraît donc possible de nommer *machine* l'ensemble formé par un boulier et un utilisateur averti. La frontière entre machine et instrument est poreuse. Du moins il est possible de considérer le boulier comme un instrument et c'est là que l'utilisateur semble pouvoir réaliser un apprentissage : visionner une écriture décimale, effectuer un calcul, vérifier avec le calcul mental. Il nous faut donc distinguer le *boulier-instrument* qui est un instrument d'acquisition du calcul et le *boulier-machine* qui est une machine arithmétique.

2.3 Les additionneuses

Dans la lignée des bouliers, on trouve les additionneuses. Celles-ci juxtaposent des échelles graduées (rectilignes ou circulaires), coulissant sous des lucarnes. La plus ancienne additionneuse (Caze, 1720) est composée de réglettes mobiles que l'on déplace avec un stylet mais aucun dispositif de retenues n'est prévu. En 1847, Kummer munit " la partie supérieure des rainures où coulissent les réglettes, d'une crosse qui permet, sans lever le stylet, de faire avancer d'un cran la réglette d'ordre supérieur. Le report manuel devenait si naturel qu'il supprime la nécessité d'un report mécanique " (Marguin, 1994, p 27). Là aussi la limite entre instrument et machine se rétrécit, la retenue devient un réflexe de la main et le couple *additionneuse-utilisateur* se confond dans la définition de la machine arithmétique.

L'additionneuse à crosse inspirera nombre d'inventions, des additionneuses de poche (Addiator, Addimax, Tasco…) seront fabriquées jusque dans les années 1960. L'additionneuse est d'usage simple pour réaliser des additions et des soustractions, mais moins pertinente pour les multiplications et divisions.

2.4 Les réglettes à multiplier

Souvent utilisés en complément de l'additionneuse, les bâtons ou réglettes de Néper sont bien plus efficaces pour effectuer des multiplications. Le mathématicien écossais John Néper (Napier, en anglais) publie en 1617 *Rhabdologia* dans lequel il explique un " procédé original de multiplication basé sur une représentation de la table de Pythagore ". (Marguin, 1994, p 30). En effet, chaque bâton correspond à une table de multiplication inscrite dans des cases où l'on sépare par une diagonale le chiffre des dizaines et celui des unités. Pour effectuer une multiplication, on additionne les chiffres, diagonale par diagonale, mais le report des retenues doit être réalisé par le calculateur. Les bâtons de Néper sont donc des *instruments* qui nécessitent des connaissances mathématiques pour effectuer les calculs intermédiaires, ou du moins la connaissance de certaines règles. Ces réglettes seront d'usage par la suite sous forme de cylindres et de disques en Europe jusqu'à la moitié du $19^{ème}$ siècle.

Notons brièvement que les réglettes de Néper sont aussi (potentiellement) un outil de travail disponible pour les techniciens astronomes chinois au milieu du $17^{ème}$ siècle. En effet, les missionnaires jésuites implantés en Chine depuis la fin du $16^{ème}$ siècle ont traduit en chinois des résultats d'astronomie (mouvements célestes, éclipses…) et de mathématiques en particulier la présentation d'instruments à calculer : réglettes de Néper, compas de proportion de Galilée, tables numériques, formules trigonométriques planes et sphériques. Le résultat est regroupé dans *Le Livre calendérique de l'ère Chongzhen* (1630-1635).

Diverses améliorations des bâtons de Néper sont recensées, mais la plus pertinente est celle d'Henri Genaille et de ses réglettes multiplicatrices mises au point en 1885. Nous parlerons des réglettes multiplicatrices de Genaille-Lucas car la question de fabriquer des réglettes a été posée par Édouard Lucas et la réponse apportée par Henri Genaille. La lecture est ici directe, par un jeu de triangles qui guident l'œil et aucune addition intermédiaire n'est nécessaire. On approche donc ici la définition de la machine arithmétique. Ces réglettes commercialisées par Belin, connurent un franc succès jusque dans les années 1910. Genaille imagina divers instruments comme les réglettes multisectrices pour la division (aidé pour la conception du mathématicien français Lucas), des réglettes financières, des appareils arithmétiques ainsi qu'une machine à calculer électrique (qu'il ne construira jamais).

Précisons qu'à l'interrogation de la banque de données de la collection du Musée des Arts et Métiers à Paris [1], on obtient 36 objets dont l'auteur est Henri Genaille et 102 pour Édouard Lucas (par auteur, on entend : auteur intellectuel ou matériel ou origine de l'œuvre). Cette remarque permet de mieux estimer l'imagination et le talent de Genaille et de Lucas… Pour Néper, la recherche donne 25 objets (pour certains objets les trois auteurs sont cités simultanément).

2.5 Le point de vue du mathématicien français : Édouard Lucas (fin $19^{ème}$)

Pour ce paragraphe, nous nous référons à des sources primaires, les textes originaux de Lucas. En effet, il nous est paru intéressant de présenter quelques passages où Lucas donne son avis sur les bâtons de Néper et ceux de Genaille, ainsi que sur le boulier.

Tout d'abord, reprenons une brève biographie de Lucas (1842-1891), exposée dans Chabert (1994) :

> " Élève de l'École Normale d'Amiens, Lucas est ensuite employé comme assistant à l'Observatoire de Paris. Après avoir été officier durant la guerre avec la Prusse, il enseigne à Paris au Lycée au Lycée Saint-Louis et au Lycée Charlemagne. En théorie des nombres, les recherches de Lucas portent sur les tests de primalité et les problèmes de factorisation : en 1876, il montre que le nombre de Mersenne ($2^{127}-1$) est premier. Lucas effectue quelques recherches originales sur l'arithmétisation des fonctions elliptiques et les suites de Fibonacci. Ses *Récréations mathématiques* sont un classique du genre. " (Chabert, 1994)

[1] http://cugnot.cnam.fr:8000/simmam/internet.html

Comme nous allons le voir ci-après, Lucas témoigne de préoccupations certaines concernant l'enseignement des mathématiques et en particulier celui de l'arithmétique.

Dans ses *Récréations mathématiques* (1885), Lucas reprend une Conférence donnée en 1884 au Congrès de *L'association française pour l'avancement des Sciences,* sur le calcul et les machines à calculer[2] (p 27 à 84). Il commence par rappeler les bienfaits du calcul mental dont il ne faut toutefois pas abuser :

> " Il ne faudrait pas laisser se développer outre mesure, chez les enfants, cette faculté du calcul mental ; mais il est bon, pourtant, de la leur faire acquérir dans le jeune âge. Elle se conserve plus tard et facilite beaucoup l'étude de toutes les sciences. Les plus grands mathématiciens ne l'ont point dédaignée […]. " (Lucas, 1885, p 30)

Il poursuit en présentant, en particulier, un *boulier universel* qui ressemble à un damier de dix cases par dix cases numérotées de zéro à neuf et en unités, dizaines… Le principe est le même que celui des additionneuses. En effet, le raisonnement est le même mais tout est manuel. Pour Lucas, cet instrument est particulièrement adapté à l'enseignement de l'arithmétique :

> " Élevons successivement les pions à la droite en disant : un, deux, trois, quatre, …, neuf. Nous voici au sommet de la colonne de droite, nous ne pouvons continuer ; remettons ce pion à zéro dans sa colonne et élevons d'un rang le pion de la seconde colonne à droite ; nous disons dix. Puis nous recommençons à droite, en comptant dix-un, dix-deux,… , dix-neuf. Arrêtés de nouveau nous abaissons à zéro, et nous élevons d'un rang le deuxième pion à droite, pour marquer vingt et ainsi de suite. On écrit ainsi tous les nombres avec une notation analogue à celle des notes de musique. " (Lucas, 1885, p 51)

Il présente ensuite les bâtons de Néper (explications et schéma) et conclut que " la multiplication se trouve ramenée à l'addition ; la division, sans tâtonnements, à la soustraction, et ces opérations sont d'autant plus facilitées qu'il s'agit de nombres plus grands. " (p 77)

Il qualifiera quelques années plus tard la méthode de Néper " d'ingénieuse méthode de calcul pour simplifier la multiplication et la division. " (Lucas, 1891, p 30)

Il expose ensuite la méthode de fabrication des réglettes et précise que " pour l'enseignement, on les appuie sur un tableau muni d'une rangée de clous sur la ligne horizontale supérieure ; on peut y suspendre des planchettes, préalablement percées d'une ouverture à la partie supérieure " (Lucas, 1891, p 30). L'idée d'un enseignement du calcul avec des instruments n'est donc pas nouvelle, Lucas la préconisait déjà à la fin du 19ème siècle !

Bien sûr, Lucas vante ensuite les mérites des réglettes de Genaille :

> " La manœuvre […] est aussi facile que celle qui consiste à suivre un chemin à travers un labyrinthe, au moyen de mains indicatrices dessinées sur des poteaux placés aux carrefours. ". […] " Vous avez dans ces deux boîtes les produits partiels de tous les nombres jusqu'à vingt chiffres ; or, si l'on voulait cataloguer tous ces résultats dans des volumes de 1 000 pages à 100 lignes à la page, il faudrait pour contenir ces volumes une centaine de millions de bibliothèques comme la

[2] Dans cette Conférence, Lucas présente aussi les principes du jeu de la Tour de Hanoi. (p 55 à 57)

Bibliothèque Nationale, en supposant qu'elle renferme 10 millions de volumes ! C'est là toute l'économie de ce système. " (Lucas, 1885, p 82).

Ou encore dans son ouvrage de 1891 :

> " Mais nous devons signaler surtout les réglettes de Genaille qui donnent sans aucune addition tous les produits partiels.
> Nous avons publié à la librairie Belin, à Paris en 1885, en collaboration avec M. Genaille, quatre boîtes de réglettes pour la simplification des calculs, à savoir :
> Les *Réglettes multiplicatrices*, appareils à calculs exacts et instantanés pour simplifier la multiplication et la division.
> Les *Réglettes multisectrices*, appareils à calculs exacts et instantanés pour simplifier la division.
> Les *Réglettes financières* pour simplifier les calculs financiers et commerciaux.
> Les *Réglettes néperiennes*, joujoux calculateurs ayant pour but de simplifier l'étude et de faciliter la pratique des opérations de l'Arithmétique.
> Depuis quelques années, M. Genaille a su résoudre, d'une manière simple et complète, le problème difficile de la multiplication et de la division des grands nombres par une méthode absolument géométrique ; mais ses admirables appareils sont encore inédits. " (Lucas, 1891, p 31)

Pour Lucas, ces réglettes sont résolument un moyen de *simplifier* (mot employé à six reprises dans le passage précédent) les calculs. Notons que pour ce mathématicien, la multiplication et la division des grands nombres sont qualifiées de " problème difficile ". L'évolution de la représentation de ces opérations a donc été fulgurante en un siècle, grâce bien sûr à la généralisation des calculettes et des ordinateurs.

3. La mécanisation du calcul

Pour comprendre l'histoire des machines à calculer, il est nécessaire de visualiser en parallèle les évolutions du machinisme et de la numération.

On retrouve les premières machines en Grèce Antique, au 4ème siècle avant J.-C., ce sont des machines de forces : " machines de levage et machines de guerre, à base de vis, engrenages, poulies et leviers " (Marguin, 1994, p 39). À peu près à la même époque, à Alexandrie, des machines dites *abstraites* sont déjà connues : clepsydres, orgues, machines théâtrales, automates. Elles fonctionnent sur des principes hydrauliques et pneumatiques ; mais il faudra attendre le haut Moyen Âge pour que les moulins à eau et à vent se répandent dans les campagnes.

Le machinisme trouvera un fort essor à la Renaissance avec en particulier les horloges mécaniques qui apparaîtront à la fin du 13ème siècle, ce qui signifie que les matériaux et les techniques de formage et d'assemblage sont maîtrisés pour réaliser de véritables chefs-d'œuvre. D'ailleurs, on peut considérer que dès ce moment-là, il existe un moyen de calcul en base 60. C'est le principe de l'horloge que de comptabiliser les secondes, de les regrouper en minutes au bout de 60, ensuite au bout de 60 minutes on a une heure. C'est une machine à calculer qui ne mesure que le temps.

La mécanisation du calcul (tout comme le calcul écrit) n'est possible que grâce à l'utilisation d'une numération de position où " chaque chiffre occupe une place qui correspond à son ordre décimal, l'absence de chiffre étant marquée par le chiffre zéro. " (Marguin, 1994, p 40). " L'idée de fractions décimales est très ancienne, mais celles-ci ont longtemps coexisté avec d'autres fractions, fondamentalement non décimales, comme les quantièmes égyptiens ou comme les persistantes fractions sexagésimales " (Chabert et alii, 1994, p 45). Pour utiliser systématiquement des fractions décimales il a fallu, auparavant, que s'installe une numération décimale et positionnelle.

En Chine antique, un système d'unité à variation majoritairement décimale fut mis en place au 3ème siècle avant J.-C., lors de l'unification des poids et mesures. Mais l'apparition des fractions décimales nécessitait des bases théoriques solides :

> " Il fallait, en particulier, que le sens concret (longueur, volume, poids, etc.) initialement attaché aux diverses unités de mesure soit dépassé, et que ces unités deviennent en quelque sorte de purs marqueurs décimaux positionnels sans signification concrète particulière. Il fallait aussi, plus tard, que ces marqueurs disparaissent pour laisser place à la notion de nombre plus abstraite, indépendante de tout système d'unités. […] La maîtrise des fractions décimales fut pleinement acquise à partir du 13ème siècle, et dès lors, un auteur comme Qin Jishao, l'inventeur du théorème des restes chinois, utilisait à volonté les fractions décimales. " (Chabert et alii, 1994, p 45)

Il nous faut donc préciser que Simon Stévin n'est pas l'inventeur des fractions décimales, celles-ci existaient depuis longtemps ; en revanche il a introduit une écriture décimale permettant de se " libérer de la manipulation des fractions " comme il le précise dans son ouvrage : *La Disme* (le Dixième) en 1585. L'ambition de ce texte est d'éliminer les nombres rompus (c'est-à-dire les fractions) et d'effectuer selon " une arithmétique inventée par la dixième progression, tout compte se rencontrant aux affaires des hommes astrologues, arpenteurs, mesureurs de tapisseries, graveurs, stéréomètres en général, maîtres de monnaie et à tous les marchands. "

Ainsi, lorsque la première machine arithmétique est inventée au début du 17ème siècle, cela faisait deux siècles que les connaissances nécessaires à sa réalisation étaient connues… Pour Marguin (1994), à cette époque il existe une distinction claire et établie entre l'arithmétique, propre à la pensée humaine et la mécanique :

> " Seuls des esprits hors du commun pouvaient s'affranchir de ces catégories et transgresser le tabou pour s'aventurer dans la simulation mécanique d'un processus mental. Car il s'agissait bien de faire réaliser par une machine une opération de l'esprit, encore inaccessible au plus grand nombre." (Marguin, 1994, p 42).

Sur ce point, notre opinion est qu'il ne faut pas sous-estimer la connaissance mathématique nécessaire à la réalisation d'une machine. L'utilisation d'un système de numération positionnelle est indispensable, ainsi que la compréhension des algorithmes de calcul, en particulier la notion de retenue. Les questions du type : *Peut-on prévoir la retenue ? Comment la gérer et l'écrire ?* doivent être élucidées pour mécaniser les calculs[3]. À une époque où les chiffres romains et les tables à jetons sont encore utilisés, il fallait faire preuve d'un très haut niveau mathématique pour mécaniser les calculs. À cela, il fallait bien sûr ajouter un environnement où les compétences techniques étaient disponibles.

---

[3] Voir le chapitre 3, paragraphe 4 de la thèse pour l'étude mathématique de la notion de retenue.

Les premières machines seront réalisées par des savants, théologiens, mathématiciens, astronomes ou philosophes : Schickard (1623), Pascal (1642) et Leibniz (1673). Nous sommes bien ici en présence de machines, qui automatisent le système de report des retenues. Celles-ci réalisent des multiplications sur le principe des additions successives, pour la multiplication directe c'est le Français Léon Bollée en 1889 qui aura l'idée " d'un mécanisme qui effectue la multiplication sans passer par des additions répétées " (Marguin, 1994, p31), son mécanisme repose sur une plaque de Pythagore et des tiges de longueurs différentes. La première machine à divisions directes : la Madas verra le jour en Suisse en 1908.

Le 19ème siècle et la révolution industrielle marquent le début de l'ère de la productivité, du rendement, du gain. La première machine à calculer qui répond à ces contraintes est l'Arithmomètre du français Thomas de Colmar (1820). Son succès commercial lui valut d'être imitée dans le monde entier mais elle ne rentra en concurrence avec d'autres inventions qu'à la fin du 19ème siècle (Odhner en Suède, Felt et Tarrant en Amérique). De multiples idées de mécanismes nouveaux verront le jour, en particulier l'anglais Babbage avec sa machine analytique (1840).

La machine à calculer devient *calculatrice* dès le début du 20ème siècle et se fabrique en série dans des usines disposant de l'énergie électrique (dès 1910). Le développement de l'industrie et du commerce va nécessiter des outils adaptés pour tenir les comptes des entreprises. La concurrence est rude et quantité de modèles seront fabriqués aussi bien mécaniques qu'électriques (à partir de 1920). La première calculatrice mécanique portative : la Curta surnommée le moulin à café date de 1948. Les calculatrices mécaniques régneront dans les bureaux jusque dans les années 1975. La calculatrice devient *calculette* (électronique) en 1961.

Il est trop rapide et inexact d'affirmer que l'ordinateur descend des machines à calculer mécaniques. Ces dernières ont une fonctionnalité bien plus réduite que l'ordinateur qui traite des informations multiples. Cependant, remarquons que trois idées : la programmation, le branchement conditionnel et le calcul binaire sont présentes dans le principe de l'ordinateur et proviennent des machines analytiques (Babbage, Torrès) pour les deux premiers, et de la formalisation du raisonnement (Leibniz, Boole) pour le dernier.

Remarque sur les instruments et les machines analogiques :

L'exposé précédent se focalise sur les machines arithmétiques dont le principe repose sur les nombres entiers (instruments numériques), celles-ci sont adaptées aux calculs comptables stricts et précis. Pour manipuler des grandeurs arrondies, les instruments analogiques, qui traitent des valeurs continues sont plus appropriés. Pour des calculs logarithmiques ou trigonométriques, les ingénieurs et physiciens ont utilisé la fameuse *règle à calcul* et cela jusque très récemment.

La graduation en échelle logarithmique a été imaginée en 1620 par Günter alors que Néper n'avait inventé les logarithmes que six ans auparavant. Quelques années plus tard l'idée de joindre deux règles coulissantes et un curseur (Partridge, 1657) donna sa forme à la règle à calcul dont l'usage se répandit en France à partir de 1815 ; on peut donc estimer sa longévité à plus de deux siècles et demi. Des variantes existent sur des cylindres.

Planimètres, intégraphes et analyseurs harmoniques sont aussi des instruments analogiques. Les machines algébriques (analogiques) permettent de calculer des fonctions quelconques et de résoudre des équations.

En conclusion, reprenons les dates qui illustrent notre étude, au carrefour de l'histoire des instruments à calculer et de la numération en base dix.

Fin 13ème siècle : Horloges mécaniques
15ème siècle : Numération et calcul indiens connus mais non répandus en Europe
1585 : *La Disme* de Stévin (puissances négatives)
17ème siècle : Machines arithmétiques (1623 Schickard, 1642 Pascal, 1673 Leibniz)
1745 : *Arithmétique par les jetons* de Le Gendre
1948 : La Curta, première machine à calculer mécanique portative

4. Références

AYME, N. (1997). Le boulier chinois. *Actes du colloque* : *L'Océan Indien, au carrefour des mathématiques arabes, chinoises, européennes et indiennes*. Saint Denis : IUFM de La Réunion. www.reunion.iufm.fr/Dep/mathematiques/Seminaires/ActesKol.html

BARBIN, E. & LE GOFF, J.-P. (2000). *Si le nombre m'était conté…* Paris : Ellipses.

CHABERT, J.-L., BARBIN, E., GUILLEMOT, M., & al (1994). *Histoires d'algorithmes : du caillou à la puce.* Paris : Belin.

CHARBONNIER, R. (2002). *Si les nombres m'étaient contés…* Clermont Ferrand : IREM.

CHARBONNIER, R. (2004). *La route des chiffres.* Clermont Ferrand : IREM.

CUMIN, J. & HOSSENLOPP, J. (1994). *Le boulier : initiation.* Paris : Chiron.

CUMIN, J. & HOSSENLOPP, J. (1998). *Le boulier : perfectionnement.* Paris : Chiron.

GUITEL, G. (1975). *Histoire comparée des numérations écrites*. Paris : Flammarion.

HÉBERT, E. (Dir.). (2004). *Instruments scientifiques à travers l'histoire.* Paris : Ellipses.

IFRAH, G. (1981). *Histoire universelle des chiffres*. Paris : Robert Laffont.

LUCAS, É. (1885, rééd 1979). *Récréations mathématiques III.* Paris : Albert Blanchard. gallica.bnf.fr

LUCAS, É. (1891, rééd 1991). *Théorie des nombres*. Paris : Gauthier Villars. gallica.bnf.fr

MARGUIN, J. (1994). *Histoire des instruments et machines à calculer : trois siècles de mécanique pensante, 1642-1942*. Paris : Hermann.

MARTZLOFF, J.-C. (1987). *Histoire des mathématiques chinoises*. Paris : Masson.

PLANE, H. & LE GOFF, J.-P. (2000). Sur les opérations. In BARBIN E. & LE GOFF J.-P. (2000). *Si le nombre m'était conté…* Paris : Ellipses. 91-108.

SHÄRLIG, A. (2001). *Compter avec des cailloux*. Lausanne : Presses Polytechniques Universitaires Romandes.

STÉVIN, S., (1585 rééd 1980). *La Disme*. Paris : IREM.

Fiche 2 : La fabrication des instruments à calculer

1. L'étude et la fabrication

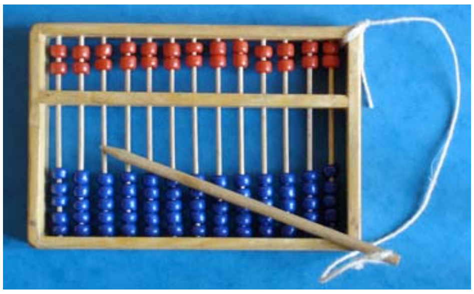
Nous proposons les trois phases suivantes : de découverte, de fabrication et d'étude.

- *Phase de découverte* : Avant de fabriquer les objets, le professeur distribue un instrument par groupe et pose la question de son mode de fonctionnement. La question de recherche est : *Comment ça marche ?* Ceci permet à chacun de manier les objets avant de les fabriquer, c'est une phase introductive qui va permettre de préparer la phase de fabrication. Certaines questions importantes apparaissent dès cette première phase, le professeur peut les valider en leur donnant le statut de question à traiter, mais il ne doit pas donner de réponses. Cette phase est assez courte (10-15 minutes) et nécessite une interruption volontaire, parfois même déterminée, du professeur qui va laisser les élèves sans réponses.
- *Phase de fabrication* : Chaque élève étudie comment réaliser son objet, le fabrique et le personnalise. Le temps de fabrication constitue un moment important de l'apprentissage où les enfants sont fortement valorisés par la réalisation d'une œuvre personnelle. De plus, ces objets matériels constituent une trace de ce qui a été appris. Ils permettent aux enfants de montrer aux parents le travail réalisé. Le cahier permet aussi de valoriser l'apprentissage, de le montrer. Mais un objet matériel, fait-main par l'enfant, que l'on peut garder plusieurs années, entreposé sur l'étagère de sa chambre possède un effet démonstrateur bien supérieur.
- *Phase d'étude* : Maintenant que chacun possède son instrument, on reprend la question de recherche. *Comment et pourquoi ça marche ?* Pour étudier les instruments il est préférable, voire nécessaire, d'avoir un instrument par enfant. Il est important de travailler par groupes de deux, trois ou quatre afin de tester et de confronter les opinions. Mais, il faut aussi que chaque élève puisse suivre convenablement l'institutionnalisation par le professeur, nous conseillons donc d'accoler les tables par quatre et de former un épi orienté vers le tableau.

Pour que les élèves et le professeur puissent montrer à la classe les différentes méthodes envisagées, nous recommandons l'utilisation d'un rétroprojecteur. Pour le boulier, on le pose directement dessus. Pour les bâtons à multiplier et la règle à calcul, les modèles (en fichiers à télécharger) permettent de réaliser des transparents que l'on découpe et que l'on peut ensuite manipuler sur le rétroprojecteur.

2. La fabrication du boulier chinois

Matériel nécessaire pour la construction d'un boulier chinois



- Cinq baguettes en bois de hauteur 0,5 cm et de largeur. 2 cm. Pour la longueur : deux de 10 cm et trois de 14 cm.
- Treize tiges en bois (ou rondins) de 2 mm de diamètre que l'on peut trouver dans les magasins de modélisme, pour enfiler des perles.
- 91 perles, 26 (2×13) pour la partie supérieure et 65 (5×13) pour la partie inférieure.
- Colle à bois, serre-joints…

Argumentation sur nos choix

Nous avons choisi de construire un petit boulier c'est-à-dire de 14 cm par 10 cm. Ceux que l'on trouve en commerce mesurent au moins 25 cm par 12 cm. Ces bouliers " modèle réduit " présentent l'avantage d'un coût moindre, mais le problème est que les petites perles ne se déplacent pas facilement. On a donc rajouté un stylet pour que l'utilisation soit possible avec des doigts d'adulte ! Il faut donc bien noter dès à présent que la construction de ce boulier se fait dans l'objectif d'une activité en mathématiques et non dans les règles de l'art pratiquées en Asie. Le boulier chinois tel qu'on le connaît actuellement est le résultat de diverses évolutions, en particulier la taille et la forme du cadre, ainsi que le matériau des boules sont pensés pour que le déplacement soit le plus rapide possible. Pour écrire, on claque les boules vers la barre centrale, en un seul geste. Il va de soi que l'introduction d'un stylet ne va pas du tout dans ce sens. Notre objectif est que chaque enfant puisse construire un boulier pour qu'il soit le prétexte d'une réflexion sur la numération, le système positionnel décimal, les techniques opératoires, etc. Le boulier a donc été adapté à nos contraintes et à nos objectifs.

Le deuxième choix fait à propos du boulier, c'est la couleur des perles. Les objets construits doivent être beaux. Les enfants accordent beaucoup d'importance aux finitions de leur réalisation, c'est une part d'eux qu'ils mettent dedans. Nous avons donc préféré deux couleurs pour les perles, plutôt qu'une seule. Mais ce choix n'est pas uniquement dans un but d'esthétique. Les boules du haut n'ont pas la même valeur que celles du bas. Celles du haut valent chacune cinq et celles du bas chacune un. Donner une couleur différente permet de pouvoir en parler : les boules bleues, les boules rouges, même si on ne connaît pas ou si on ne se rappelle plus du vocabulaire spécifique. Bien sûr il est hors de question de mettre des perles multicolores car on ne peut alors plus rien lire ! Changer la couleur selon la tige ne serait pas non plus une bonne idée : toutes les notions intéressantes sur le système positionnel montrées avec le boulier perdent leur sens. Le boulier permet de montrer matériellement que trois dans la tige des dizaines ou dans la tige des centaines s'écrit de la même manière, c'est-à-dire en déplaçant trois unaires. Mais, selon la position de la tige, on ne lira pas le même nombre : ce sera 30 ou 300 ! On comprend alors ce que veut dire position dans le terme système positionnel.

3. Remarques pour le modèle des bâtons de Néper

Le modèle {modele1} peut servir au professeur pour fabriquer des bâtons de Néper pour que les élèves les manipulent avant de les construire lors de la *phase de découverte*. Mais nous ne conseillons pas que les enfants fabriquent les bâtons de Néper avec le modèle.

La fabrication des bâtons de Néper est relativement simple. On peut les réaliser sur des feuilles quadrillées collées sur du carton. Il est bien plus productif que chaque élève remplisse le tableau de Pythagore. Cette remarque a d'ailleurs été exprimée par plusieurs professeurs des écoles en formation continue : " On comprend mieux en faisant ! " On peut aussi imaginer des séances en informatique pour construire les bâtons.

4. Remarques pour le modèle des réglettes de Genaille-Lucas

Bien qu'il puisse être intéressant de réaliser le tableau des réglettes de Genaille-Lucas en classe d'informatique, ceci nous semble plus délicat.

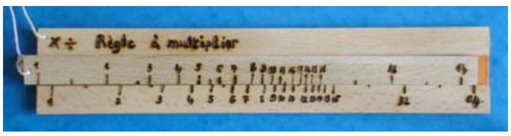
Le modèle {modele2} peut donc servir au professeur puis aux élèves. Le professeur peut fabriquer des bâtons pour que les élèves les manipulent avant de les construire, lors de la *phase de découverte.* Ensuite, pour la fabrication, les élèves peuvent coller les modèles sur du carton et tenter de répondre à la question : *Pourquoi ça marche ?*

5. Remarques pour les modèles de la règle à calcul

Le premier modèle[4] {modele3} est un modèle avec les graduations chiffrées qui peut servir au professeur pour fabriquer des règles à calcul pour que les élèves les manipulent avant de les construire, lors de la *phase de découverte*.

Ensuite, le modèle avec les graduations non chiffrées {modele4} est destiné à la fabrication par les élèves qui doivent donc retrouver les nombres des graduations. Le modèle peut se photocopier sur du papier cartonné.

Pour la fabrication, il est préférable d'imprimer les modèles sur du papier cartonné.



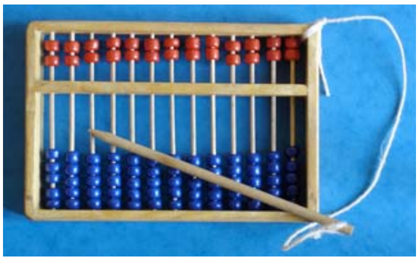
On peut aussi réaliser la règle à additionner avec des baguettes de bois, en pyrogravant les graduations. (Photos ci-contre)

[4] Merci à Vincent Brandsma pour la réalisation des deux modèles de la règle à calcul.

Fiche 3 : L'étude du boulier chinois

1. Le principe du boulier chinois

Le boulier chinois commercialisé



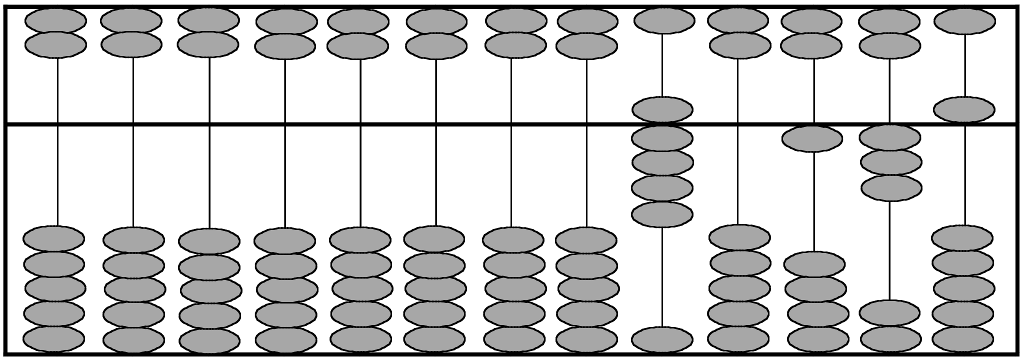
Un boulier chinois fabriqué par un enfant de CM2

La trace d'un usage d'un système décimal remonte au 14ème siècle avant J.-C. en Chine, celle-ci a donc précédé l'Europe de 2 300 ans ! Pour Temple (1987) :

> " Une des raisons en est sans doute que l'écriture chinoise emploie des idéogrammes et non un alphabet. Un alphabet comprend nécessairement plus de neuf lettres et, si les nombres sont représentés par des lettres, on est tenté de ne pas s'arrêter après " neuf ", mais de continuer " (Temple, 1987, p 139).

La numération chinoise est définie par Guitel (1975) comme une *numération de position de type hybride* (pour les nombres inférieurs à 10^5). L'écriture d'un nombre en idéogramme est très régulière et très proche du développement polynomial, par exemple 982 est représenté par les idéogrammes successifs : 9, 10^2, 8, 10, 2. Sans l'écriture des puissances de dix, on retombe sur une numération de position. En effet, la numération de position cache en quelque sorte les puissances de 10.

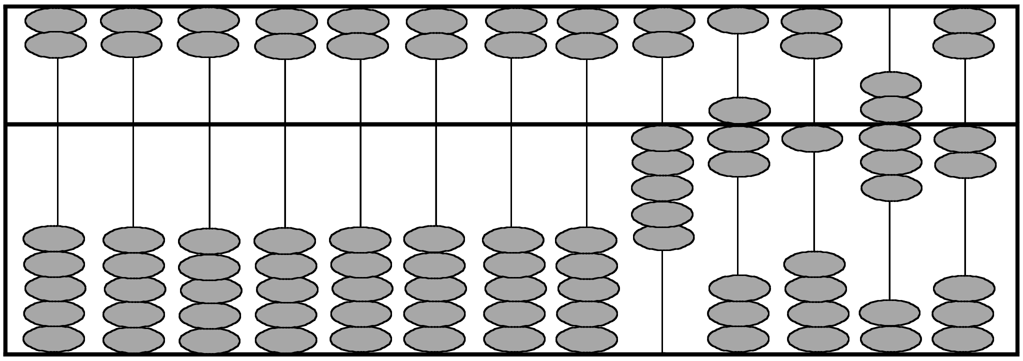
Dans chaque tige, le boulier chinois possède deux quinaires (qui valent chacune cinq) et cinq unaires (qui valent chacune un). Chaque tige représente une position du système décimal : unités, dizaines, centaines, etc. en partant de la droite vers la gauche. La position zéro s'obtient lorsque les boules sont vers le cadre extérieur : celles du haut en haut et celles du bas en bas. Pour marquer un nombre on ramène les boules vers le cadre intérieur afin de déplacer les unaires et les quinaires en même temps. Il est inscrit 90 135 sur le boulier ci-dessous. On remarquera que la décomposition polynomiale de ce nombre est : $90\,135 = 9\times10^4 + 0\times10^3 + 1\times10^2 + 3\times10^1 + 5\times10^0$.



9 0 1 3 5

Pour mieux comprendre le principe du boulier, regardons l'exemple suivant.

Comment lire ce nombre écrit sur le boulier ? Comment écrire autrement 13 dizaines ? Combien de possibilités a-t-on sur le boulier chinois ?



Dans les dizaines de mille, on peut échanger les cinq unaires contre une quinaire. Ensuite 13 dizaines c'est 130, on peut donc remonter les deux quinaires des dizaines et monter une unaire des centaines. Le résultat se lit alors : 57 232.

Remarque sur les symboles écrits et les noms oraux des nombres et des chiffres en français :

Les symboles que l'on utilise pour écrire les nombres sont très réguliers, on utilise dix symboles de 0 à 9 (les chiffres) que l'on combine pour écrire tous les nombres.

Les noms des nombres en français sont eux beaucoup moins réguliers. On a nécessairement dix noms différents de 0 à 9, un nom pour 10, 10^2, 10^3, etc. mais on ne les combine pas toujours pour nommer un nombre.

En effet, les noms : zéro, un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, cent, mille, million, milliard sont nécessaires. Ensuite pour nommer 11, on emploie onze à la place de dix-un qui, lui, est régulier, de même douze pour dix-deux, treize pour dix-trois, quatorze pour dix-quatre, quinze pour dix-cinq, seize pour dix-six puis dix-sept est à nouveau régulier. De 11 à 16, des noms spécifiques sont utilisés alors que l'on pourrait combiner les noms des chiffres. De 17 à 19 c'est régulier. Et puis pour 20, à nouveau on emploie vingt pour deux-dix, trente pour trois-dix, quarante pour quatre-dix, cinquante pour cinq-dix, soixante pour six-dix, soixante-dix pour sept-dix, quatre-vint pour huit-dix et quatre-vingt-dix pour neuf-dix. D'ailleurs, les septante, octante et nonante sont plus proches de la régularité que les combinaisons françaises. Pour 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 c'est irrégulier. Ensuite on a le 100, cent, deux cents (ou deux-cent)… on ne précise pas que pour le premier il n'y a qu'un cent : un-cent, ce que font les Anglo-saxons avec one-hundred. De même avec 1000, mille, deux mille (ou deux-mille)… on ne précise pas un-mille comme one-thousand. D'ailleurs pour 10 aussi on pourrait préciser un-dix (ce qui n'est pas non plus le cas chez les Anglo-saxons).

Quelle est la définition d'un dictionnaire pour les chiffres et les nombres ?

De zéro à seize on trouve des définitions de la forme " vient après tel chiffre ou nombre ". De zéro à dix, la construction est bien celle-là. Mais pour la suite, d'un point de vue mathématique, onze c'est un après dix (dix-un, $10+1=1\times10^1+1\times10^0$), douze c'est deux après dix (dix-deux, $10+2=1\times10^1+2\times10^0$), etc. jusqu'à seize. Ensuite, les nombres réguliers ne sont pas mentionnés dans le dictionnaire. De 20 à 60 c'est 2×10, 3×10, … 6×10. Ensuite, on a notre fameux soixante-dix, très irrégulier qui est 60+10. Le dictionnaire ne fait pas cette remarque et donne directement la définition 7×10. C'est pareil pour quatre-vingts et quatre-vingt-dix construits respectivement sur 4×20 et $4\times20+10$ et la définition est 8×10 et 9×10. En conclusion, la distinction entre symboles écrits (en base 10) et noms parlés n'est pas claire dans un dictionnaire courant.

Avec l'analyse de l'apprentissage des grands nombres en primaire, Mercier (1997) a montré que ce problème relevant de la langue concerne l'articulation entre des savoirs mathématiques et des savoirs sociaux et que ce point est presque ignoré en classe.

2. L'étude du boulier chinois comme situation de recherche

Certains ouvrages scolaires de mathématiques, souvent pour le CE2, traitent du boulier comme instrument pour compter. Ces bouliers se composent alors de dix boules par tige, de différentes couleurs, et sont plus ou moins adéquats pour l'enseignement nous semble-t-il. Balacheff et Neyret (1981 et 1982)[5] ont étudié le boulier chinois en explicitant en particulier la base alternée (5,2) pour l'écriture, l'addition et la soustraction.

Pour nous, l'enjeu est d'approfondir la notion de numération positionnelle en base dix et de retravailler les algorithmes de calcul avec le boulier chinois. Pour cela, nous proposons d'étudier le boulier chinois comme situation de recherche. Par situation de recherche[6], nous pointons l'importance d'une question de départ, facile d'accès et comportant des stratégies de résolution variées dont la résolution n'est pas immédiate. Nous insistons aussi sur l'étude du lien entre les techniques habituelles de calcul et la diversité de celles disponibles avec le boulier.

Nous présentons trois[7] situations de recherche, avec les trois questions de recherche suivantes : *Comment ça marche ? Peut-on enlever des boules ? Peut-on changer la valeur des boules ?*

Nous précisons que pour la lecture qui suit, il est souhaitable de se munir d'un boulier chinois. On considère un boulier chinois (ou suan-pan) à treize tiges, les boules du haut correspondent aux rangées de deux boules et celles du bas à celles de cinq boules. En haut, on a 26 boules (13×2) et 65 en bas (13×5). Le boulier permet en particulier d'écrire, d'additionner, de soustraire des nombres d'une manière très rapide quand on maîtrise son utilisation.

2.1 Situation 1 : Le boulier, comment ça marche ?

Le boulier est considéré comme un support d'activité en mathématiques, l'utilisation montrée ici n'est pas celle d'une utilisation courante, machinale comme c'est le cas lorsqu'on apprend à l'utiliser en Chine ou au Japon, depuis l'enfance. Le but est de comprendre pourquoi un tel objet est efficace pour faire des calculs et non pas d'apprendre par cœur les règles de son utilisation. En fin de primaire, la notion de

---

[5] Balacheff, N. & Neyret, R. (1981). Bouliers et écriture des nombres au CM. *Grand N*, 25, 39-81.

Balacheff, N. & Neyret, R. (1982). Bouliers et opérations au CM. *Grand N*, 28, 67-87.

[6] Grenier, D. & Payan, C. (2003). Situations de recherche en "classe", essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques.* Éd ARDM, 189-203. (Disponible sur www-leibniz.imag.fr/LesCahiers, *Les cahiers de laboratoire Leibniz*, 92). Sur la définition d'une situation de recherche, voir aussi le Chapitre 5 de la thèse.

[7] Dans le texte complet de la thèse, une 4ème situation est proposée. Le boulier devient un support pour se poser de nouvelles questions qui aboutissent en particulier à un questionnement sur les bases de numération.

numération positionnelle est souvent mal installée et constitue un obstacle concernant l'apprentissage des techniques opératoires. L'étude du boulier permet de remonter au sens mathématique en se posant des questions sur l'écriture des nombres, la notion de position d'un chiffre dans un nombre, sur la définition des retenues…

L'exploration du boulier doit être large au début, elle nécessite du temps : deux ou trois heures au cycle 3. La confrontation finale des opinions permettra de se mettre d'accord sur une méthode.

- Question de recherche

Comment ça marche ? Le boulier est un instrument à calculer c'est-à-dire qu'il facilite les calculs. Il faut essayer d'imaginer comment on peut l'utiliser. D'après nos observations, la consigne de départ peut aussi être : Écrivez un nombre sur le boulier. La grande majorité des élèves commence quand même par écrire un, deux, trois… De plus, la question peut aussi se décliner : *Comment on compte ?* ou *Comment on calcule ?* sans affecter notablement les recherches des élèves. Effectivement, en mathématiques, compter et calculer ce n'est pas la même chose : compter c'est dénombrer et calculer c'est faire des opérations. Par contre, dans le sens commun ou dans un dictionnaire, compter se définit comme :

> " Déterminer le nombre, la quantité en procédant à un calcul. Effectuer un calcul, énoncer la suite des nombres "

Et calculer comme :

> " Déterminer par le calcul. Opérer sur des nombres "

Compter, c'est faire des comptes c'est-à-dire des additions, des multiplications, donc faire des calculs, calculer. Le sens courant de calculer et compter est trop proche pour que ce soit une variable de poids dans le choix de stratégie pour répondre à la question. Ceci a bien été confirmé par nos observations de classe. C'est quoi compter pour vous ? Question posée à une classe de $4^{ème}$, deux élèves ont répondu : " Faire des additions ! Et des multiplications aussi ! " Par contre, ce qui fausserait complètement la recherche c'est de donner un nombre à inscrire : écrire 5 123. Cela suppose que l'on peut écrire ce nombre et ce n'est alors plus du tout la même étude.

- Choix des variables

Le niveau de la classe est au moins CM1. L'enjeu est une réorganisation des connaissances relatives à la numération et aux algorithmes de calcul avec la mise en relation des techniques avec le boulier et des techniques papier–crayon. La compréhension du système de numération positionnelle n'est pas évidente. D'ailleurs, si l'on regarde à l'échelle de l'histoire, la numération romaine non positionnelle a survécu longtemps (jusqu'au $18^{ème}$ siècle pour les comptes publics en France) mais elle nécessitait l'usage de jetons pour réaliser des calculs. Une numération positionnelle est avantageuse pour effectuer des *calculs à la plume*, pour s'en convaincre on pourra calculer XXV+IX. Combien d'unités, de dizaines ? L'étude du boulier permet de reconstruire ce concept de numération positionnelle en base dix.

- À propos des élèves

Cette recherche permet de souligner deux points :

- un chiffre n'a pas la même valeur selon sa position sur le boulier (système positionnel en base dix), c'est-à-dire qu'un chiffre ne représente pas la même quantité selon sa position,
- et certaines boules ne valent pas un mais cinq, elles marquent cinq.

Le passage de ces deux étapes est nécessaire pour répondre à la question.

On voit apparaître deux stratégies. Pour la majorité, la méthode est d'écrire, de dénombrer tous les nombres : un, deux, trois, quatre, cinq. Jusqu'à cinq ça va. Pour la suite il faudra se donner des règles d'utilisation. Pour d'autres, la méthode est d'écrire directement un nombre, ceci est beaucoup moins courant. Nous avons observé, au fil des séances avec des enfants et des adultes, que choisir par soi-même un exemple que l'on va tester n'est pas spontané mais relève d'un raisonnement particulier (que les professeurs de mathématiques ont mieux maîtrisé lors des séances). Avec cette seconde stratégie, certains élèves proposent de donner la valeur 100 aux boules de la partie supérieure et un à celles de la partie inférieure. Ils peuvent alors inscrire 922 mais il est impossible d'inscrire 77. En effet, la partie inférieure ne possède que 65 boules ! On voit aussi apparaître des procédés *multiplicatifs à trous* : les boules ont différentes valeurs et on les multiplie entre elles pour fabriquer d'autres nombres, mais certains nombres ne peuvent pas apparaître par multiplication : les nombres premiers !

Concernant l'écriture des nombres, certains élèves commencent et continuent longtemps avec la méthode suivante : pour écrire sept, ils dénombrent : un, deux, trois, quatre, cinq et cinq unaires s'échangent contre une quinaire puis six, sept. Penser sept comme cinq plus deux est une méthode très rapide pour inscrire un nombre mais pas obligatoire. Il n'est donc pas indispensable de connaître les décompositions des nombres entre cinq et dix par rapport à cinq, c'est-à-dire : 6=5+1, 7=5+2, 8=5+3, 9=5+4 pour écrire un nombre. Bien sûr, comme pour le calcul mental, utiliser ces décompositions simplifie la tâche !

Remarque :

Le boulier chinois, utilisé depuis des siècles sert à effectuer des calculs : additions, soustractions, multiplications, divisions, extractions de racines. À l'inverse des bouliers-compteurs des écoles qui possèdent dix boules par tiges et qui sont utilisés pour apprendre à compter, le boulier chinois possède des marqueurs de cinq qui en font indéniablement un instrument de calcul, pour calculer. Lors des séances observées, le comptage est apparu, pour certains élèves, comme une méthode pour trouver le mode de fonctionnement du boulier, pour inscrire un nombre qui puisse par la suite servir dans des opérations. Mais, la manière d'écrire un nombre, de le coder sur le boulier chinois ou en numération positionnelle est directement liée à l'objectif d'utilisation d'un algorithme de calcul. C'est aussi le cas pour le calcul mental, que l'on peut rapprocher des techniques avec le boulier chinois.

- Évolution de la séance

Maintenant, étudions les différentes étapes du raisonnement susceptibles d'apparaître lors de telles séances. Les points clefs sont le système décimal positionnel et la valeur de cinq pour certaines boules. Ce raisonnement comporte trois étapes : avant que le système positionnel en base dix ne soit installé sur le boulier, une fois que celui-ci est admis mais avant que le système unaires-quinaires ne le soit, et enfin lorsque ces deux points sont posés.

Notons que généralement, la position choisie par quelqu'un qui découvre le boulier pour marquer le zéro sur celui-ci est de pousser les unaires vers la barre inférieure et les quinaires vers la barre transversale. Mais la position usuelle c'est-à-dire en poussant les quinaires vers la barre supérieure permet de déplacer en même temps unaires et quinaires pour les calculs ce qui représente un remarquable gain de temps… L'idée que l'on déplace des boules pour inscrire un nombre est intuitive.

Pré-système décimal positionnel	Post-système décimal positionnel Pré unaires-quinaires	Post-système décimal positionnel et unaires-quinaires
• Unités et dizaines avec des processus : additif ou additif-soustractif (avec ou sans trous)ou multiplicatif (à trous) • Base 65	• En haut, on note les retenues • Les boules du haut valent deux (on garde un en bas)	• Écrire à gauche • Écrire à gauche en commençant par la puissance de dix la plus petite

Tableau 1 : Étapes du raisonnement pour arriver à l'utilisation du boulier chinois

- Unités et dizaines avec un processus additif :

Lors des mises en situation, les enfants commencent généralement par penser que le boulier est séparé en deux, en haut on a les dizaines et en bas les unités ce qui signifie que l'on accorde un comme valeur en bas et dix en haut (parfois cinq), puis on ajoute les boules entre elles. Le nombre maximal alors inscriptible est 325 (65+26×10=325). Pour permettre à la recherche de continuer, il est nécessaire de montrer le point faible, la limite en demandant d'écrire 9 253 par exemple. La méthode proposée doit être invalidée pour recevoir d'autres propositions. Certains trouvent une astuce pour compter plus loin : on marque les dizaines en bas et les unités en haut. On arrive à 676 (65×10+26=676), mais on ne peut toujours pas inscrire 9 253.

- Unités et dizaines avec un processus additif-soustractif :

D'autres procédés peuvent être imaginés avec les boules du haut qui valent dix et celles du bas un. Ces dernières possèdent deux positions de déplacement, si elles sont contre la barre on les soustrait, si elles sont en milieu de tige, on les additionne. On pense sept comme 10-3 et 13 comme 10+3. On écrit jusqu'à 25 dans une tige et 325 (25×13=325) au plus. Outre le fait que l'on n'écrit pas des grands nombres, ce système trop compliqué est source d'erreurs pour le demi-déplacement, il s'éteindra face à d'autres propositions plus adaptées. Dans ce procédé on n'a pas de trous car le raisonnement a été guidé par un dénombrement. Par contre, lorsque celui-ci amène directement à écrire un nombre, n'importe lequel, on arrive à des procédés à trous, c'est-à-dire qu'il manque des nombres. Par exemple, en haut une boule compte 100 et un en bas. Lorsqu'on déplace des boules en bas à droite on soustrait et en bas à gauche on ajoute. Pour écrire 1 731 on n'a pas de problème, mais pour écrire sept ? 7=100−93, mais on n'a que 65 boules en bas.

- Unités et dizaines avec un processus multiplicatif (à trous) :

Quand la méthode est toujours d'essayer d'écrire un nombre sans tous les dénombrer, on voit aussi apparaître un système à trous mais multiplicatif. On effectue le produit de la valeur des boules. Avec celles du bas on écrit un, deux, trois, quatre, cinq et avec celles du haut : 1×2=2, 2×2=4, 2×3=6, 2×4=8, 2×5=10. Et sept ? Et neuf ? Avec cette méthode, il manquera les nombres premiers qui ne s'obtiennent pas comme produit de deux entiers.

- Base 65 :

Si on part de la remarque : en bas, on a 65 boules, mais comment inscrire un nombre plus grand ? Et bien, pour compter plus loin, on va marquer 65 avec une boule en haut et ainsi pouvoir à nouveau utiliser les boules du bas. On a l'idée essentielle qu'en haut, ce sont des *boules témoins* qui gardent en mémoire une certaine valeur. On écrit jusqu'à 1 755 (26×65+65=1 755), mais par exemple pour écrire 1 721, qui est déjà donné en base 10, on a besoin de le décomposer en multiples de 65…

- Numération de position en base dix :

Avec la nécessité de la base dix vient celle d'écrire de zéro à neuf (au moins) dans chaque rang. En première analyse, on peut penser qu'il est nécessaire d'écrire jusqu'à dix, mais ce ne sont que les dix chiffres de zéro à neuf qui sont indispensables. Arrêtons-nous sur une remarque importante. Nous avons choisi de travailler sur le boulier chinois car on peut inscrire jusqu'à 15 dans une colonne, ce qui permet lors des additions et des soustractions de bien voir le passage des retenues. Par contre, lors de la découverte le fait qu'il y ait trop de boules en quelque sorte, peut constituer un obstacle. Il pourra être utile de faire remarquer que le boulier japonais possède moins de boules mais fonctionne exactement sur le même principe. Revenons sur le boulier chinois, l'idée qui peut apparaître, en cherchant à écrire jusqu'à dix c'est de regarder uniquement la partie inférieure du boulier et de regrouper deux tiges pour avoir dix et utiliser un système positionnel. Les deux tiges à l'extrémité droite représentent les unités, les deux autres immédiatement à gauche les dizaines, etc. À partir de là, on a gagné l'écriture positionnelle, mais on doit pouvoir encore l'améliorer, il faut prendre en compte la partie supérieure du boulier.

- En haut, on note les retenues :

En haut, on note les retenues, mais quelles sont les retenues possibles ? Pour l'addition ? Et pour la multiplication ? Cette idée est très intéressante dans le sens où elle ouvre sur d'autres questions qui ont été en particulier la clef de la mécanisation du calcul. Pour l'addition de deux nombres la retenue maximale est un (9+9=18) et pour la multiplication de deux nombres c'est huit (9×9=81). On n'a pas alors la nécessité d'avoir 26 boules en haut.

- Les boules du haut valent deux (on garde un en bas) :

Si on revient à l'idée d'écrire jusqu'à neuf dans un rang, peut-on donner deux comme valeur aux boules du haut ? On construit donc des nombres pairs et impairs. Cette méthode marche aussi bien que les valeurs cinq et un ! En fait, le boulier chinois fonctionne parfaitement si en gardant un pour les boules du bas, on donne aux boules du haut la valeur deux ou trois ou quatre ou six. On peut aussi donner la valeur un à celles du haut et deux ou trois à celles du bas. La faille est que l'écriture et la lecture des nombres sont moins rapides. Le choix d'une boule qui vaut cinq s'explique parce que l'œil arrive à dénombrer quatre boules, mais ensuite ce n'est plus possible rapidement. Notons que le boulier japonais est une amélioration du boulier chinois, il ne possède qu'une quinaire et quatre unaires et fonctionne sur le même principe. Il peut aussi fonctionner avec un pour la boule du haut et deux pour celle du bas. Maintenant l'écriture positionnelle en base dix avec des marqueurs de cinq est acquise, mais il reste encore quelques détails à mentionner.

- Écrire à gauche :

L'idée que l'on voit aussi arriver, c'est que comme sur une feuille de papier ou avec un logiciel de traitement de texte, on commence par écrire à gauche. Par exemple, on colle 127 à gauche, mais alors comment écrire 1 270 ? L'inscription du zéro a de l'importance et pour lire les nombres de gauche à droite, il faut les coller contre l'extrémité droite.

- Écrire à gauche en commençant par la puissance de dix la plus petite :

Aussi, il n'est pas rare de voir quelqu'un écrire un nombre en commençant par la gauche, mais en collant les unités à gauche c'est-à-dire que l'inscription : 9 / 5 / 2 se lit 259. Ce système est tout à fait correct. Si on décompose 259, on a : 259 = $2\times10^2+5\times10+9 = 9+5\times10+2\times10^2$.

Avec ce raisonnement, on inscrit un nombre en commençant par la plus petite puissance de dix, comme c'est d'ailleurs souvent le cas avec les polynômes : $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. La seule objection est que l'on écrit à l'envers sur le boulier par rapport à la méthode traditionnelle. C'est pour cette raison que l'on choisira la convention de coller les unités à droite.

Cette analyse reprend donc différents points importants du raisonnement mathématique pour parvenir à l'utilisation traditionnelle du suan-pan.

Reste une question à étudier : quel est le plus grand nombre inscriptible sur le boulier chinois ? 9 999 999 999 999 ou 16 666 666 666 665 ? Dans un premier temps, on peut réduire le problème (comme c'est souvent nécessaire en mathématiques) c'est-à-dire étudier un boulier à six tiges par exemple. Avec le soroban, la réponse ne donne pas lieu au débat car on n'écrit pas au-delà de neuf dans une colonne. Sur le boulier chinois, on inscrit jusqu'à quinze dans une colonne, quel est le nombre inscrit lorsque toutes les boules sont activées dans les treize tiges ? C'est :

$15 + 150 + 1\,500 +\ldots+15\times10^{12}$
$= 15\times(1 + 10 + 100 +\ldots+10^{12})$
$= 15\times1\,111\,111\,111\,111$
= 16 666 666 666 665. Ce nombre se lit 16 trillons 666 milliards 666 millions 666 mille 665.

Ce nombre est écrit en base dix. Et, comme il est possible d'inscrire jusqu'à 15 dans chaque tige du boulier chinois, il est nécessaire d'utiliser une théorie mathématique pour écrire ce nombre en système décimal sur le papier.

Une fois l'écriture des nombres admise pour les élèves, on pourra poursuivre l'étude du boulier de la même manière : *Comment faire une addition ? Une soustraction ? Une multiplication ?* Les techniques papier-crayon et boulier sont étudiées ci-après (paragraphes 5 et 6).

2.2 Situation 2 : Peut-on enlever des boules ?

Dans ces situations, chacun doit manier un boulier chinois (suan-pan). Lorsque que l'on veut étudier le boulier japonais (soroban), on demande d'imaginer que l'on enlève une boule en haut et une boule en bas. C'est-à-dire que la règle du jeu ne permet pas de déplacer la boule tout en haut et celle tout en bas.

- Question de recherche

À propos du nombre minimal de boules par tige pour écrire en base dix, la question de départ peut se formuler de deux manières : *Combien peut-on enlever de boules au maximum par tige pour pouvoir calculer à la manière traditionnelle ?* Mais aussi : *Peut-on avoir une écriture unique de tous les nombres en base dix ?* Ce qui équivaut à la question : *Si on enlève deux boules par tige, est-ce que l'on peut encore calculer ?* Mais la question est alors trop fermée et ce n'est plus une situation de recherche.

- Choix des variables

Le fonctionnement du boulier est supposé maîtrisé par chacun. Le niveau de la classe est au moins CM1. C'est un travail sur la numération positionnelle et la nécessité de pouvoir inscrire les nombres de zéro à neuf par tige pour travailler en base dix. C'est aussi plus généralement un travail sur les bases que l'on propose en élargissant la question à d'autres bases.

- Une réponse possible

Dans chaque tige le boulier chinois possède deux quinaires et cinq unaires, ce qui permet d'écrire jusqu'à 15 par tige. Par exemple : 12 peut s'écrire 12 unités mais mieux : une dizaine et deux unités.

Si on garde deux quinaires, à partir de trois unaires (ou moins) on perd des chiffres, même chose si avec une quinaire on ne garde que trois unaires (ou moins). Dans ces cas-là, le boulier ne pourra plus s'utiliser en base dix.

Il apparaît donc trois cas pour lesquels le boulier s'utilise avec des boules manquantes : soit deux quinaires et quatre unaires, soit une quinaire avec cinq ou quatre unaires.

Regardons quel est le nombre maximum que l'on doit pouvoir écrire dans une tige pour compter en base dix. La première idée est souvent dix ! Mais en fait, il suffit de pouvoir écrire de zéro jusqu'à neuf. En plus si chaque nombre s'inscrit de manière unique on a obtenu l'unicité d'écriture pour tous les nombres. Et ainsi, on (re)découvre le boulier japonais qui possède une quinaire et quatre unaires. C'est une amélioration du boulier chinois qui s'est produite tout d'abord au Japon mais qui actuellement tend à se répandre en Chine.

Nombre de boules		**Écriture encore possible**	**Écriture impossible**	**Écriture devenant unique**	**Utilisation du boulier**
Quinaires	**Unaires**				
2	4	De 0 à 14	15	5 et 10	oui
2	3	0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13	4, 9, 14, 15	5 et 10	non
1	5	De 0 à 10 (5 s'écrit de deux manières)	De 11 à 15	10	oui
1	4	De 0 à 9	De 10 à 15	5	oui
1	3	0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8	De 9 à 15	5	non

Tableau 2 : Peut-on enlever des boules ?

Remarquons qu'avec le boulier chinois on pourrait compter jusqu'en base 16 puisque l'on peut écrire de zéro à 15 dans une tige. L'intérêt de pouvoir inscrire plus que nécessaire dans une tige c'est que l'on peut effectuer le passage des retenues, à la main et le visualiser.

Apprendre à utiliser un soroban est plus laborieux mais pour un expert, les calculs se font plus rapidement que sur le suan-pan. Ce nouveau boulier pour lequel chaque nombre s'écrit de manière unique donne un exemple de fonctionnement optimum, d'optimisation.

2.3 Situation 3 : Peut-on changer la valeur des boules ?

- Question de recherche

Quelles valeurs peut-on donner aux boules pour que l'on puisse écrire tous les nombres (toujours en base dix) ?

- Choix des variables

Comme pour la situation 2 : Le fonctionnement du boulier est supposé maîtrisé par chacun. Le niveau de la classe est au moins CM1. C'est un travail sur la numération positionnelle et la nécessité de pouvoir inscrire les nombres de zéro à neuf par tige pour travailler en base dix. C'est aussi plus généralement un travail sur les bases que l'on propose en élargissant la question à d'autres bases.

- Une réponse possible

On peut étudier tout d'abord le suan-pan puis le soroban. Une fois que l'on a trouvé des solutions, on peut se poser des questions sur ses propriétés : *Quel est le nombre maximum inscriptible dans une tige ? Qu'en est-il de l'unicité d'écriture suivant la méthode ?*

L'idée que les boules valent un ou deux repose sur la formation de nombres pairs et impairs, on écrit tous les nombres pairs avec les boules du bas et on écrit les impairs en ajoutant une boule du haut. L'idée est bonne mais on se heurte au manque de rapidité d'écriture, de lecture et de tous les calculs. On voit la pertinence d'une boule qui marque cinq en système décimal. En plus sur le boulier chinois habituel, on peut faire le passage *à la main* de la retenue. En fait, la méthode avec les boules du haut qui valent un et celles du bas deux est plus appropriée avec le boulier japonais. En effet, avec le boulier chinois les deux boules du haut forment aussi des nombres pairs ce qui produit des nombres dont l'écriture n'est pas unique mais sans intérêt pour faciliter les calculs.

	Valeur des boules du haut	**Valeur des boules du bas**	**Nombre maximum inscriptible**	**Écriture non unique**
Suan-pan	6	1	17	-
	5	1	15	5 et 10
	4	1	13	4, 5, 8
	3	1	11	3, 4, 5, 6, 7, 8
	2	1	9	2, 3, 4, 5
	1	2	12	2, 4, 6, 8, 10
Soroban	5	1	9	-
	1	2	9	-

Tableau 3 : Peut-on changer la valeur des boules ?

Et si toutes les boules valent deux, quels sont les nombres que l'on ne peut pas inscrire ? Ce sont les nombres impairs bien sûr !

Ensuite, sur le suan-pan on peut essayer d'éliminer le doublon du cinq (cinq unaires ou une quinaire) en donnant la valeur six aux boules de la partie supérieure on peut alors écrire jusqu'à 17 par tige donc utiliser le boulier en base 18, ce qui n'a pas grand intérêt pour nos calculs en système décimal… Cette méthode ne s'applique pas au soroban qui, lui, n'inscrit cinq que d'une manière, avec une quinaire.

Par contre si on change la valeur des boules supérieures en leur accordant la valeur trois par exemple, on peut écrire tous les chiffres de zéro à neuf sans problème sur chaque tige. Ce que l'on remarque c'est qu'un plus grand nombre de chiffres s'écrivent de plusieurs manières. Par exemple trois se représente par 1+1+1 avec les boules du bas ou par une boule en haut. De même, 4=1+1+1+1=3+1,

5=1+1+1+1+1=3+1+1,
6=3+1+1+1=3+3,
7=3+1+1+1+1=3+3+1
Et 8=3+1+1+1+1+1=3+3+1+1.

Avec ce système on inscrit jusqu'à 11 par tige c'est-à-dire que l'on peut l'utiliser pour un système en base 12.

Lors des expérimentations, des propositions qui donnaient différentes valeurs aux boules d'un même cadre ont été émises. Par exemple, certains enfants ont proposé de donner un, puis deux, puis trois, puis quatre, puis cinq comme valeur aux boules sur une tige (du cadre inférieur). Notre choix a été de rejeter cette proposition rapidement car la lecture nous semble alors trop difficile. Toutefois, c'est une piste que le professeur peut laisser ouverte jusqu'à ce qu'elle soit invalidée par la classe.

3. Une remarque importante : la non-unicité d'écriture

Pour aborder ce point, étudions les différentes manières d'inscrire dix. On peut l'écrire comme une dizaine et zéro unité ou comme dix unités (deux quinaires ou une quinaire et cinq unaires). On a donc trois possibilités de codage pour ce même nombre. En classe de mathématiques, on rencontre une situation similaire avec les fractions que l'on apprend à écrire de façon irréductible. On a bien plusieurs manières pour écrire un même nombre : $\frac{10}{2} = 5$ ou $\frac{18}{12} = \frac{3}{2}$. C'est aussi le cas des radicaux $\sqrt{18} = 2\sqrt{3}$ et des entiers, 0,9999… = 1 !

De plus, une opération du type $1\,038 - 55$, montre que comme en algèbre, sur le boulier il est parfois nécessaire de décomposer une écriture pour arriver au résultat. Par exemple il faut parfois passer par $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ c'est-à-dire l'inverse de la factorisation pour trouver un résultat.

À ce propos : *Quelles sont les équivalences qui existent lorsque l'on code un nombre sur le boulier chinois ?*

Une tige comporte sept boules : les deux quinaires qui possèdent trois positions possibles (aucune ou une ou deux activées) et les cinq unaires qui possèdent six positions (aucune ou une ou deux ou trois ou quatre ou cinq activées). On a donc un total de 18 (six fois trois) possibilités de codages sur une tige, mais il existe des équivalences d'écriture. Regardons ces équivalences.

Notons le couple $(a,b)_i$ avec a=0 ou 1 ou 2 et b= 0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5, c'est-à-dire a est le nombre de quinaires et b le nombre d'unaires que l'on peut activer, sur une tige $i \in \mathbb{N}$.

On a les équivalences suivantes :

- Sur une même tige : $(0,5)_i \equiv (1,0)_i$ et $(2,0)_i \equiv (1,5)_i$.
- Et aussi : $(0,0)_{i+1}\ (2,b)_i \equiv (0,1)_{i+1}\ (0,b)_i$ pour b=0, 1, 2, 3, 4, 5.

Que l'on peut aussi énoncer :
- $(5 \text{ unaires})_i = (1 \text{ quinaire})_i$
- $(1 \text{ quinaires et } 5 \text{ unaires})_i = (2 \text{ quinaires})_i$
- $(2 \text{ quinaires})_i = (1 \text{ unaire})_{i+1}$

De plus, comme on a huit équivalences, 18−8=10, et on a bien les 10 chiffres (de 0 à 9) que l'on peut coder sur une tige du boulier.

Remarque :

Le boulier japonais (ou soroban) ne possède que quatre unaires et une quinaire par tige, ce qui permet d'écrire tous les nombres de manière unique en base dix. Alors, neuf doigts auraient suffi à faire émerger le système décimal…

4. L'addition puis la soustraction sur le boulier chinois

Ces opérations s'effectuent par-dessus, on ne garde pas de trace des calculs intermédiaires. On lit directement le résultat. Avec le boulier, on voit le passage des retenues car on l'effectue à la main. Par exemple, le passage de dix dizaines en une centaine se fait par l'échange de dix dans la tige des dizaines avec une dans celle des centaines. Le boulier comporte une très bonne gestion des retenues. On peut commencer une opération par la gauche pour avoir un ordre de grandeur du résultat, sans avoir de soucis de retenue. Les nombres sont inscrits (ou codés) et cette inscription est dynamique, ce qui est impossible avec papier et crayon.

- L'addition

On peut l'écrire de deux manières :

$$\begin{array}{cccc} & 7 & 8 & 5 \\ + & 1 & 6 & 3 \\ \hline & 8 & \mathbf{14} & 8 \\ \hline & 9 & 4 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 7 & 8 & 5 \\ + & 1 & 6 & 3 \\ \hline & & & 8 \\ + & 1 & 4 & 0 \\ + & 8 & 0 & 0 \\ \hline & 9 & 4 & 8 \end{array}$$

Peut-on réaliser 12,56 + 34,129 ? Oui, il est alors nécessaire d'établir une convention pour placer les unités, par exemple la quatrième tige en partant de la droite, ce qui laisse trois chiffres inscriptibles après la virgule. On peut donc aussi travailler avec les décimaux sur le boulier.

- La soustraction

Pour la soustraction, regardons de plus près deux algorithmes que l'on enseigne en classes de primaire.

Technique 1 :

Tout d'abord, la technique habituelle ou par ajouts parallèles se présente de la manière suivante :

$$\begin{array}{cccc} & 9 & \mathbf{10}+3 & 3 \\ - & \mathbf{+1} & 5 & 1 \\ \hline & 8 & 8 & 2 \end{array}$$

On dit à l'oral : " Cinq pour aller à trois, c'est impossible, je pose un et j'abaisse un ". On réalise le calcul : 933−51=(933+100)−(51+100) en prenant soin d'écrire 100 comme dix dizaines puis comme une centaine. On utilise d'une part que : a − b=(a+x) − (b+x) c'est-à-dire que l'on peut additionner (ou soustraire) un même nombre aux deux termes d'une soustraction, le résultat sera le même. Et d'autre part, une propriété du système positionnel à base dix : 10 unités = 1 dizaine, 10 dizaines = 1 centaine, etc. Le (+10) des dizaines ne s'écrit pas, on rajoute un devant le trois qui donne bien 13=10+3.

Technique 2 :

La deuxième technique s'appelle technique des échanges ou de transfert interne. Elle n'est pas totalement absente de la classe, mais elle est beaucoup moins répandue que la première. Elle peut servir d'introduction au cours élémentaire pour la technique habituelle.

	~~9~~ **8**	**10**+3	3
−		5	1
	8	8	2

Ici, on prend dans une colonne pour mettre dans une autre. On peut dire : " Cinq pour aller à trois, je ne peux pas. Je prends une centaine de 900 que j'écris dans les dizaines sous la forme de dix dizaines. "On décompose : 933 = 800+130+3 et 51 = 50+1, ainsi : 933−51 = 800+130−50+3−1 = 800+80+2 = 882. On utilise ici seulement la propriété du système positionnel décimal qui permet de faire des échanges entre les colonnes.

Avec le boulier, la technique habituelle ne se transpose pas. Par contre il permet de bien mettre en pratique la méthode des échanges. Cette méthode a l'avantage de bien montrer les propriétés du système de numération positionnelle en base 10 qui, lorsqu'il est mal ou pas compris par les élèves, crée un obstacle supplémentaire pour se familiariser avec les techniques opératoires. Le boulier semble donc un support adéquat pour faire un lien entre la numération et les opérations. Pour calculer 933−51 sur le boulier : pour enlever un c'est comme avec le papier/crayon, c'est immédiat, mais il reste à enlever 50 de 932. On abaisse une unaire des centaines que l'on remplace en abaissant les deux quinaires des dizaines. Dans la tige des dizaines, on en a 13, desquelles on peut maintenant enlever cinq dizaines et obtenir le résultat. Le passage d'une centaine à dix dizaines se fait *à la main*.

5. La multiplication sur le boulier chinois

La méthode classique s'écrit sur une feuille :

		3	7	
	×		5	~~3~~
	1	8	5	

On dit à l'oral ou dans sa tête : " Cinq fois sept : 35. Je pose cinq et je retiens trois. Cinq fois trois : 15 et 3 : 18. "

		3	7	
	×		5	
		3	5	5×7
+	1	5	0	5×30
	1	8	5	

Avec le boulier, le calcul se décompose de telle manière que l'on n'a pas de retenue (le " je retiens trois " de précédemment). Ce qui est intéressant avec cette méthode, c'est que l'on voit mieux le décalage, on remonte au sens mathématique. Pour écrire la seconde ligne, on se place dans la tige des dizaines, on laisse la tige des unités vide car on va multiplier cinq unités par trois dizaines.

Mais, pas de miracle avec le boulier, il faut connaître ses tables !

6. Une progression pour la classe

Nous nous plaçons dans le cas où la découverte et la fabrication des instruments sont terminées. Nous proposons ici une progression, c'est-à-dire quelques exercices, pour l'étude du boulier, des réglettes à multiplier et de la règle à calcul. L'enjeu est d'aboutir à une institutionnalisation par le professeur.

- Inscrire et lire : 0, 3, 5, 7, 10, 17, 218, 500, 1 728, 5 399. On remarquera que l'on a deux possibilités pour inscrire cinq, et trois pour inscrire dix. On pourra se mettre d’accord sur une écriture économique c'est-à-dire qui déplace le moins de boules possible.

- Effectuer les additions suivantes : 17+2, 132+12, 240+17, 17+5, 25+8, 1 728+27, 629+3, 3 902+825, 12,56+34,129.

Réponses :

17+2=19

132+12=144

240+17=257 (cinq unaires = une quinaire)

17+5=22 (retenue : dix unités = une dizaine)

25+8=33 (retenue)

1 728+27=1855 (retenue, on peut utiliser l’astuce 27=30−3)

629+3=632 (retenue, dans les unités l’équivalence est à effectuer pendant le calcul ou on utilise que 3=5−2)

3 902+825=4 727 (retenue, on a 17 centaines ce qui est impossible à inscrire, on doit donc effectuer l’équivalence en cours d’addition ou utiliser que 800=1 000−200

12,56+34,129=46,689.

- Effectuer les soustractions suivantes : 534−21, 825−3, 163−81, 1 038−55, 800−99.

Réponses :

534−21=513

825−3=822(cinq unaires = une quinaire)

163−81=82 (retenue, une centaine = dix dizaines ou −80 = −100+20)

1 038−55=983 (retenue, un millier = dix centaines et une centaine = dix dizaines)

800−99=701 (−99 = −100+1)

- Effectuer les multiplications suivantes : 37×25, 561×37, 123×109, 172×49.

Réponses :

			5	6	1	
×				3	7	
					7	7×1
+			4	2	0	7×60
+		3	5	0	0	7×500
+				3	0	30×1
+		1	8	0	0	30×60
+	1	5	0	0	0	30×500
	2	0	7	5	7	

La gestion des retenues peut se réaliser en fin de calcul si c’est possible (on peut inscrire jusqu’à 15 par tige) ou bien au fur et à mesure.

37×25=925

561×37=20 757. Nous rappelons ci-contre la décomposition pour ce calcul.

123×109=13 407

172×49=8 428.

7. Quelques pistes pour poursuivre

- Les divisions

On peut envisager d’effectuer des divisions sur le boulier. En utilisant l’algorithme traditionnel de la division euclidienne, on effectue les soustractions sur le boulier.

- Les racines carrées

Prenons un exemple pour extraire une racine carrée avec le boulier. Comment effectuer $\sqrt{25}$ avec le boulier ? On peut utiliser la propriété que la somme des n premiers nombres impairs est égale à n², c'est-à-dire : $\sum_{i=0}^{n-1}(2i+1)=n^2$. Cette formule peut se démontrer (par récurrence) en classe de Terminale. Dans cet exemple : 1+3+5+7+9=25=5². Pour ce calcul, sur le boulier on effectuera des soustractions successives en notant le nombre des soustractions effectuées (la partie gauche du boulier sert à comptabiliser le nombre de soustractions) :

25−1=24, on inscrit une boule à gauche. Total de soustractions = 1

24−3=21, on rajoute une boule à gauche. Total = 2.

21−5=16, total = 3.

16−7= 9, total = 4.

9−9=0, total = 5. Le résultat est un nombre entier et c’est 5.

- Les nombres négatifs

On utilise les nombres négatifs pour les soustractions dont le résultat est négatif, ce qui peut bien sûr se produire pour des comptes marchands. Pour cela on utilise les nombres complémentaires. Sur un boulier japonais leur lecture est facile, ce sont les boules qui ne sont pas activées plus un. Le complément de six par rapport à dix est quatre. Pour effectuer 3−7, les étapes intermédiaires sont : 3+10=13 puis 13−7=6 et 6−10= −4.

- Dans une autre base

Pour les grandeurs qui ne suivent pas le système métrique, on les écrit sur le boulier en laissant une ou deux colonnes entre chaque subdivision si nécessaire. Les conversions s’effectuent selon les méthodes de la multiplication et de la division. Pour une utilisation avec des enfants du primaire, les calculs avec les heures, minutes, secondes sont bien adaptés.

Fiche 4 : L'étude des bâtons à multiplier

1. La multiplication *per gelosia*

Avant de nous consacrer aux bâtons à multiplier, nous allons nous intéresser à la multiplication *per gelosia* (*par jalousie*). Cette technique de multiplication à l'aide d'un tableau a été utilisée en Islam, en Chine et en Europe entre les 13$^{\text{ème}}$ et 15$^{\text{ème}}$ siècles. Elle est aussi appelée méthode *par grillage* ou *par filets*. Sur cette question et afin d'améliorer le calcul des produits de deux nombres naturels, Brousseau (1973) a comparé l'algorithme traditionnel et l'algorithme *per gelosia*. La conclusion très nette est que l'algorithme *per gelosia* est beaucoup plus fiable pour les calculs. Cette méthode s'enseigne aujourd'hui aux futurs professeurs des écoles et est envisagée en introduction de la multiplication traditionnelle dont l'algorithme est beaucoup plus complexe.

Prenons l'exemple de 721 par 59 (qui donne 42 539).

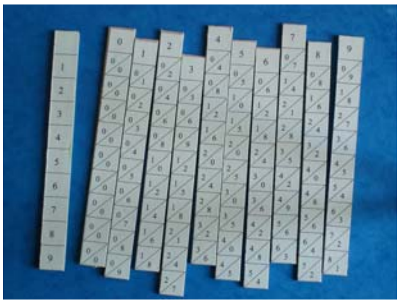
Remarque : Pour rester proche du calcul avec des bâtons, nous écrivons le multiplicande, 59, à gauche, en effet, l'index est toujours à gauche des bâtons utilisés. La lecture s'effectue diagonale par diagonale.

	7	2	1
5	$^{1}3$ / 5	1 / 0	$^{1}0$ / 5
9	6 / 3	1 / 8	0 / 9
42	**5**	**3**	**9**

Selon les pays, l'écriture s'effectue de droite à gauche et donc le tableau est dans l'autre sens. C'est de ces calculs avec des tableaux que l'idée des baguettes matérielles a vus le jour sous la forme des bâtons de Néper puis des réglettes de Genaille-Lucas.

La disposition actuelle (en colonne) de la multiplication est connue dès la fin du 17$^{\text{ème}}$ siècle mais le calcul avec jetons sera utilisé encore par la suite, jusqu'à l'adoption définitive du système décimal de position. En effet, en 1745 Le Gendre publie *Arithmétique par les jetons*. Cet ouvrage est destiné aux marchands et comptables qui utilisent les symboles romains (en vigueur jusqu'au 18$^{\text{ème}}$ pour les comptes publics). Il suffit d'essayer de faire une opération avec des nombres romains pour comprendre la nécessité d'utiliser des jetons pour les calculs !

2. Les bâtons de Néper



John Néper est un mathématicien écossais qui mit au point en 1617 un instrument de calcul permettant d'effectuer des multiplications, qui sera utilisé jusqu'à la fin du 19$^{\text{ème}}$ siècle en Europe. L'avantage de cette technique, c'est que pour faire une multiplication, on ne fait que des additions.

Un jeu de bâtons compte au moins onze baguettes : de zéro à neuf (le zéro peut-être utile quand il n'est pas en dernière position pour 107 par exemple), ainsi qu'un index. Chaque baguette est formée de dix cases, celle du haut indique le numéro de la table et les autres cases sont divisées avec une diagonale, qui part du haut à droite. Les diagonales placent de manière spécifique chaque unité et chaque dizaine obtenues par les produits de zéro à neuf. Quand les bâtons sont rangés, ils forment une table de Pythagore. Cette technique permet d'écrire chaque nombre avec le décalage adéquat pour réaliser une multiplication. Tous les chiffres qui sont dans une même diagonale appartiennent au même rang dans le nombre résultat (par rang nous entendons unité, dizaine, etc.). Par contre, il faut que l'utilisateur fasse le report des retenues (quand l'addition réalisée dans la diagonale donne plus que neuf), la retenue se reporte dans la diagonale immédiatement à gauche.

En réalité, chaque bâton comportait quatre faces utilisables, ce qui permettait de pouvoir utiliser un même chiffre plusieurs fois dans un nombre.

3. Les réglettes de Genaille-Lucas

Édouard Lucas est un mathématicien français qui proposa d'améliorer les bâtons de Néper, c'est-à-dire de rendre automatiques certains calculs. C'est Henri Genaille, un ingénieur français qui donna une réponse en 1885. Ces réglettes qui seront utilisées jusque dans les années 1910, permettent une lecture directe en supprimant les additions intermédiaires. On soulève ici l'étude des retenues lors des multiplications. Tout d'abord, quelle est la retenue maximale possible pour une addition de deux nombres ? Et pour une multiplication de deux nombres ?

Comme pour les bâtons de Néper, on a une réglette par chiffre, de zéro à neuf, et un index. Pour comprendre le mode de fonctionnement, regardons par exemple comment la baguette du trois est construite. Mettons l'index à gauche de la baguette du trois. Comme souvent en mathématiques, nous regardons un exemple particulier qui nous sert de base pour étendre notre raisonnement au cas général.

La question est alors : *Comment lire le résultat de trois fois un, trois fois deux, trois fois trois etc. sur ces réglettes ?* Le principe est que chaque réglette possède une colonne à droite où sont inscrites les unités, en haut de chaque case. Pour la dizaine il suffit de suivre le triangle. Trois fois un : trois unités puis pour la dizaine on lit zéro, donc le résultat est bien trois. Et pour quatre fois trois ? L'unité en haut à droite est deux et le triangle nous amène vers la dizaine : un, on a bien quatre fois trois qui donne 12. Et six fois trois ? Ça fait bien 18 ! On remarque que parfois deux triangles de lecture sont nécessaires à l'intérieur d'une même case (pour trois, six, huit et neuf fois trois). On réfléchira à ceci par la suite. Essayons d'abord de comprendre comment chaque bâton est construit.

Rappelons que le progrès de ces bâtons est qu'ils gèrent la retenue lorsque l'on multiplie un nombre par un chiffre, par exemple 567 fois 9. Par rapport à Néper, on n'a plus l'addition en diagonale à effectuer, ce sont les réglettes qui le gèrent. Par contre comme pour Néper, lorsque l'on multiplie deux nombres à plusieurs chiffres (9 312 fois 109), les additions sont à effectuer par l'utilisateur.

Regardons maintenant l'index en changeant les réglettes. Dans la ligne du un, avec comme dizaine possible zéro car au maximum on peut avoir neuf (neuf fois un). Dans celle du deux, au maximum $2\times9=18$, la dizaine envisageable est donc zéro ou un et ainsi de suite. L'index se construit donc en énumérant les dizaines possibles pour la multiplication de deux chiffres.

Ensuite nous allons réfléchir au fait qu'il est nécessaire, sur chaque réglette de table, de pouvoir incrémenter de un le résultat obtenu pour les unités. Ceci est nécessaire si l'on veut pouvoir mettre les réglettes à la suite pour réaliser des multiplications. La question à se poser est : *Quelles sont les retenues envisageables lors des multiplications ?* Pour les additions la réponse est simple : au maximum, c'est un de retenue (9+9=18), c'est le mécanisme du boulier, des additionneuses ou de la Pascaline. Après neuf, on passe une retenue à gauche et on remet le compteur à zéro, c'est dix ! Pour les multiplications ce n'est pas immédiat, les retenues possibles dépendent de la table, par exemple pour cinq, c'est quatre (9×5=45), pour sept, c'est six (9×7=63), etc. Même si on a déjà une retenue au rang inférieur, ça ne change pas la retenue maximale (tableau suivant). On comprend maintenant l'intérêt des triangles de lecture : ils décalent en prenant compte de la retenue et permettent une lecture directe.

Table (ou multiplicande)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Résultat maximum	9	18	27	36	45	54	63	72	81
Dizaine ou retenue possible	0	0, 1	0, 1, 2	0, 1, 2, 3	0, 1, 2, 3, 4	0, 1, 2, 3, 4, 5	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

Tableau 4 : Retenues possibles pour les multiplications

$$\begin{array}{rccc} & & 7 & 2 \\ \times & & & 5 \\ \hline & & 1 & 0 \\ + & 3 & 5 & 0 \\ \hline & 3 & 6 & 0 \end{array}$$

Regardons l'exemple 72 fois 5. Si on regarde les deux réglettes séparément : 5×2=10, on lit zéro unité et une dizaine c'est-à-dire que le triangle de lecture se décalera de un si on place une autre réglette entre l'index et celle de deux, ici ce sera celle du sept. 70×5=350, mais avec le décalage on lit bien 360. Si on cherche directement le résultat de 72 fois 5 : dans les unités, on lit zéro puis pour les dizaines six (le triangle fait passer du cinq au six avec la retenue de un) puis trois centaines, c'est-à-dire 360. La décomposition ci-contre permet de visualiser cela.

$$\begin{array}{rccc} & & 7 & 8 \\ \times & & & 7 \\ \hline & & 5 & 6 \\ + & {}^{1}4 & 9 & 0 \\ \hline & 5 & 4 & 6 \end{array}$$

Pour l'exemple 78 fois 7. De combien va être la retenue à reporter dans les dizaines ? De cinq car 8×7=56 et 7×70=490, le triangle de lecture va faire passer du neuf au quatre. Dans cet exemple, il faut aussi gérer la retenue obtenue dans les centaines et qui provient de l'addition dans les dizaines (9+4), elle est donc de un (comme pour les additions). On a donc cinq dans les centaines (4+1) et le résultat est 546. Regardons de plus près l'exemple de sept fois sept avec le triangle supérieur on lit 49, dès que la retenue est égale à un, on passe à 50. En effet, dans les dizaines on passe du quatre au cinq et c'est ce que permet de réaliser le rectangle inférieur.

On peut généraliser ce passage de 19 à 20, de 29 à 30, de 39 à 40, etc. Si on observe une réglette on s'aperçoit bien qu'à chaque fois que l'unité passe de neuf à zéro, on change de triangle de lecture qui décale pour gérer la retenue.

4. Multiplication : l'exemple de 632 par 83

Regardons les différentes techniques de multiplication.

- Multiplication per gelosia (ou par grillage)

	6	**3**	**2**
8	^{1}4 / 8	^{1}2 / 4	^{1}1 / 6
3	1 / 8	0 / 9	0 / 6
52	**4**	**5**	**6**

- Méthode traditionnelle (ou de Fibonacci ou à l'italienne)

632×83 = 632×3 + 632×80

			6	3	2	
		×		8	3	
		^{1}1	^{1}8	9	6	3×632
+	5	0	5	6	0	80×632
	5	2	4	5	6	

- Méthode par décomposition

632×83 = 3×2 + 3×30 + 3×600 + 80×2 + 80×30 + 80×600.

			6	3	2	
		×		8	3	
					6	3×2
+				9	0	3×30
+		^{1}1	^{1}8	0	0	3×600
+			1	6	0	80×2
+		2	4	0	0	80×30
+	^{1}4	8	0	0	0	80×600
	5	2	4	5	6	

- Avec les bâtons de Néper (dessin de la page suivante à gauche)

632×83 = 632×8×10 + 632×3 = 50560 + 1896. On place l'index à gauche et les bâtons du six, du trois et du deux à la suite. Attention à ne pas oublier les retenues.

- Avec les réglettes de Genaille-Lucas (dessin de la page suivante à droite)

632×83 = 632×8×10 + 632×3 = 50560 + 1896.

On place l'index à gauche et les bâtons du six, du trois et du deux à la suite. Ici les retenues sont gérées par les réglettes. On commence la lecture par les unités, les triangles noirs indiquent le sens de lecture.

×	6	3	2
1	0 / 6	0 / 3	0 / 2
2	1 / 2	0 / 6	0 / 4
3	**1** / **8**	**0** / **9**	**0** / **6**
4	2 / 4	1 / 2	0 / 8
5	3 / 0	1 / 5	1 / 0
6	3 / 6	1 / 8	1 / 2
7	4 / 2	2 / 1	1 / 4
8	**4** / **8**	**2** / **4**	**1** / **6**
9	5 / 4	2 / 7	1 / 8

×		6	3	2
1	0	6	3	2
2	0	2	6	4
	1	3	7	5
3	0	**8**	**9**	**6**
	1	9	0	7
	2	0	1	8
4	0	4	2	8
	1	5	3	9
	2	6	4	0
	3	7	5	1
5	0	0	5	0
	1	1	6	1
	2	2	7	2
	3	3	8	3
	4	4	9	4
6	0	6	8	2
	1	7	9	3
	2	8	0	4
	3	9	1	5
	4	0	2	6
	5	1	3	7
7	0	2	1	4
	1	3	2	5
	2	4	3	6
	3	5	4	7
	4	6	5	8
	5	7	6	9
	6	8	7	0
8	0	8	4	**6**
	1	9	**5**	7
	2	**0**	6	8
	3	1	7	9
	4	2	8	0
	5	3	9	1
	6	4	0	2
	7	5	1	3
9	0	4	7	8
	1	5	8	9
	2	6	9	0
	3	7	0	1
	4	8	1	2
	5	9	2	3
	6	0	3	4
	7	1	4	5
	8	2	5	6

5. La division avec des bâtons

Tout d'abord, reprenons la remarque de Lucas concernant la division avec les bâtons de Néper. Dans son ouvrage sur la *Théorie des nombres* (1891), il consacre un chapitre à la division des nombres entiers et en particulier un paragraphe sur la *division accélérée* (p 40-41). La division accélérée permet de simplifier les calculs lorsque le diviseur possède beaucoup de chiffres. De plus, " Cette méthode, très pratique, supprime les essais pour déterminer chaque chiffre du quotient ; elle est surtout avantageuse lorsqu'il s'agit de diviser plusieurs nombres par un même diviseur. " Tout d'abord, on calcule les dix premiers multiples du diviseur. Pour cela on a deux méthodes : soit " par des additions successives, avec preuve au moyen du dixième multiple " ; soit avec une lecture directe des multiples sur les bâtons de Néper. Ensuite, " l'opération se réduit à une suite de soustractions ". (Lucas, 1891)

Exemple :

Effectuons 55 123 ÷ 4 382 avec cette méthode et les bâtons de Néper. Avec les bâtons de Néper, on obtient les multiples de 4 382 (en plaçant les bâtons 4, 3, 8, 2 à côté de l'index) :

1×4 382 = 4 382
2×4 382 = 8 764
3×4 382 = 13 146
4×4 382 = 17 528
5×4 382 = 21 910
6×4 382 = 26 292
7×4 382 = 30 674
8×4 382 = 35 056
9×4 382 = 39 438
10×4 382 = 43 820

Puis on effectue les soustractions :

55 123 − 43 820 = 11 303 et 11 303− 8 764 = 2 539. Ainsi, le quotient est 12 et :

55 123 = 4 382 × 12 + 2 539

À la fin du 19ème siècle, Lucas et Genaille ont mis au point des réglettes pour divisions appelées *réglettes multisectrices*. Tout comme pour les *réglettes multiplicatrices*, la lecture est directe pour l'utilisateur[8]. L'utilisation de ces réglettes est a priori un peu magique. Pour l'enseignement des mathématiques elles sont intéressantes lorsque l'on se pose la question de savoir comment elles ont été fabriquées. À quelles questions doit-on avoir répondu pour construire des réglettes sans modèle ? Quels sont les quotients possibles, les restes possibles étant donnés un diviseur, un dividende ?

6. Une progression pour la classe

- Avec les bâtons de Néper

Effectuer : 582×2, 582×6, 582×9, 753×27, 753×67.

Réponses :

582×2=1 164

[8] Pour un modèle des réglettes multisectrices, voir http://infohost.nmt.edu/~borchers/napier/napier.html

582×6=3 492

582×9=5 238 (retenue)

753×27=2 0331, on a deux méthodes de résolution :

Soit on utilise la propriété 753×27=753×(20+7)=(753×2×10)+(753×7) et on utilise les bâtons de Néper sur les lignes du deux et du sept, sans oublier de multiplier le résultat de la multiplication par deux, par dix. Ensuite on fait l'addition finale. C'est-à-dire 753×27 = 15 060 + 5 271 = 20 331.

Soit on réécrit les lignes du deux et du sept l'une en dessous de l'autre et on effectue les additions par diagonales. Ce qui revient à faire une multiplication avec la méthode des grillages (ci-dessous à gauche). Et on vérifie bien l'égalité avec la décomposition (ci-dessous à droite).

	7	**5**	**3**
2	$^{1}1$ / 4	$^{1}1$ / 0	$^{1}0$ / 6
7	4 / 9	3 / 5	2 / 1
20	**3**	**3**	**1**

$$\begin{array}{rrrrrrl} & & & 7 & 5 & 3 & \\ & \times & & & 2 & 7 & \\ \hline & & & & 2 & 1 & 7\times3 \\ + & & & 3 & 5 & 0 & 7\times50 \\ + & & 4 & 9 & 0 & 0 & 7\times700 \\ + & & & & 6 & 0 & 20\times3 \\ + & & 1 & 0 & 0 & 0 & 20\times50 \\ + & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 20\times700 \\ \hline & 2 & 0 & 3 & 3 & 1 & \end{array}$$

- Avec les réglettes de Genaille-Lucas

Effectuer 524×7, 584×7, 619×82.

Réponses :

524×7=3 668

584×7=4 088

Regardons les décompositions des deux opérations précédentes :

$$\begin{array}{rrrrrl} & & 5 & 2 & 4 & \\ & \times & & & 7 & \\ \hline & & & 2 & 8 & 7\times4 \\ + & & 1 & 4 & 0 & 7\times20 \\ + & 3 & 5 & 0 & 0 & 7\times500 \\ \hline & \mathbf{3} & 6 & 6 & 8 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrrl} & & 5 & 8 & 4 & \\ & \times & & & 7 & \\ \hline & & & 2 & 8 & 7\times4 \\ + & & 5 & 6 & 0 & 7\times80 \\ + & {}^{1}3 & 5 & 0 & 0 & 7\times500 \\ \hline & \mathbf{4} & 0 & 8 & 8 & \end{array}$$

Pour 584×7, on change de triangle de lecture pour les milliers et on passe de trois milliers à quatre milliers.

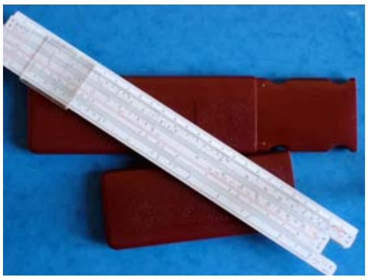
619×82=50 758, on utilise la propriété suivante :

619×82 = 619×8×10 + 619×2 = 49 520+1 238=50 758. La lecture s'effectue sur les lignes du huit puis du deux, sans oublier de multiplier la ligne du huit, par dix avant l'addition finale.

Fiche 5 : L’étude de la règle à calcul

1. Le principe de la règle à calcul

Les règles à calculs permettent de réaliser diverses opérations : additions, soustractions, multiplications, divisions, racines carrées, cubes, calculs trigonométriques… Elles étaient utilisées par les ingénieurs, physiciens et étudiants jusque dans les années 1970, avant l’arrivée des calculatrices électroniques. Elles ont été mises au point dès les années 1620 et leur forme actuelle date du milieu du $18^{\text{ème}}$ siècle. Elles ont été très utilisées en Europe du milieu du $19^{\text{ème}}$ à la fin du $20^{\text{ème}}$ siècle.



La règle à calcul commercialisée

La règle à calcul fabriquée par un enfant de CM2

Pour les additions, le principe est de mettre à la suite des longueurs : pour effectuer 7+9, on reporte une longueur de neuf (cm) à la suite d’une de sept (cm) pour avoir le résultat. On peut aussi faire des soustractions, dans l’autre sens. On commence la graduation à zéro qui est l’élément neutre de l’addition. On peut travailler les nombres décimaux en rajoutant des sous-graduations de 0,5 ou 0,2 ou 0,1.

Pour les multiplications, c’est une autre échelle non linéaire que l’on utilise : une échelle logarithme. Cette invention provient d’un mathématicien écossais John Néper au $17^{\text{ème}}$ siècle. Avec l’échelle logarithmique, on n’a plus la même distance entre deux entiers consécutifs comme c’est le cas pour l’addition. Ici la graduation commence à un (élément neutre de la multiplication) et on remarque que l’on a le même espacement entre 1 et 2, entre 2 et $4=2\times2=2^2$, entre 4 et $8=2\times2\times2=2^3$, entre 8 et $64=2\times2\times2\times2=2^4$, etc. La fonction logarithme népérien transforme en quelque sorte les multiplications en additions. C’est la formule $\ln(a\times b) = \ln a+\ln b$, pour $a>0$ et $b>0$. Et les divisions ? C’est aussi possible dans l’autre sens. On peut même imaginer encadrer des fractions.

La règle à calcul est un calculateur analogique, par opposition aux machines numériques qui ne calculent que sur des nombres. La règle à calcul utilise des relations mathématiques, par exemple les logarithmes pour effectuer des multiplications et des divisions.

2. Une progression pour la classe

On pourra effectuer des additions puis des soustractions avec des nombres entiers puis avec des décimaux. De même pour les multiplications et les divisions. On pourra aussi encadrer des fractions.

Par exemple : $5+7$, $9+12$, $21-5$, $130-70$, 9×7, $14\times2{,}5$, $48\div8$, $30\div4$, $10\div3$.

Réponses :

$5+7=12$, $9+12=21$, $21-5=16$

$130-70=60$, on utilise la propriété : $13\times10-7\times10=(13-7)\times10=6\times10$

$9\times7=63$

$14\times2{,}5=35$

$48\div8=6$

$30\div4=7{,}5$

$3<\frac{10}{3}<3{,}5$

Modèles

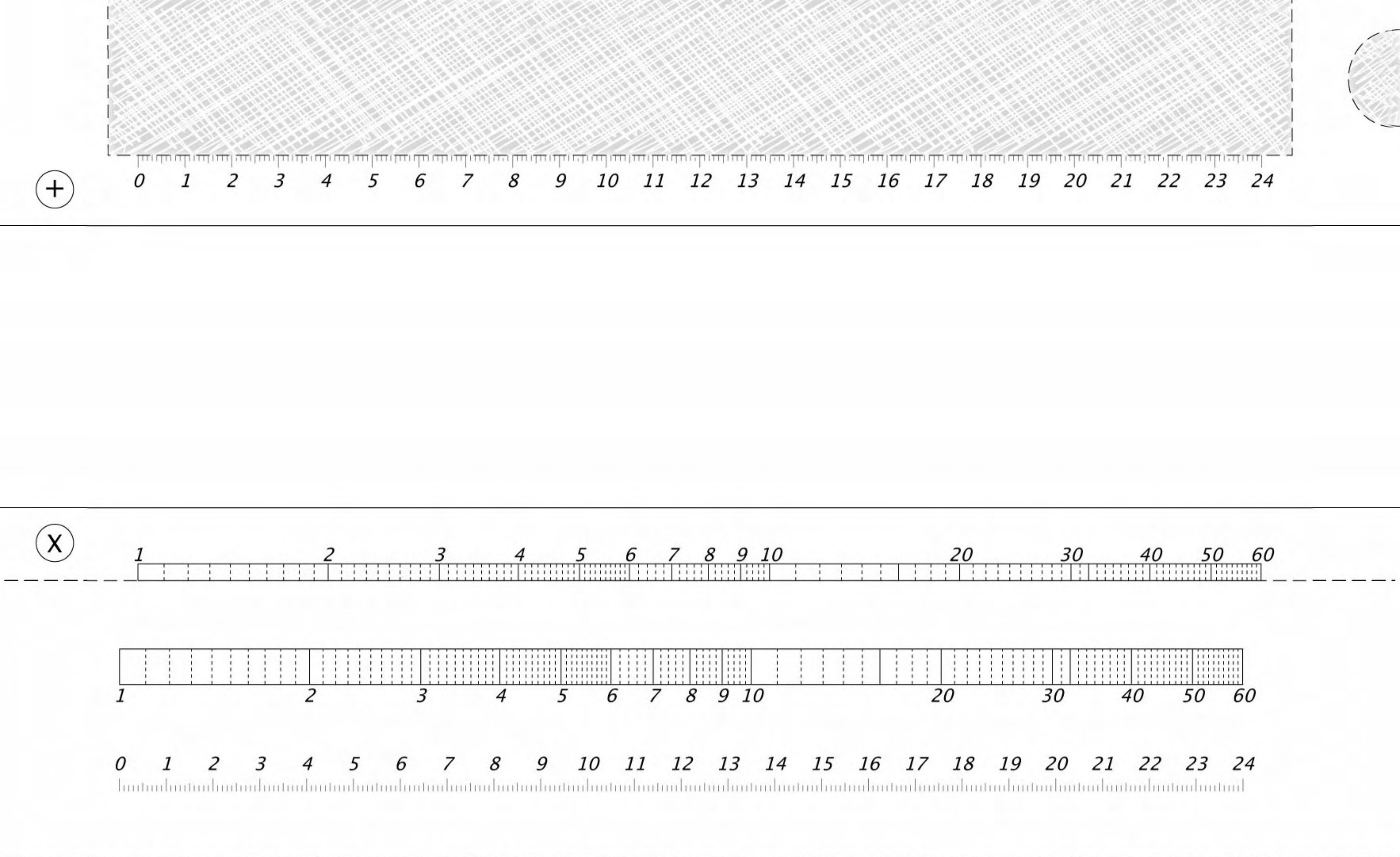
Modèle 1 : Les bâtons de Néper
Modèle 2 : Les réglettes de Genaille-Lucas
Modèles 3 et 4 : La règle à calcul

Les bâtons de Néper

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0 0	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7	0 8	0 9
2	0 0	0 2	0 4	0 6	0 8	1 0	1 2	1 4	1 6	1 8
3	0 0	0 3	0 6	0 9	1 2	1 5	1 8	2 1	2 4	2 7
4	0 0	0 4	0 8	1 2	1 6	2 0	2 4	2 8	3 2	3 6
5	0 0	0 5	1 0	1 5	2 0	2 5	3 0	3 5	4 0	4 5
6	0 0	0 6	1 2	1 8	2 4	3 0	3 6	4 2	4 8	5 4
7	0 0	0 7	1 4	2 1	2 8	3 5	4 2	4 9	5 6	6 3
8	0 0	0 8	1 6	2 4	3 2	4 0	4 8	5 6	6 4	7 2
9	0 0	0 9	1 8	2 7	3 6	4 5	5 4	6 3	7 2	8 1

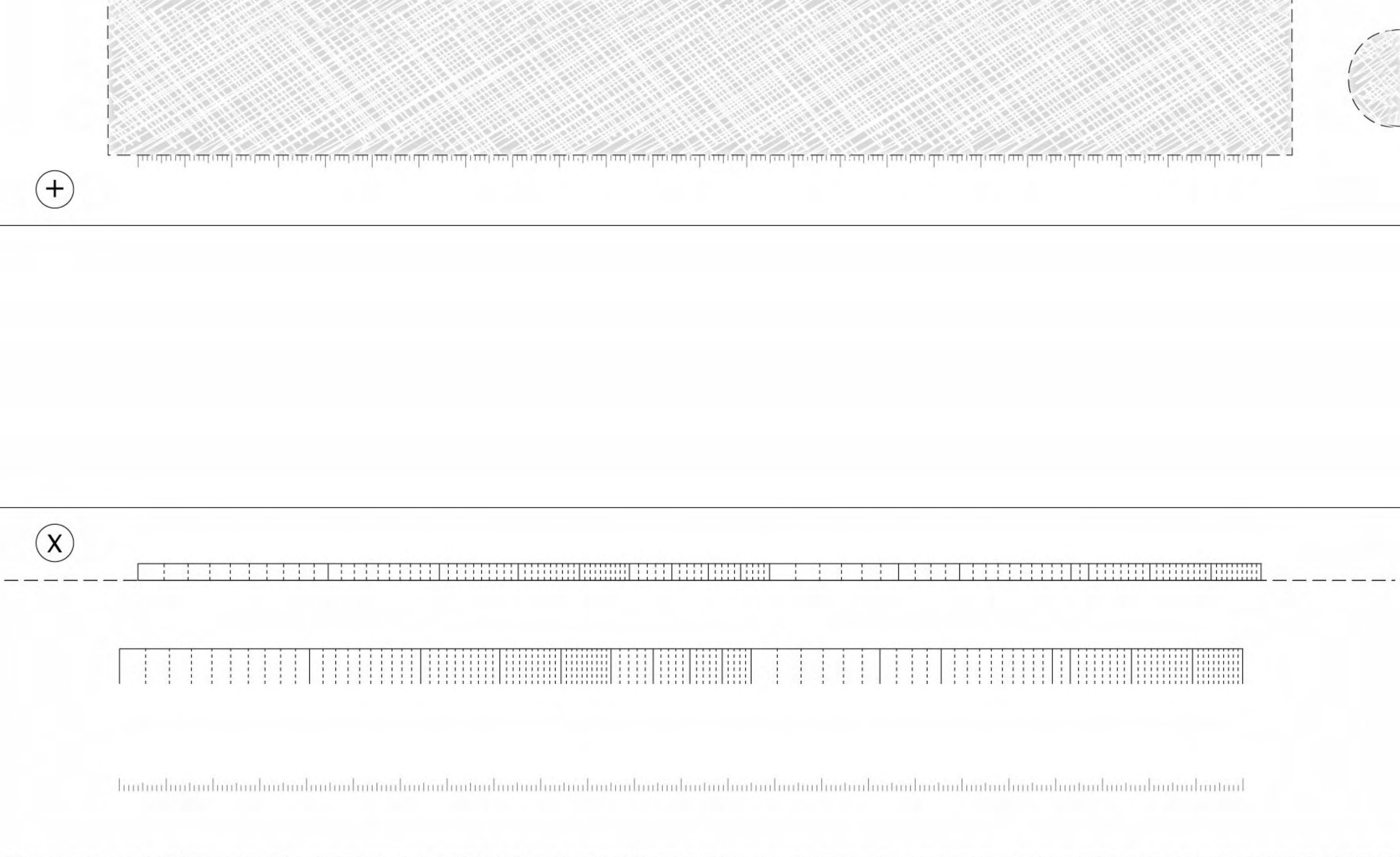
Les réglettes de Genaille-Lucas

×		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0 1	0 1	2 3	4 5	6 7	8 9	0 1	2 3	4 5	6 7	8 9
3	0 1 2	0 1 2	3 4 5	6 7 8	9 0 1	2 3 4	5 6 7	8 9 0	1 2 3	4 5 6	7 8 9
4	0 1 2 3	0 1 2 3	4 5 6 7	8 9 0 1	2 3 4 5	6 7 8 9	0 1 2 3	4 5 6 7	8 9 0 1	2 3 4 5	6 7 8 9
5	0 1 2 3 4	0 1 2 3 4	5 6 7 8 9	0 1 2 3 4	5 6 7 8 9	0 1 2 3 4	5 6 7 8 9	0 1 2 3 4	5 6 7 8 9	0 1 2 3 4	5 6 7 8 9
6	0 1 2 3 4 5	0 1 2 3 4 5	6 7 8 9 0 1	2 3 4 5 6 7	8 9 0 1 2 3	4 5 6 7 8 9	0 1 2 3 4 5	6 7 8 9 0 1	2 3 4 5 6 7	8 9 0 1 2 3	4 5 6 7 8 9
7	0 1 2 3 4 5 6	0 1 2 3 4 5 6	7 8 9 0 1 2 3	4 5 6 7 8 9 0	1 2 3 4 5 6 7	8 9 0 1 2 3 4	5 6 7 8 9 0 1	2 3 4 5 6 7 8	9 0 1 2 3 4 5	6 7 8 9 0 1 2	3 4 5 6 7 8 9
8	0 1 2 3 4 5 6 7	0 1 2 3 4 5 6 7	8 9 0 1 2 3 4 5	6 7 8 9 0 1 2 3	4 5 6 7 8 9 0 1	2 3 4 5 6 7 8 9	0 1 2 3 4 5 6 7	8 9 0 1 2 3 4 5	6 7 8 9 0 1 2 3	4 5 6 7 8 9 0 1	2 3 4 5 6 7 8 9
9	0 1 2 3 4 5 6 7 8	0 1 2 3 4 5 6 7 8	9 0 1 2 3 4 5 6 7	8 9 0 1 2 3 4 5 6	7 8 9 0 1 2 3 4 5	6 7 8 9 0 1 2 3 4	5 6 7 8 9 0 1 2 3	4 5 6 7 8 9 0 1 2	3 4 5 6 7 8 9 0 1	2 3 4 5 6 7 8 9 0	1 2 3 4 5 6 7 8 9



LA RÈGLE À CALCUL

Découper les pointillés, enlever les parties grisées et plier les traits pleins.



LA RÈGLE À CALCUL

Découper les pointillés, enlever les parties grisées et plier les traits pleins.