Calcul et géométrie :
résoudre des équations algébriques

Comment le calcul de l'arithmétique se rapporte aux opérations de géométrie

Le thème de la résolution des équations algébriques $P(x) = 0$, où P est un polynôme, a constitué le cœur de l'algèbre, depuis la plus haute Antiquité jusqu'au dix-neuvième siècle. Ses problèmes sont clos depuis 1830.

À côté de techniques purement algébriques de détermination des racines (par exemple à l'aide d'extractions de racines carrées ou cubiques - la double intervention de ce mot n'étant naturellement pas un hasard), la géométrie a aussi joué un rôle essentiel dans ces résolutions ; étudier avec quelques détails ses interventions est à la base de ce texte-ci.

1 Le calendrier

Voici les dates essentielles (et approximatives : ainsi plusieurs années peuvent s'écouler entre la conception et la diffusion d'une idée). Elles concernent tantôt l'œuvre de créateurs (Del Ferro, Descartes, Galois...), tantôt celle de compilateurs qui ont joué un rôle essentiel de dissémination des techniques (Euclide, Cardan...), les noms d'Euclide et Descartes se détachant tout particulièrement pour ce qui concerne les méthodes géométriques :

- Babylone ($\sim$1800 avant Jésus-Christ ?)
- Euclide ($\sim$300 avant Jésus-Christ)
- Diophante ($\sim$250 après Jésus-Christ)
- Al Khwârizmi ($\sim$825)
- Del Ferro (1515)
- Cardan (1545)

- Viète (1593)
- Descartes (1637)
- Newton (1671) et Raphson (1690)
- Lagrange (1770)
- Abel (1821)
- Galois (1830).

Cet ensemble de recherches couvre donc approximativement trente-cinq siècles, ou même davantage.

2 Équations du premier et du second degré

Les premières ($ax + b = 0$) sont immédiates à résoudre : il existe une solution unique, à savoir $x = -\frac{b}{a}$ car a est supposé non nul (sinon l'on ne parlerait pas de premier degré).

Les secondes ($ax^2 + bx + c = 0$) sont bien connues de nos élèves de lycée. Leurs résolutions dépendent du corps dans lequel figurent coefficients (a, b, c) et les diverses racines possibles (x).

Le cas le plus simple est celui des nombres réels. Le calcul commence par la détermination du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$; si celui-ci est strictement positif, il existe deux solutions (distinctes) données par les égalités :

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\,;$$

s'il est nul, il y en a une seule, à savoir $x = -\frac{b}{2a}\cdot$ Enfin, si Δ est strictement négatif, il n'y a aucune solution.

La notion de racine unique (nous disons *racine double*) était connue par exemple de Diophante au troisième siècle avant Jésus-Christ puisqu'il étudie l'équation $x^2 + 4 = 4x$ pour lequel 2 est racine double (IV 22, trad. Ver Eecke p. 139). Nous verrons que cette notion joue un rôle très important dans la naissance de l'algorithme cartésien pour déterminer des normales à une courbe.

2.1 La règle de Colin MacLaurin

Voici le texte de la traduction française par Le Cozic de 1753 du *Traité d'Algèbre, et de la manière de l'appliquer* publié en 1748 deux ans après la mort de son auteur écossais Colin MacLaurin, pour ce qui concerne l'équation générale du second degré.

À la différence de notre usage, cet algorithme est donné de façon purement verbale, sans aucune formule : il est vrai que la règle en question est immédiatement suivie de l'exemple de l'équation $y^2 + ay = b$. On doit noter également qu'il n'y a aucune allusion au cas des racines complexes, mais que le calcul effectif en tient compte de manière correcte.

`Règle.`

1^o. `Transporter tous les termes qui contiennent l'inconnue dans un membre de l'équation, & tous les terme connus dans l'autre membre.`

2^o. `Si le quarré de l'inconnue est multiplié par quelque quantité, divisez tous les termes de l'équation par cette quantité.`

3^o. `Formez le quarré de la moitié de la quantité qui multiplie l'inconnue simple, ajoutez-le dans l'un & l'autre membre de l'équation, & par ce moyen, le membre qui renferme l'inconnue sera un quarré parfait.`

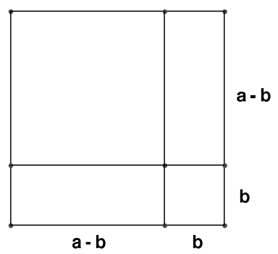
4^o. `Tirez la racinne quarrée de l'un & l'autre membre, qui, dans l'un, sera toujours l'inconnue avec la moitié de la quantité qui multipliait l'inconnue simple ; de sorte, qu'en transposant cette moitié, on aura la valeur de l'inconnue.`

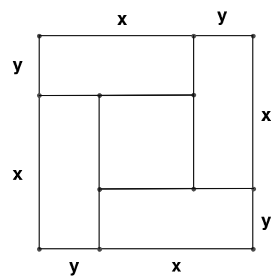
On peut reconnaître ici, non sans quelque peine, notre mode opératoire. Rappelons pour sourire une histoire qu'aimait raconter le grand mathématicien Laurent Schwartz : lors d'une inspection un élève, ayant à résoudre l'équation $x^2+x+2=0$ et voulant honorer son professeur, calcule soigneusement $\Delta = -7$ et lance la litanie traditionnelle : *Si -7 est strictement positif, alors...*

Ce mode opératoire est connu sous le nom de *complétion du carré*. Il peut naturellement se justifier de façon purement algébrique, par exemple en démontrant l'une des identités remarquables suivantes :

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2, \qquad a^2-b^2 = (a-b)\,(a+b), \qquad (x+y)^2-(x-y)^2 = 4xy.$$

Elles-mêmes ont souvent été prouvées géométriquement au cours de l'histoire. Voici par exemple une figure permettant de justifier les deux dernières :





À chaque fois, il suffit en effet de calculer de deux manières différentes l'aire d'un carré, ce qui donne respectivement :

$$a^2 = b^2 + 2b\,(a-b) + (a-b)^2 = b^2 + (b+a)\,(b-a), \qquad (x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy.$$

Ainsi, il suffit de poser $y = 2p - x$ (supposé positif ou nul) sur la seconde figure pour en déduire l'équivalence des deux relations $x^2 - 2px + q = 0$ et $(x-p)^2 = p^2 - q$.

2.2 Les équations du second degré sur un corps quelconque

Dans le cas général d'une équation du second degré sur un corps quelconque, la méthode précédente s'étend facilement : on remplace par exemple la condition $\Delta < 0$ par le fait que Δ n'appartient pas à l'ensemble des carrés du corps. C'est notamment le cas pour l'ensemble des nombres complexes, connu dès le seizième siècle, dans lequel toute équation du second degré a toujours au moins une solution (deux si Δ n'est pas nul).

Il y a pourtant exception notable lorsque le corps est de caractéristique 2 (c'est-à-dire où $1+1=0$) : ici la question est bien plus complexe (sauf si $b=0$, auquel cas l'équation est du type $x^2 = d$ et a une solution, unique, si et seulement si d est un carré du corps ; c'est toujours le cas si le corps est fini, car l'application $x \mapsto x^2$ est injective). Dans le cas général, l'équation se met sous la forme $x^2 + x = d$ en remplaçant l'inconnue x par $\dfrac{b}{a}\,x$; on ne peut guère aller plus loin vers un algorithme de résolution qui puisse s'appliquer à tous les cas.

Signalons simplement que dans le cas particulier où le corps est fini, c'est-à-dire ici de cardinal 2^n, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait des racines s'écrit :

$$T(x) = 0 \qquad \text{où} \quad T(x) = \sum_{m=1}^{n} x^{2^{m-1}}.$$

Mais, même dans ce cas favorable, la recherche effective des racines n'est pas simple et repose essentiellement sur une série d'essais successifs (pas de formules générales comme chez les nombres réels). On voit donc ainsi que, si innocente qu'elle puisse paraître, la simple équation du second degré peut cacher des coins assez sombres, même pour l'arsenal perfectionné de notre siècle.

2.3 Les formes réduites

Dans les exemples qui suivront, pour la simplicité de l'exposé, nous ne nous intéresserons qu'aux équations particulières commodes :

$$x^2 + 2px = q, \qquad x^2 = 2px + q, \qquad x^2 + q = 2px$$

respectivement appelées équations *positives*, *négatives* et *ambiguës* (ces dénominations sont dues à Viète).

Naturellement les nombres x, p et q sont positifs ou nuls. Mais il ne faut pas oublier que ces formes réduites sont modernes, et que Viète, comme les anciens, étudiait plutôt ce que nous écririons, avec les notations dues à Descartes, sous les formes générales $ax^2 + bx = c$, $ax^2 = bx + c$ et $ax^2 + c = bx$.

Il existe également une quatrième forme, à savoir $x^2 + 2px + q = 0$, qui ne possède aucune racine positive sauf peut-être 0 ; elle se ramène immédiatement aux équations ambiguës en changeant x en $-x$. Jusqu'à Descartes y compris, cette forme restera donc volontairement ignorée.

Dans ces trois cas, l'équation considérée admet comme solutions (nécessairement positives) :

- une racine unique $x = \sqrt{p^2 + q} - p$ pour une équation positive ;
- une racine unique $x = p + \sqrt{p^2 + q}$ pour une équation négative ;
- aucune racine si $p^2 < q$, une racine unique $x = p$ si $p^2 = q$ et deux racines distinctes $x = p + \sqrt{p^2 - q}$ et $x = p - \sqrt{p^2 - q}$ si $p^2 > q$ pour une équation ambiguë.

La racine négative d'une équation non ambiguë a pour valeur absolue la racine positive de l'autre équation non ambiguë ayant les mêmes coefficients.

Naturellement, x et p sont de dimension 1 (longueurs de segments) et q de dimension 2 (par exemple aire de rectangle) alors que dans le cas général a et x sont de dimension 1, b de dimension 2 et c de dimension 3.

3 Les calculs babyloniens

Sans aucun doute les motivations babyloniennes pour résoudre des équations du premier et du second degré étaient-elles principalement géométriques ; cela dit, ce que nous lisons sur les tablettes qui nous sont parvenues est essentiellement constitué de calculs sans figures. Rappelons que la base de numération est soixante : nous noterons ainsi, par exemple pour des commodités de lecture, les rationnels $\dfrac{49}{16} = 3 + \dfrac{3}{60} + \dfrac{45}{3600}$ et $\dfrac{275}{4} = 1 \cdot 60 + 8 + \dfrac{45}{60}$ sous les formes respectives $3'3''45'''$ et $1^0 8'45''$ qui rappellent les unités de temps et d'angles.

• Le premier exemple présenté ici est celui de la tablette YBC 4663, où il s'agit de déterminer les côtés x et y d'un rectangle d'aire $xy = 7'30''$ $\left(= \dfrac{15}{2}\right)$ et de demi-périmètre $x + y = 6'30''$ $\left(= \dfrac{13}{2}\right)$, donc, pour un moderne, de résoudre l'équation ambiguë

$$x^2 + \frac{15}{2} = \frac{13}{2}\,x$$

de racines $1'30''$ $\left(= \dfrac{3}{2}\right)$ et $5'$ $(= 5)$.

Voici le détail des calculs :

$$\begin{aligned}
\frac{x+y}{2} &= 3'15'' \quad \left(= \frac{13}{4}\right), \\
\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 &= 10'33''45''' \quad \left(= \frac{169}{16}\right), \\
\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy &= 3'3''45''' \quad \left(= \frac{49}{16}\right), \\
\sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy} &= 1'45'' \quad \left(= \frac{7}{4}\right), \\
\frac{x+y}{2} + \sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy} &= 5' \quad (= 5), \\
\frac{x+y}{2} - \sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy} &= 1'30'' \quad \left(= \frac{3}{2}\right).
\end{aligned}$$

Ces calculs sont effectués sans justification ; ils reposent sur l'identité remarquable déjà citée :

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = xy$$

qui n'est qu'une variante de l'identité $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

• Une seconde tablette, BM 13901, traite notamment, toujours sans démonstration, de l'équation positive $ax^2 + bx = c$, particularisée en $11x^2 + 7x = 6'15''$ $\left(= \dfrac{25}{4}\right)$, de racine positive unique $30'$ $\left(= \dfrac{1}{2}\right)$.

Voici le détail des calculs :

$$ac = 1^0 8'45'' \quad \left(= \frac{275}{4}\right),$$

$$\begin{aligned}
\frac{b}{2} &= 3'30'' \quad \left(=\frac{7}{2}\right),\\
\left(\frac{b}{2}\right)^2 &= 12'15'' \quad \left(=\frac{49}{4}\right),\\
\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac &= 1^0 21' \quad (=81),\\
\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac} &= 9' \quad (=9),\\
\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac} - \frac{b}{2} &= 5'30'' \quad \left(=\frac{11}{2}\right).
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à diviser par a, c'est-à-dire alors de multiplier par l'inverse de a, c'est-à-dire $\frac{1}{11}\cdot$ Malheureusement, ce nombre n'est pas dans l'arsenal des Babyloniens, qui ne connaissent que les inverses qui s'écrivent avec un nombre fini de “décimales” à base soixante (comme d'ailleurs il en va de même dans notre système actuel de base 10). Heureusement, quelques tâtonnements montrent aussitôt que $5'30'' = 11 \cdot 30''$, ce qui permet de conclure.

Bien entendu le nombre de coïncidences qui font que cet exemple peut être correctement traité - la rencontre d'un carré parfait et cette divisibilité par 11 - ne laisse aucun doute sur la nature du problème : c'est un exercice ardu de formation pour de futurs calculateurs, et non la solution d'un problème concret.

La même tablette contient aussi l'équation positive $x^2 + x = 45''$, de racine évidente $x = 30''$, obtenue de la même manière.

Ces fois-ci, la légitimation de la technique repose certainement sur une méthode voisine de notre *complétion du carré*. S'il n'existe pas à notre connaissance de tablette babylonienne portant une figure géométrique très simple mais suffisante pour justifier les techniques de ces deux résolutions (et de nombreuses autres), cela ne signifie nullement que de telles preuves n'aient pas existé (voir le livre de référence sur ces questions : Jens Høyrup, *Lengths, Widths, Surfaces*, 2002, Springer Verlag).

4 Les équations chez Euclide

C'est ici que, pour la première fois, sont réunies de manière organisée des techniques générales de résolution d'équations du premier et du second degré. Cela dit, il est difficile de voir au premier coup d'œil quelles sont les parties qui en traitent : non seulement elles ne sont pas annoncées en tant que telles, mais pour les trouver il faut explorer plusieurs *Éléments*, dont le premier, le deuxième et le sixième.

Il ne s'agit pas en effet, comme on le ferait aujourd'hui d'algorithmes numériques : preuves et résolutions sont basées sur la géométrie classique (tracé de parallèles, perpendiculaires, arcs de cercle *etc*). Il faut dire que les algorithmes géométriques présentés ici ne peuvent pas être retrouvés tels quels dans les *Éléments* ; ces livres écrits par un intellectuel pour des intellectuels n'avaient pas pour but d'aligner des recettes, mais bien de méthodes générales qui, mises bout à bout, permettent de résoudre de nombreux problèmes comme ceux-ci.

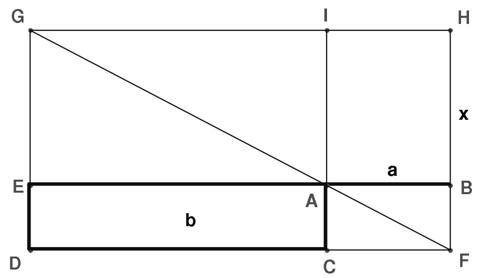
4.1 Le premier degré

Pour les Grecs, qui ne connaissent pas les nombres négatifs, la forme générale de l'équation du premier degré est $ax = b$, de solution $x = \frac{b}{a}$, où a, x et b sont des nombres positifs ou nuls.

En fait, les deux premiers d'entre eux sont des mesures de longueurs, le dernier étant une mesure d'aire (on dirait aujourd'hui qu'il est de dimension 2). Pour le représenter, Euclide utilise systématiquement une surface, triangulaire ou polygonale par exemple : pour simplifier, nous nous limiterons au cas où b est l'aire d'un rectangle.

Les Grecs connaissaient ce problème sous le nom d'*application des aires parabolique*.

La résolution repose essentiellement sur le théorème dit de Thalès : on la trouve dans la Proposition 44 du premier Élément (Heath I, p. 341). On part d'un segment AB de longueur a et d'un rectangle $ACDE$ d'aire b, le point A étant aligné avec les points B et E et situé entre eux. On peut suivre sur la figure la construction successive des points F, G, H et I en respectant les parallélismes et les alignements de la figure. L'inconnue x mesure la longueur BH : en effet les triangles FGH et GFD (resp. FAB et AFC, AGI et GAE) ont des aires égales par symétrie, d'où il découle que les rectangles $ACDE$ et $ABHI$ ont aussi des aires égales, respectivement égales à b et ax.



Comme souvent chez Euclide la figure joue ici un double rôle : permettre la démonstration d'une certaine égalité *si l'on suppose dans un premier temps le* *problème résolu*, et sinon indiquer un algorithme de construction effective de x à partir de a et b (pour lequel le point I est d'ailleurs inutile).

On verra plus loin qu'un Descartes, par exemple, partant du même théorème de Thalès, introduira une construction du même nombre x nettement plus naturelle, mais cela supposait un pas en avant psychologique essentiel : considérer, grâce à un segment unité donné à l'avance, que b pouvait être considéré comme un nombre analogue à a et x, pas que les anciens n'avaient évidemment pas franchi.

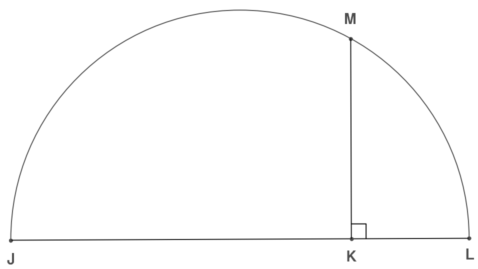
Désormais, dans la suite de ce texte, nous ne traiterons plus que des équations de degré supérieur ou égal à deux.

4.2 Le second degré

On ne trouve dans Euclide qu'une seule équation du second degré complètement résolue, à savoir $x^2 + ax = a^2$ (*couper en moyenne et extrême raison*), dans la trentième Proposition du sixième Élément (Heath II, p. 26 ?). Mais l'essentiel de la théorie s'y trouve magistralement décortiqué.

Toutes les résolutions algébriques de l'équation générale du second degré impliquent essentiellement la recherche de racines carrées. Construire géométriquement la racine carrée d'un nombre h demande l'intervention d'au moins un cercle. La méthode que nous trouvons dans Euclide est, encore aujourd'hui, insurpassable de simplicité ; tous ses successeurs l'emploieront.

Dans la figure ci-dessous, où JL est un diamètre, la longueur KM est la *moyenne géométrique* (ou la *moyenne proportionnelle*) des longueurs KJ et KL puisque l'on dispose, dans le triangle rectangle JML de l'égalité $KM^2 = KJ \cdot KL$. Pour construire $KM = \sqrt{h}$, il suffit donc que le produit $KJ \cdot KL$ soit égal à h, ce qui se peut par exemple en posant $KJ = 1$ et $KL = h$ ou toute autre combinaison possible comme $KJ = \lambda$ et $KL = \dfrac{h}{\lambda}\cdot$



Cette égalité $KM^2 = KJ \cdot KL$ joue, chez Euclide, le rôle de notre équation de cercle. On la trouve dans la trente-et-unième Proposition du Troisième Élément et la huitième Proposition du Sixième Élément (Heath II, pp. 61 et 209). À vrai dire, il ne s'agit là que d'une condition nécessaire pour que M appartienne au cercle de diamètre JL ; que cette condition soit aussi suffisante n'est pas écrit, mais c'et un corollaire immédiat de la treizième Proposition du sixième Élément (Heath II, p. 216). Tout cela sera suivi à la lettre par Descartes dans les toutes premières pages de *La Géométrie*, sans référence particulière à Euclide, mais c'est parce que ces choses simples étaient supposées être très familières à son lecteur.

Le travail de résolution géométrique d'une équation du second degré, disons par exemple ambiguë $x^2 + q = 2px$, se fait en deux temps : d'abord justifier (ici géométriquement) une identité algébrique qui permette d'affirmer que l'une des deux racines est $p - \sqrt{p^2 - q}$ lorsque cette expression a un sens, puis donner une construction de cette quantité à partir d'un segment de longueur p et d'un rectangle - par exemple - d'aire q.

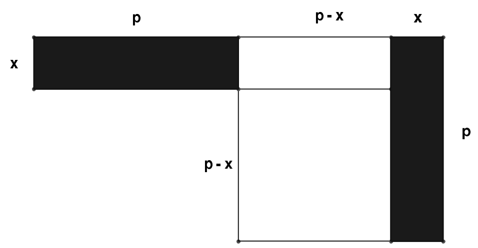
4.2.1 Justifications d'identités remarquables

Bien que le contenu de cette partie appartienne à Euclide, nous préférons en donner une interprétation plus proche de nos habitudes pour gagner en clarté (la lecture du texte original n'est pas toujours commode).

On en trouvera les textes sources en se reportant aux Propositions 5 et 6 du deuxième Élément (Heath I, pp. 382 et 385), et 27 à 29 du sixième Élément (Heath II, pp. 257 à 265) - ici le coefficient de x^2 n'est pas nécessairement égal à 1 -, où ces problèmes sont nommés *application des aires elliptique*, pour l'équation ambiguë, et *application des aires hyperbolique*, pour les deux autres.

Commençons donc par le premier cas (pour lequel Euclide ne considérera que la racine $x = p - \sqrt{p^2 - q}$, négligeant l'autre dont il connaissait pourtant évidemment l'existence et la valeur, puisque la méthode qu'il donne s'applique à elle pratiquement sans changement).

La figure ci-dessous suppose, comme c'est normalement le cas dans l'analyse d'un problème, que le problème est résolu et que nous connaissons donc un segment de longueur x solution de $x^2 + q = 2px$. Elle exhibe une plaque polygonale en forme d'équerre hexagonale, réunion de quatre plaques rectangulaires dont les longueurs des côtés sont explicitées.



En décomposant de deux manières différentes cette plaque en deux ou trois plaques rectangulaires simples, on aboutit facilement à l'égalité visuelle :

$$px + p^2 = x\,(2p - x) + (p - x)^2 + px$$

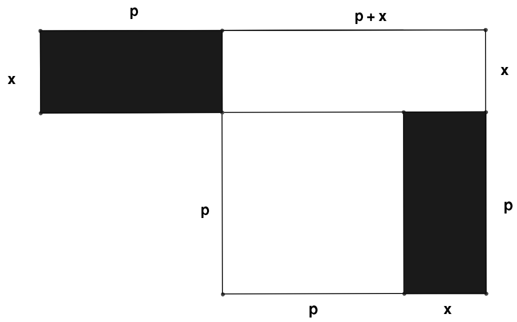
soit encore $p^2 = (2px - x^2) + (p - x)^2$. Par suite, pour que $x^2 + q = 2px$, il faut et il suffit que l'on dispose de l'égalité :

$$(p - x)^2 = p^2 - q$$

quantité supposée positive (voir à ce sujet la vingt-septième proposition).

Cette première intervention d'une figure géométrique permet de ramener, comme nous l'avions dit, la résolution à une prise de racine carrée. Il en sera de même pour les équations non ambiguës.

La nouvelle figure ci-dessous concerne une équation positive $x^2 + 2px = q$, dont il s'agit de montrer que l'unique racine positive est $x = \sqrt{p^2 + q} - p$.



Cette fois-ci, l'égalité visuelle est :

$$px + (p + x)^2 = x\,(2p + x) + p^2 + px$$

soit encore $(p + x)^2 = (2px + x^2) + p^2$. La condition nécessaire $(x^2 - 2px) + p^2$ et suffisante s'écrit donc bien $(p + x)^2 = q + p^2$.

Comme il arrive souvent dans ce livre qui ne veut donner que des méthodes générales et non pas être un recueil complet de recettes prêtes à l'usage, Euclide laisse à son lecteur le soin de découvrir lui-même le cas d'une équation négative $x^2 = 2px + q$, de racine $x = p + \sqrt{p^2 + q}$; une figure adaptée à ce cas, négligé dans les Éléments, est identique à la précédente à ceci près qu'il suffit de changer $(x, p + x)$ en $(x - 2p, x - p)$.

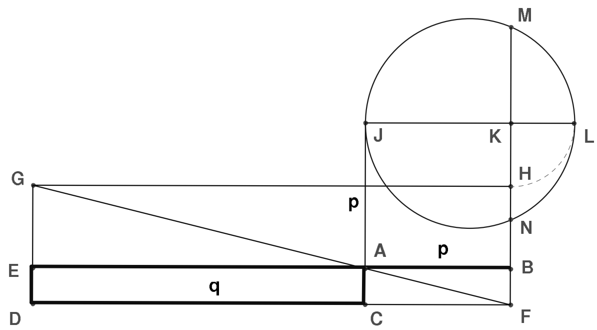
Les relations qui s'en déduisent alors sont respectivement $p\,(x - 2p) + (x - p)^2 = (x - 2p)\,x + p^2 + p\,(x - 2p)$, $(x - p)^2 = (x^2 - 2px)$ et $(x - p)^2 = q + p^2$.

Nous sommes donc désormais en possession d'identités algébriques, justifiées par la géométrie, qui équivalent à notre méthode de *complétion du carré*.

4.2.2 Construire les racines

Il reste donc à montrer comment, avec une règle et un compas, construire une racine d'une équation du second degré à partir de p et q donnés géométriquement. Nous avons déjà indiqué qu'Euclide ne l'a pas fait explicitement ; c'était en effet inutile à son point de vue, puisque son traité contient tout le matériel nécessaire : Descartes à son tour dira bien en 1637 "ie tascheray d'en mettre la demonstration en peu de mots. car il m'ennuie désia d'en tant escrire" (*La Géométrie*,Livre Premier, p. 309, AT VI p. 382).

Le mathématicien écossais Robert Simson (1687-1768), traducteur et commentateur d'Euclide, croira bon d'ajouter en 1756 au texte grec une construction effective très ingénieuse de $p - \sqrt{p^2 - q}$; il fera d'ailleurs de même pour $\sqrt{p^2 + q} - p$. Cela partait bien entendu d'un bon sentiment, mais l'introduction des arcs de cercle simsoniens est plus que maladroite. Si les mathématiques sont correctes, il s'agit d'une addition étrangère au corpus euclidien, alors qu'un peu d'attention aurait pu conduire à une construction obtenue par simple concaténation du contenu des Éléments, que l'on trouvera ci-dessous pour l'équation ambiguë $x^2 + q = 2px$ et ses deux racines $p \pm \sqrt{p^2 - q}$.



Pour construire cette figure, on se donne d'abord un carré $ABKJ$ de côté p et un rectangle $ACDE$ d'aire q. Ensuite on détermine successivement les points F, G, H en respectant les parallélismes et les alignements, puis L tel que $KH = KL$, le cercle de diamètre JL et enfin M et N sur ce cercle et la droite FBH.

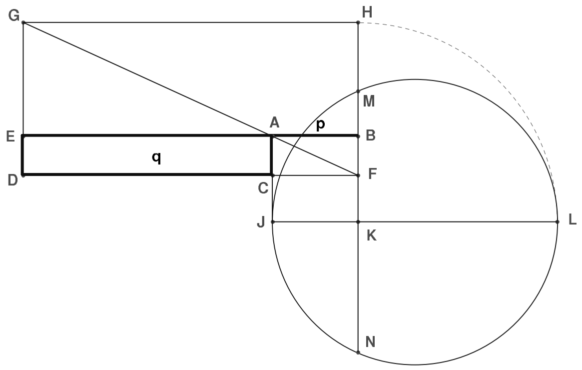
La lecture de la figure est facile ; on reconnaît évidemment le rectangle $GHFD$ de l'équation du premier degré, qui conduit à l'égalité $BH = \frac{q}{p}$, et le cercle de diamètre JL, qui permet la construction des longueurs $KM = KN = \sqrt{KJ \cdot KL} = \sqrt{p \cdot KH}$ à cause de l'arc de cercle de centre K. Puisque $ABKJ$ est un carré de côté p, on a $KH = KB - BH = p - \frac{q}{p}$, ce qui donne finalement $KM = KN = \sqrt{p^2 - q}$, puis :

$$BN = BK - KN = p - \sqrt{p^2 - q}, \qquad BM = BK + KM = p + \sqrt{p^2 - q}$$

c'est-à-dire les deux racines de l'équation ambiguë $x^2 + q = 2px$.

Une condition nécessaire et suffisante de leur existence est que $p^2 - q$ soit positif. Sur la figure, cela se retrouve en notant que la construction n'est possible que si, et seulement si, la droite GH coupe bien le côté BK du carré $ABKJ$ entre B et K, c'est-à-dire la condition annoncée.

La figure finale de cette partie n'est pas davantage extraite d'Euclide. Elle donne une variante possible de la construction ci-dessus, cette fois-ci appliquée à la fois aux deux équations $x^2 \pm 2px = q$; la racine de l'équation positive est naturellement la longueur de BM, alors que celle de BN est la racine de l'équation négative de mêmes paramètres p et q.



En fait cette construction donne même davantage : en effet, les deux racines de l'équation positive $x^2 + 2px = q$ sont BM et $-BN$, alors que celles de l'équation négative $x^2 = 2px + q$ sont BN et $-BM$. Même s'il restait très méfiant devant les racines négatives d'une équations - qu'il appelle *fausses* (*La Géométrie*, p. 372, AT VI p. 445) -, Descartes a très probablement été tenté de faire de telles remarques.

5 Diophante d'Alexandrie

L'importance de Diophante en algèbre et théorie des nombres ne saurait être surestimée, ne serait-ce qu'à cause des commentaires de Fermat. Sans donner de théorie générale, se limitant à des cas particuliers, il montre qu'il connaissait naturellement les techniques de réduction à des racines carrées des équations du second degré. Il les appliquait d'ailleurs également à des inéquations, comme $x^2 + 60 > 22x$ ou $2x^2 > 6x + 18$: voir la traduction de Ver Eecke, p. 231 (V 30), et surtout p. 178 (IV 39).

Ce dernier trinôme $2x^2 - 6x - 18$ ne possède pas de racines rationnelles car 45 n'est pas un carré parfait ; toutefois l'auteur s'intéresse à trouver des rationnels satisfaisant à l'inéquation (négative) $2x^2 > 6x + 18$. Au départ, il fait comme s'il voulait résoudre l'équation, et nous donne à ce propos un précieux témoignage de la technique grecque de l'époque. Rappelons qu'*arithme* est alors synonyme d'inconnue et que, de même, *quantité* signifie ici coefficient :

> Lorsque l'on résout une telle équation, nous multiplions la moitié de la quantité d'arithme [*i.e.* 6/2] par elle-même, ce qui donne 9, et nous multiplions 2, la quantité des carrés d'arithme, par 18 [*quantité des*] unités. Ajoutons à 9, ce qui donne 45 [$= 2{\cdot}18{+}9$] dont la racine est à ajouter à la moitié de la quantité d'arithme...

Pour l'équation générale $ax^2 = bx+c$, cela signifie : calculer $\frac{b}{2}$, ${\frac{b}{2}}^2$, ac, $ac+{\frac{b}{2}}^2$ et enfin $\sqrt{ac+{\frac{b}{2}}^2}+\frac{b}{2}\cdot$ Pour retrouver l'algorithme moderne, il faut juste ajouter la division par a (lacune comblée par Paul Tannery dans son édition).

Aucune justification n'est donnée, dans les *Arithmétiques*, de cette technique, évidemment bien connue depuis des siècles.

La géométrie ne semble jouer ici aucun rôle dans ses calculs, portant exclusivement sur des nombres. Par suite nous passerons rapidement sur Diophante, indiquant simplement qu'il traite d'au moins trois équations positives, de cinq équations et deux inéquations négatives. Il prend soin par exemple de mettre côté à côte $84x^2 + 7x = 7$ (*sic*) et $84x^2 = 7x + 7$ (VI 6 et 7, pp. 242 et 244), de racines respectives $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$, ce qui montre qu'il connaissait bien ce que nous appelons aujourd'hui les racines négatives des équations non ambiguës ; il recommencera d'ailleurs aussitôt (VI 8 et 9, pp. 246 et 247) avec $630x^2 + 73x = 6$ et $630x^2 = 73x + 6$, de racines respectives $\frac{1}{18}$ et $\frac{6}{35}\cdot$

Naturellement, il s'occupe également de quatre inéquations ambiguës et, surtout, de l'équation ambiguë $x^2 + 4 = 4x$, déjà signalée, qui possède une *racine double* ($x = 2$). Ce dernier point est très important, car il montre que les Grecs connaissaient ce concept dont Descartes fera un très grand usage, mais sans paraître y insister dans son Traité, affectant de n'en parler qu'en passant, évoquant le fait qu'une droite peut ne pas couper ni *toucher* un cercle donné (*La Géométrie*, p. 303, AT VI p. 376), puis en parlant plus clairement de racines *entièrement égales* (*id.* p. 347, AT VI p. 418).

Cela dit, si la notion de racine multiple n'a pas été totalement étrangère aux Grecs, il ne semble pas qu'elle ait alors fait l'objet d'une étude systématique.

6 Al-Khwârismi

Dans son *Kitab al-jabr* il traite de certaines équations du second degré telles que $x^2+10x = 39$ ($x = 3$) et $x^2+10x = 56$ ($x = 4$), $x^2+21 = 10x$ ($x = 3$, ainsi que $x = 7$) et $x^2 = 3x + 4$ ($x = 4$), couvrant ici par quelques exemples les trois formes classiques.

Il donne, comme Euclide bien avant lui, des preuves géométriques justifiant les réductions à des extractions de racines carrées grâce à des figures élémentaires supposant le problème résolu. Certes il ne le fait que sur des cas particuliers, mais c'est une attitude alors très fréquente, qui perdurera, pour certaines démonstrations lourdes, jusqu'au début du vingtième siècle.

La figure ci-dessous, avec le choix de x comme longueur commune aux quatre rectangles, justifie l'identité remarquable :

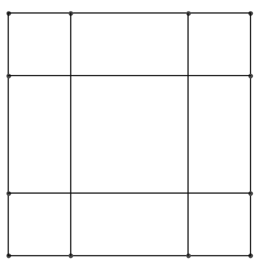
$$(x + p)^2 = p^2 + 2px + x^2$$

comme on le voit en calculant de deux façons différentes l'aire du carré extérieur. Cela montre que l'égalité $x^2 + 2px = q$ équivaut à $(x + p)^2 = q + x^2$, ce qui donne $x = \sqrt{p^2 + q} - p$ et règle le cas des équations positives.

De la même manière, le choix de $x - p$ (implicitement supposé positif) comme longueur des rectangles conduit à :

$$x^2 = p^2 + (x - p)^2 + 2p\,(x - p) = (x - p)^2 + 2px - p^2.$$

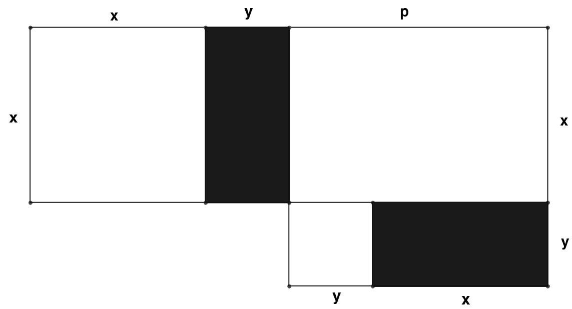
Cela montre que l'égalité $x^2 = 2px + q$ équivaut à $(x - p)^2 = q + p^2$, ce qui donne $x = p + \sqrt{p^2 + q}$ et règle le cas des équations négatives.



Les équations ambiguës posent un problème plus délicat. Cette fois-ci, toujours en calculant de deux façons différentes l'aire de l'équerre hexagonale de la figure ci-dessous où $y = p - x$ est supposé positif, on obtient l'identité remarquable :

$$x^2 + xy + p^2 = 2px + y^2 + xy$$

c'est-à-dire $x^2 + p^2 = 2px + y^2$. Cela montre que l'égalité $x^2 + q = 2px$ équivaut à $p^2 = q + y^2 = q + (p - x)^2$, ce qui donne $x = p - \sqrt{p^2 - q}$ grâce à la convention faite sur le signe de $p - x$, et règle le cas de la plus petite racine des équations ambiguës lorsque $p^2 - q$ est positif (ce qui est imposé par la figure même puisque le petit carré de côté y est inclus dans le grand carré de côté p).

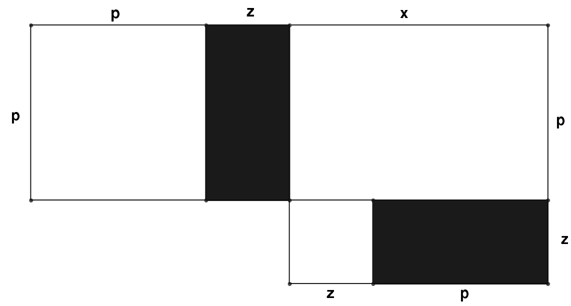


Enfin la dernière figure de ce paragraphe est presque la même que la précédente, aux notations près (échange de p et de x) : elle appartient donc aussi au traité d'Al Khwârizmi, et aurait pu lui servir à déterminer la plus grande racine des équations ambiguës. Il suffit en effet de poser ici $x = p+z$ pour trouver, toujours de la même façon :

$$p^2 + pz + x^2 = 2px + z^2 + pz$$

c'est-à-dire $p^2 + x^2 = 2px + z^2$ et enfin la condition nécessaire et suffisante $p^2 = q + z^2 = q + (x-p)^2$, qui donne $x = p + \sqrt{p^2+q}$.

Pour déterminer effectivement les valeurs de toute ces racines, l'auteur avait alors le choix entre : travailler exclusivement sur des nombres, comme Diophante, ou donner des constructions géométriques à partir du cercle comme Euclide l'avait expliqué.



7 Les Italiens du seizième siècle

Le rôle des Del Ferro, Cardan et autres Tartaglia dans la résolution des équations du troisième puis du quatrième degré est très connu ; nous n'en parlerons pas, sauf pour indiquer qu'au milieu du seizième siècle on savait transformer une équation de façon à annuler un coefficient (faisant passer par exemple de $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ à $z^3 + pz + q = 0$), et donner explicitement les racines par des formules telles que :

$$z = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}.$$

Ces formules étranges frapperont tous les mathématiciens, y compris Descartes qui les exhibera dans sa *Géométrie* (p. 398 pour $z^3 + pz = q$, AT VI p. 472).

Indiquons simplement que cet énorme succès invitait évidemment de manière pressante à résoudre de même les équations du cinquième degré et même au delà. Cela devint donc le problème crucial des mathématiques : le régler donnerait certainement la gloire. Toutefois, les innombrables échecs rencontrés dans cette voie finirent par faire naître un doute ; il en résultera par exemple qu'un Descartes, conforme à son tempérament de trancheur de nœud gordien, cherchera une direction entièrement nouvelle, qui lui permettra même d'atteindre le sixième degré, bien entendu en employant d'autres armes que la superposition de radicaux.

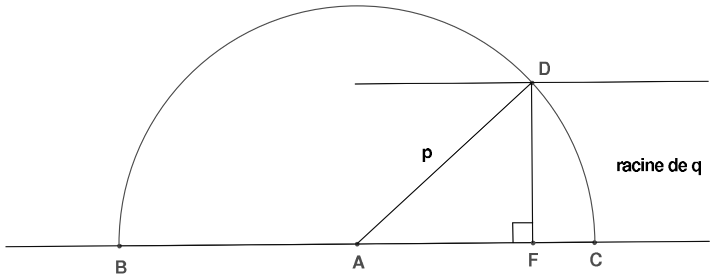
8 Viète

Le grand précurseur de Descartes a longuement travaillé le champ de la résolution des équations algébriques (notamment du troisième degré). Nous ne le citons ici que pour une construction géométrique originale des racines des équations du second degré grâce à un outil unique, que l'on pourrait appeler le *cercle universel* de Viète (*Effectionum Geometricam Canonica Recensia*, 1593, Witmer p. 375, Peyroux p. 339).

Les formes explicites des racines sont connues depuis au moins vingt siècles. Il prend soin toutefois de les justifier par des égalités telles que $(u \mp v)^2 \pm 4uv = (u \pm v)^2$ (voir le second livre de ses *Zetetiques* : Witmer p. 102, Peyroux p. 92 qui date de 1591 ou 1593, ou son *De Aequationem Recognitione* de 1615 : Witmer p. 161, Peyroux p. 147).

François Viète étudie notamment le triplet d'équations $x^2 + 144 = 26x$ (ambiguë de racines $x = 8$ et $x = 18$), $x^2 + 10x = 144$ (positive de racine $x = 8$) et $x^2 = 10x + 144$ (négative de racine $x = 18$).

Les trois figures ci-dessous parlent pratiquement d'elles-mêmes. La première permet de résoudre les équations ambiguës $x^2 + q = 2px$; si le rayon du demi-cercle est égal à p et s'il est coupé par une droite à distance $FD = \sqrt{q}$ (ce nombre est supposé par exemple avoir été construit par la technique euclidienne). Le théorème de Pythagore donne aussitôt que les deux racines $x = p \pm \sqrt{p^2 - q}$ ne sont autres que les longueurs des segments FB et FC, déterminés sur le diamètre par le pied F de l'angle droit.

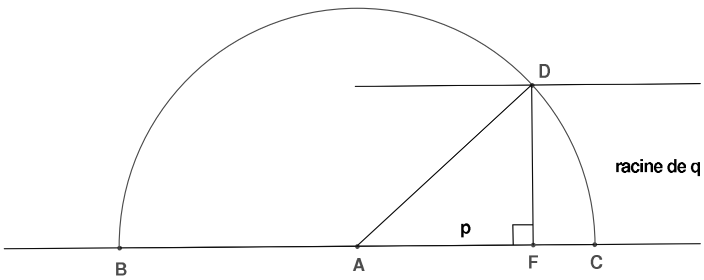


La suivante sert à la fois aux équations positives et négatives. Si la droite sécante est la même, le rayon $\sqrt{p^2+q}$ est obtenu en plaçant le pied F de l'angle droit à la distance p du centre, ce qui détermine le cercle. Ici encore F sépare le diamètre en deux segments, dont le plus grand FB mesure la racine de l'équation négative $x^2 = 2px + q$, et le plus petit FC celle de l'équation positive $x^2 + 2px = q$, à savoir respectivement $x = p + \sqrt{p^2+q}$ et $x = \sqrt{p^2+q} - p$.

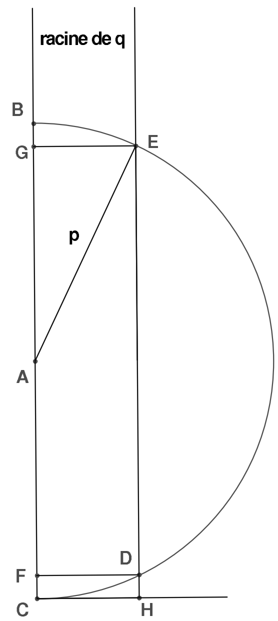
Cette figure a peut-être été inspirée à Viète par la construction classique d'une racine carrée. En effet, le théorème de Pythagore et l'égalité $FD^2 = FC \cdot FB$ impliquent :

$$CF^2 + FG \cdot CF = DF^2, \qquad BF^2 = FG \cdot BF + DF^2$$

c'est-à-dire exactement une équation positive et une équation négative (pour obtenir une équation ambiguë, il suffit de remplacer $FD^2 = FC \cdot FB$ par $CD^2 = CF \cdot CB$, autre propriété très connue du triangle rectangle CDB, ce qui conduit à $FC^2 + DF^2 = BC \cdot FC$).



Enfin la dernière figure, non explicitée par Viète, nous introduit à la technique cartésienne de résolution générale, et ce n'est sans doute pas un hasard. Elle résulte pratiquement de la première des deux figures ci-dessus, après une rotation d'angle droit : les racines de $x^2 + q = 2px$ sont respectivement $FC = HD$ et $FB = CG = HE$. Nous la retrouverons telle quelle dans *La Géométrie* (p. 303, AT VI p. 376).



9 Enfin Descartes vint

Au début du dix-septième siècle, les choses étaient suffisamment mûres pour qu'un homme de génie puisque transformer de façon radicale notre sujet, mais non l'assécher : il faudra pour cela encore deux siècles.

9.1 Pourquoi les équations algébriques chez Descartes ?

Comme il a déjà été signalé, après les succès italiens - que Descartes ne connaîtra que relativement assez tard - il restait en mathématiques un défi majeur : résoudre les équations de degré strictement supérieur au quatrième.

Les cahiers de brouillons de Descartes (ici les *Cogitationes privatæ*, AT X p. 234) nous montrent, par exemple à propos de l'équation $x^3 = 7x + 14$, qu'il était déjà intéressé, très jeune, par le sujet. On trouvera d'ailleurs en plusieurs endroits (dont *La Géométrie*, p. 318, AT VI p. 391) l'image d'un compas qu'il avait mis au point pour résoudre certaines équations du second degré, avec au départ l'espoir de pouvoir les traiter toutes.

Descartes parviendra d'ailleurs à ramener toute équation du quatrième degré à une du troisième, ce que Ferrari avait déjà obtenu par une autre technique. Pour ce faire, il utilise avec brio la généralisation naturelle de la complétion d'un carré qui consiste, par une translation des racines, à faire disparaître le second coefficient du polynôme P (*oster le second terme*, *La Géométrie*, p. 376 puis

385, AT VI p. 449 puis 457). C'est un succès assez mineur, mais qui prouve bien qu'il a poussé assez loin l'étendue de ses recherches, et ce peut-être même avant d'avoir lu l'*Ars Magna* de Cardan.

Nous ne ferons qu'évoquer ici l'importance des connaissances qu'il a sorties de sa plume, de nombreuses pour la première fois, au sujet des racines des équations algébriques considérées de façon abstraite : la règle des signes, la diminution d'un degré d'une équation dont on connaît une racine a grâce à la division par $x - a$ *etc.*

Il n'y a donc aucun doute que notre thème n'a cessé d'être présent à son esprit pendant ses années de mathématicien, même s'il avait également en vue un tout autre problème : déterminer la forme optimale des verres de lunettes. Il sera d'ailleurs ébloui de découvrir que sa méthode lui permit de résoudre les deux à la fois (voir *La Géométrie*, p. 342, AT VI p. 413 : *Et i'ose dire que c'est cecy le problesme le plus utile, & le plus general, non seulement que je sçache, mais mesme que i'aye iamais desiré de sçauoir en Geometrie*).

Son traité s'ouvre sur les résolutions des équations du premier et du second degré, et se termine sur celles des troisième, quatrième, cinquième et sixième degré. Pour ces dernières, qui méritent évidemment une étude très approfondie, il emploie une méthode révolutionnaire : ayant réussi à définir des courbes de degré quelconque (grâce à son invention des coordonnées) il cherche à ramener toute résolution d'équation algébrique à la détermination des abscisses des points d'intersection d'un cercle avec une courbe convenable. Jusqu'au degré quatre, il vérifie que c'est possible - n'étant là pas très loin de constructions de Viète -, et il y parvient, de manière tout à fait originale, pour le degré six (le degré cinq s'en déduisant très facilement).

Son affirmation selon laquelle, à l'extrême fin de *La Géométrie*, il n'y a qu'à continuer dans cette voie pour atteindre n'importe quelle équation est, au sens strict, erronée. Mais il n'en reste pas moins qu'il a réalisé ici une percée aujourd'hui bien oubliée, par des voies entièrement nouvelles, mais qui a eu des conséquences inattendues et considérables qui l'auraient sans doute bien étonné tout en flattant naturellement son ego.

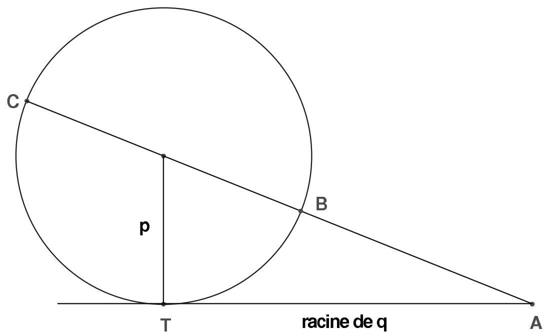
Nous nous limiterons ici à ses constructions pour les premier et second degré, qu'il a portées à un niveau de simplicité sans aucun doute insurpassable, complétant ainsi son cher Euclide (comme il avait tenté de le faire autrefois avec le *De Solidorum Elementis*).

9.2 La géométrie et les équations du second degré

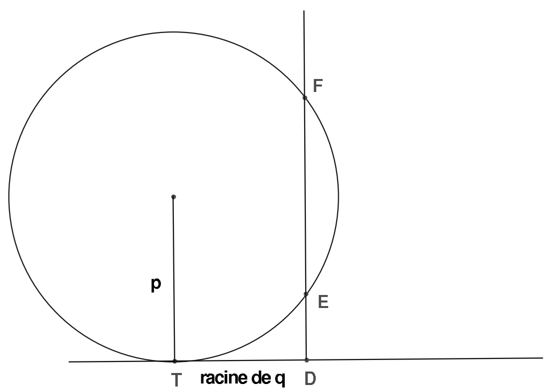
Dans les toutes premières pages de *La Géométrie* (pp. 298 à 303, AT VI pp. 370 à 376), Descartes nous donne sa propre version de la résolution de l'équation du premier degré $ax = b$, en employant pour cela deux triangles homothétiques de côtés respectifs a et b pour le premier, et 1 et x pour le second. Nous avons déjà souligné que cette application du théorème de Thalès est évidemment la plus simple de toutes les constructions possibles, mais qu'elle supposait un saut conceptuel essentiel, celui de pouvoir fixer une unité en choisissant pour tel un segment arbitraire.

Mais, après avoir recopié la détermination des racines carrées d'Euclide, il donne - toujours sans démonstrations - une très nouvelle méthode de résolution des équations du second degré.

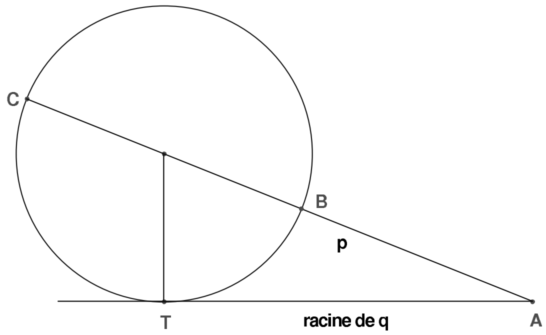
La figure ci-dessous donne à la fois la racine positive $AB = \sqrt{p^2+q} - p$ de l'équation positive $x^2 + 2px = q$ et la racine positive $AC = p + \sqrt{p^2+q}$ de l'équation négative $x^2 = 2px + q$ puisque le théorème de Pythagore montre que A est situé à la distance $\sqrt{p^2+q}$ du centre du cercle :



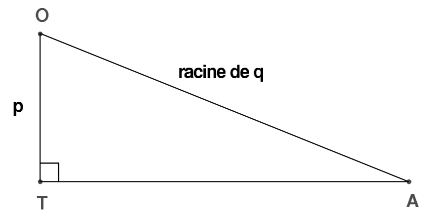
Sa résolution des équations ambiguës est nettement moins originale, car elle reprend (involontairement ?) la construction de Viète. Sur la figure ci-dessous, on lit les longueurs des deux racines $DE = p - \sqrt{p^2-q}$ et $DF = p + \sqrt{p^2-q}$ de l'équation ambiguë $x^2 + q = 2px$). La preuve repose sur une simple application du théorème de Pythagore (projeter orthogonalement le centre sur la droite DEF) :



En fait, Descartes n'a pas écrit (pas vu ?) que son outil précédent (diamètre et tangente à un cercle) pouvait justement être aussi universel que le cercle de Viète. La figure ci-dessous donne en effet, toujours par simple application du théorème de Pythagore, que les longueurs AB et AC sont les racines de l'équation ambiguë $x^2 + q = 2px$ (ici, p n'est plus le rayon du cercle, mais la distance séparant le centre du point A d'où l'on mène la tangente AT) :



Descartes connaissait les racines complexes des équations ambiguës dans le cas $p^2 < q$. Il n'aurait aucun mal à construire une figure assez analogue aux précédentes sur laquelle lire la partie réelle commune $TO = p$ et la valeur absolue $TA = \sqrt{q - p^2}$ des parties imaginaires de ces racines :



Sur ces constructions, Descartes a émis une évaluation manquant plutôt d'humilité (*La Géométrie*, p. 304, AT VI p. 376), dont nous laissons le soin au lecteur de décider s'il a eu raison, ou tort, de se placer si haut :

Au reste, ces mesmes racines se peuuent trouuer par vne infinité d'autres moyens, & i'ay seulement voulu mettre ceux cy, comme fort simples, affin de faire voir qu'on peut construire tous les Problesmes de la Geométrie ordinaire, sans faire autre chose que le peu qui est compris dans les quatre figures que i'ay expliquées. Ce que ie ne croy pas que les anciens ayent remarqué. car autrement ils n'eussent pas pris la peine d'en écrire tant de gros liures, ou le seul ordre de leurs propositions nous fait connoistre qu'ils n'ont point eu la vraye methode pour les trouuer toutes, mais qu'ils ont seulement ramassé celles qu'ils ont rencontrées.

Rabattons un peu sa superbe : Descartes avait aussi, par exemple, les moyens de mettre au point, par des dichotomies ou des approximations affines (fausse position) des techniques donnant des décimales d'une racine (le concept de décimale est par exemple déjà présent chez Stevin). Il n'en fera naturellement rien. Pas davantage qu'il ne deviendra le Galois de son siècle.

Cela dit, même si sa méthode peut paraître aujourd'hui assez extravagante, il reste qu'il est le premier à avoir donné une solution de l'équation générale du cinquième ou du sixième degré grâce à sa courbe auxiliaire appelée aujourd'hui *parabole cartésienne* ou *trident* ; son traité marque donc bien une étape importante, et surtout évidemment dans la mesure où sa longue recherche fructueuse lui a permis de mettre la main sur un joyau incomparable : la géométrie analytique.

10 De Newton à Galois

La fin de l'histoire de la résolution des équations algébriques est proche : elle n'a désormais plus de rapports directs avec la géométrie.

Newton (en 1671, publié en 1736) et Raphson (en 1690) ont mis au point, de manière indépendante, des algorithmes très voisins, utilisant le calcul différentiel, et permettant (théoriquement) de trouver autant de décimales que l'on veut d'une racine d'une équation $f(x) = 0$. Telle est la solution moderne : c'est le meilleur procédé de résolution possible, que la montée actuelle de l'informatique a rendu évidemment encore plus efficace. Il faut noter que cela dépasse le cas purement algébrique, où f est un polynôme, et que cette méthode, étendue par exemple à des espaces plus généraux que la droite, est toujours intensément utilisée.

L'idée est la suivante : si a est une valeur approchée d'une racine d'une équation $P(x) = 0$, la vraie racine est de la forme $x = a + h$; pour déterminer h, on écrit $0 = P(a + h) = P(a) + ph + qh^2 + rh^3 + \dots$ (la suite de ces nombres est finie car P est un polynôme), et on peut prendre pour valeur approchée de h celle qui annule $P(a) + ph$; en fait, $p = P'(a)$.

Dans *La méthode des fluxions et des suites infinies*, Newton donne ainsi, par tâtonnements intelligents, la valeur approchée $x = 2,09455148$ de la seule racine réelle de l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$ (voir par exemple la page 7 de la traduction française par Buffon de 1740). Bien entendu, Descartes aurait pu imaginer la méthode que suit alors Newton, mais non son interprétation sous la forme générale de Newton-Raphson, faute de connaître le concept de dérivée.

Avec Lagrange, commence une série de réflexions algébriques très profondes qui vont révolutionner les règles du jeu. Tout part de la remarque selon laquelle les racines (a, b, c) d'une équation $x^3 + px + q = 0$ sont telles que les nombres $(a + bj + cj^2)^3$ et $(a + bj^2 + cj)^3$ ne prennent qu'au plus deux valeurs distinctes lorsque l'on opère, sur (a, b, c), les six permutations possibles - voir son traité de 1770

Réflexions sur la résolution algébrique des équations. Cette technique éclaire la réussite de Del Ferro et ses compagnons : il existe ainsi une équation auxiliaire de degré deux, donc résoluble, grâce à laquelle on peut ensuite déterminer a, b et c à l'ordre près. Une remarque analogue explique que l'équation générale du quatrième degré peut aussi être associée à une équation auxiliaire de degré trois, ce qu'avaient bien vu Tartaglia au seizième siècle et Descartes au dix-septième.

Cela dit, aucune technique analogue ne semblait pouvoir être établie pour le cinquième degré. L'intuition de Descartes, pour qui les formules explicites avec radicaux (à la Cardan par exemple) cessaient d'être envisageables au delà du degré quatre - sauf cas particuliers -, sera pleinement justifiée par Abel, qui en 1821, après avoir brièvement cru quelques mois plus tôt qu'il avait pu vaincre le cinquième degré, prouva au contraire que c'était impossible. On sait que c'est Galois qui, neuf ans plus tard, mettra un point final à toutes les recherches de ce genre.

Sa méthode était si neuve qu'elle ne sera vraiment comprise que vingt ans plus tard : ainsi accomplissait-il, de manière totalement surprenante, le vieux rêve de Descartes de pouvoir "résoudre" toutes les équations algébriques (avec un sens très particulier donné au mot résoudre, obtenu en renversant l'échiquier comme Descartes l'avait fait avec la notion de courbe au Premier Livre de *La Géométrie*). Mais bien entendu à cette époque, les mathématiques s'étaient découvertes infiniment plus riches, et le succès de Galois n'en marquait naturellement pas la fin !

Aujourd'hui, les notions de *corps de rupture* et de *corps de décomposition* ont fini de tirer un trait sur ce que signifie : résoudre une équation algébrique.

Il faut enfin noter, en guise de conclusion, qu'aujourd'hui des mathématiciens comme Alain Connes (géométrie non commutative) et Jean-Pierre Ramis (équations différentielles), par exemple, ne cessent de tirer de la théorie de Galois des enseignements pour des recherches contemporaines très vivantes. Le très ancien problème posé par la résolution des équations algébriques connaît donc indirectement, encore maintenant, des retombées étonnantes.