Des machines pour résoudre les équations différentielles

Marie-José Durand-Richard, Université Paris 8, Equipe REHSEIS*

Version provisoire novembre 2005

Avertissement : *Le contenu de cet atelier ne fournit vraisemblablement pas un matériau directement utilisable dans la classe par les enseignants. Son intérêt réside plutôt dans la prise en compte de problématiques attachées à l'histoire des machines mathématiques, envisagées comme élément de la culture et de l'histoire sociale. Bien que cette dimension échappe traditionnellement à l'enseignement, j'en ai personnellement eu besoin pour réconcilier la représentation des mathématiques que je m'étais forgée au cours de mes études, avec celle que m'ont longtemps renvoyée les élèves lorsque j'enseignais au collège. Il me semble qu'elle peut notamment leur permettre de saisir là comment les interactions entre les mathématiques et les autres domaines de la connaissance interviennent dans la signification du calcul.*

La naissance des ordinateurs est souvent présentée à la jonction de deux développements initialement indépendants : celui de l'électronique et celui de la logique mathématique. Pourtant, avant même le rapprochement entre logique et mathématique, réalisé par George Boole vers 1850, Charles Babbage (1791-1871) conçut dès 1834 "the analytical engine", dont l'architecture est déjà celle d'un ordinateur classique, séparant organes d'entrée et de sortie, unités de calcul et de contrôle, programme et mémoire. De ce fait, il semble que se soit installé un siècle d'oubli entre cette première tentative et celle que visent John Von Neumann, John Mauchly et Prosper Eckert, dans le texte collectif de 1945 où ils spécifient l'organisation logique de l'ordinateur[1]. Cette présentation de textes se propose de montrer que de l'une à l'autre existe pourtant une continuité effective, qui n'est pas d'ordre technique ou logique, mais d'ordre méthodologique : elle réside dans les recherches visant à mécaniser la résolution approchée des équations différentielles. Cette mécanisation passe par un basculement des appareils du côté des méthodes analogiques, et se trouve marquée par une hésitation sensible entre deux modes possibles d'approximation : un mode numérique et un mode graphique. Cette hésitation illustre le caractère polysémique du calcul, qui se manifeste ici par la rencontre, sociologique et conceptuelle, de deux cultures : celle du mathématicien et celle de l'ingénieur, une rencontre médiatisée par le physicien. De la machine aux différences de Babbage à l'analyseur différentiel que monte Vannevar Bush (1890-1974) au M.I.T.[2] en 1931, ainsi que Douglas R. Hartree (1897-1958) en Angleterre en 1935, en passant par l'analyseur harmonique de William Thomson (Lord Kelvin 1824-1907), ces tentatives de mécanisation s'appuient sur des problématiques différentes quant au statut des mathématiques elles-mêmes.

I. Les machines de Babbage et leur contexte culturel

Les histoires générales de l'informatique, souvent à la recherche de "pères fondateurs", présentent fréquemment Babbage comme un pionnier, un homme « en avance sur son temps ». De fait, loin d'être un génie isolé, Babbage apparaît plutôt comme la cheville ouvrière d'un réseau de mathématiciens réformateurs, soucieux d'adapter les structures et l'enseignement des universités anglicanes de Cambridge et d'Oxford, aux profonds

* Recherches Epistémologiques et Historiques sur les Sciences Exactes et les Institutions Scientifiques (CNRS).
[1] Neumann, 1945.
[2] Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts. Etats-Unis.

bouleversements qu'a provoqués la Révolution Industrielle en Grande-Bretagne[3]. Réformateurs, ces mathématiciens vont travailler efficacement à la création de nouvelles sociétés savantes, et au renouvellement des contenus pédagogiques à Cambridge, dans le but explicite de combler le fossé qui s'est creusé entre les "learned men" et les "practical men"[4]. Mathématiciens, ces réformateurs entreprennent une réflexion de fond sur la nature de l'algèbre et de ses méthodes, dans le but explicite de lui conférer le statut de science, au même titre que la géométrie, dont l'héritage euclidien persiste à représenter le canon du raisonnement. L'automatisme des procédures algébriques, l'absence de réflexion qu'il autorise quant à la signification des calculs induisent alors Outre-Manche une méfiance d'autant plus vive à l'égard de l'algèbre qu'elle fait écho à un mécanisme industriel socialement très inquiétant. En mathématiques, cette méfiance renvoie aux paradoxes issus d'une extension d'abord pragmatique du champ numérique, dont la controverse sur les logarithmes des nombres négatifs a illustré l'intensité des débats au 18ème siècle[5]. La question cruciale est alors de savoir si le mécanisme algébrique se trouve, ou non, synonyme de l'abandon de toute pensée en mathématiques.

A. L'université anglicane entre tradition et industrie

Dès le tournant du siècle s'exprime en Grande-Bretagne l'urgence d'adapter les institutions universitaires à une conception moins contemplative de l'activité humaine. C'est là le premier jalon d'un long processus de laïcisation des universités anglicanes de Cambridge et d'Oxford, qui débouchera sur les deux grandes réformes de 1858 et 1871, processus au cours duquel ne cesse de se poser la question du rôle des universités et de la fonction de l'enseignement qui s'y trouve dispensé.

1. Une interrogation sur l'objet des connaissances humaines

Dans son compte-rendu de la *Mécanique Céleste* de Laplace, le mathématicien, géologue et indologiste écossais John Playfair (1748-1819) oppose une conception utilitariste de la science à l'ancrage théologique qui est la sienne dans les universités anglicanes :

Quel est le principal objet de la plupart des branches de la connaissance humaine, si ce n'est d'administrer les besoins matériels de l'homme? Quelle est l'utilité des mathématiques, si ce n'est qu'elles sont amenées à porter sur la navigation, l'astronomie, la mécanique, et donc sur les besoins matériels? Quel est l'objet de la médecine? celui de l'anatomie? Quels plus grands projets peuvent avoir la loi et la politique, que de pourvoir à nos besoins matériels - de protéger ceux qui les administrent - et de concilier les intérêts et les prétentions conflictuelles que ces besoins engendrent? L'un des plus grands objets de la sagesse humaine ... est d'utiliser les propriétés de la matière pour l'usage de l'homme.

Ce qui a été dit des dictats d'Aristote ne s'adressait pas à sa Physique, mais à sa Logique et à sa Métaphysique... La logique d'Aristote est particulièrement hostile aux sciences inductives. En accoutumant l'esprit à la méthode syllogistique, elle devient une obstruction très puissante à cette connaissance qui est obtenue, par induction, à partir de l'observation et de l'expérience.[6]

Mais cette laïcisation de l'université hésite entre deux voies : celle d'une professionnalisation envisagée sur le modèle récent de l'Ecole Polytechnique en France, et celle, vers laquelle tendra plutôt la réforme, d'une éducation libérale fondée sur la rationalité et la liberté individuelle[7]. Le philosophe écossais William Hamilton (1788-1856) affirme ainsi en 1836 :

[3] Durand-Richard, 1996.
[4] Durand-Richard, 1992.
[5] Verley, 1998.
[6] Playfair, 1810, pp. 161 et 185. Toutes les citations issues des textes anglais ont été traduites par l'auteur.
[7] Ponteil, 1968, XV, pp. 55-58.

(L'Education Libérale est) une éducation dans laquelle l'individu acquiert une culture, non pas comme un instrument destiné à servir une fin ultérieure, mais comme une fin en soi; autrement dit, une éducation dans laquelle la perspective immédiatement envisagée est sa perfection absolue en tant qu'homme, et non sa seule dextérité en vue d'une profession.[8].

2. Des mathématiques fondées sur la géométrie ?

C'est dans ce cadre qu'est posée la question du fondement des connaissances. Si les mathématiques se sont imposées à Cambridge, elles restent enseignées dans une double fidélité à la géométrie euclidienne et au calcul newtonien des fluxions. Le même Playfair, parmi d'autres, reste hostile à la prise en compte d'entités aussi insolites que les racines des nombres négatifs, qui lui paraissent signifier un cas d'impossibilité, et qu'il préfère de ce fait rejeter :

Ces expressions, comme on le sait fort bien, doivent leur origine à une contradiction qui intervient dans cette combinaison des idées qu'elles sont censées représenter. Ainsi, qu'il soit requis de diviser la ligne donnée AB=a en C, de telle sorte que AC x CB puisse être égale à un espace donné b^2 *; si AC=x, alors* $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b^2}$ *; valeur de x qui est imaginaire quand* b^2 *est plus grand que* $\frac{1}{4}a^2$*; mais supposer que* b^2 *est plus grand que* $\frac{1}{4}a^2$*, c'est supposer que le rectangle AC x CB est plus grand que le carré de la moitié de la ligne AB, ce qui est impossible....*

La fonction naturelle des expressions imaginaires est donc de montrer que les conditions, à partir desquelles une formule générale est dérivée [déduite], deviennent inconsistantes les unes par rapport aux autres.[9]

3. Ou des mathématiques fondées sur le calcul algébrique ?

Le mécanisme algébrique est pourtant riche de possibilités, et peut aussi être perçu comme un gage de certitude. Ainsi, le philosophe écossais Dugald Stewart (1753-1828), dont les *Elements of Human Understanding* influenceront beaucoup les Britanniques avant la diffusion du kantisme, fait-il de ce mécanisme le fondement de la généralité de l'algèbre :

Dans ces extraits de Leibniz, aussi bien que dans ceux issus de Condillac au début de cet article, la distinction essentielle entre les mathématiques et les autres sciences, du point de vue du vocabulaire, est entièrement négligée. Dans les premières de ces sciences, où l'usage d'un mot ambigu est impossible, on peut facilement concevoir comment la solution d'un problème peut être réduite à quelque chose qui ressemble à l'opération d'une machine, - les conditions du problème, une fois traduites du langage commun en celui de l'algèbre, disparaissent complètement de la perspective ; et le procès qui s'ensuit est presque mécaniquement régulé par des règles générales, jusqu'à ce que le résultat final soit obtenu. Dans les dernières de ces sciences, tous les mots sur lesquels portent nos raisonnements admettent, plus ou moins, différentes formes de signification ; et c'est seulement en examinant attentivement la relation qu'elles trouvent avec leur contexte immédiat, que l'idée précise de l'auteur peut être assurée dans chaque cas particulier. Par conséquent, dans ces sciences, l'exercice constant et ininterrompu de l'attention est indispensablement nécessaire pour nous empêcher, à chaque étape du procès, de nous égarer.[10]

[8] Hamilton, 1836.
[9] Playfair, 1778, pp. 319-20.
[10] Stewart, 1792, vol. I, p. 141.

4. Comment légitimer cette extension pragmatique de l'arithmétique ?

Partir des définitions arithmétiques des opérations, et procéder par extension pragmatique du sens des lettres, ne suffit certes pas à garantir la rigueur logique de l'algèbre. Mais cette démarche a pourtant débouché sur l'invention de quantités négatives ou impossibles, en opérant sur elles de la même façon que sur les quantités clairement identifiables. De plus, le calcul différentiel débouche lui aussi sur l'utilisation d'un opérateur qui semble se comporter comme une quantité arithmétique. Comment accepter les développements qu'ont permis leur usage, sans ruiner l'édifice de rigueur que sont censées représenter les mathématiques ? Robert Woodhouse (1772-1827) ouvre le débat à Cambridge en affirmant l'indépendance de l'algèbre. Il n'est plus question pour lui de légitimer les résultats algébriques par des analogies d'ordre géométrique. L'antériorité de la géométrie sur l'algèbre lui apparaît comme un "accident historique", et il suggère l'existence d'une logique propre à l'algèbre, qu'il s'agit d'expliciter :

Nous pouvons attacher une signification aux symboles (x) et (+) et prouver que (a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd, si a, b, c, d sont réels. Mais nous ne pouvons prouver que :

$(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})$ *et* $ac-bd+(ad-bc)\sqrt{-1}$

sont équivalents. Ce que nous devons faire est de supposer qu'il en est ainsi; c'est-à-dire d'étendre la règle démontrée pour les signes de quantités réelles. Ainsi, le fait que $x\sqrt{-1} - x\sqrt{-1}$ *est égal à 0 ou que* $\frac{x\sqrt{-1}}{x}$ *est égal à* $\sqrt{-1}$ *est dû à l'hypothèse que x doit se combiner avec* $\sqrt{-1}$ *comme avec les quantités réelles. Et*

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3}\sqrt{-1} + \ldots$$

signifie seulement que $e^{x\sqrt{-1}}$ *doit être compris comme un symbole abrégé pour écrire le membre de droite, calculé selon cette règle.*

Le paradoxe, selon lequel un processus dans lequel aucune idée n'est introduite conduit à la vérité, et que les opérations sur des signes inintelligibles conduit à des conclusions justes et certaines, a été explicitement traité dans un article présenté à la Royal Society ... Mais pour les mathématiciens qui, dans les questions de science abstraite, font profession de ne jamais se satisfaire d'une "foi rationnelle et d'une persuasion morale", ... , quelle que soit l'extension de signification accordée au terme analogie, il est certain qu'une preuve par analogie est inférieure à une stricte démonstration. ...

Pour montrer que le principe d'analogie doit être abandonné, et qu'un principe plus naturel et plus satisfaisant doit être cherché, on doit utiliser un argument semblable à celui qu'emploient ceux qui soutiennent que les opérations sur les symboles imaginaires sont parfaitement inintelligibles ; à savoir, dans la mesure où des arguments ont été inventés qui, même s'ils sont insatisfaisants, donnent cependant à l'esprit une vision passagère et une perception indistincte de la raison pour laquelle certains processus conduisent à la vérité, on doit supposer qu'il est possible de convertir ces arguments probables en certaines preuves, et de discipliner cette analogie vague, dangereuse et incertaine, en une démonstration stricte, sûre et formelle.[11]

Woodhouse discute les récents travaux du mathématicien français Louis F. A. Arbogast (1759-1803), dont l'ingénieuse manipulation de l'opérateur différentiel permet d'établir une relation entre calculs finis et calculs infinitésimaux. S'appuyant sur l'analogie opératoire entre le développement d'une fonction en série de Taylor :

$$u(z+x) = u(z) + \frac{du}{dz}x + \frac{d^2u}{dz^2}\frac{x^2}{2!} + \frac{d^3u}{dz^3}\frac{x^3}{3!} + \&c.$$

et la série qui définit l'exponentielle : $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \&c.$

Joseph L. Lagrange (1736-1813) avait établi, sous forme finie, une relation entre le calcul sur les différences finies et le calcul différentiel :

[11] Woodhouse., 1801, pp. 90-92.

$$u(z+x)-u(z)=\Delta u=e^{\frac{du}{dz}x}-1$$

Arbogast, introduisant ce qu'il appelle la "méthode de séparation des symboles d'opération et de quantité", produit une écriture simplifiée, synthétique, du théorème de Lagrange, en opérant sur les opérateurs différentiel et aux différences finies comme sur des nombres. Remplaçant $\frac{du}{dx}$ par ∂u, et séparant ∂ de u, il obtient, en 1800, une relation entre l'opérateur différentiel et l'opérateur de différence finie Δ, écrivant :

$$\Delta u=\left(e^{x\partial}-1\right)u \qquad \text{et même} \qquad \Delta=\left(e^{x\partial}-1\right)$$

d'où, pour la réitération de l'opération, $\Delta^n=\left(e^{x\partial}-1\right)^n$

Ces travaux sont immédiatement connus des jeunes algébristes de Cambridge. Lorsqu'en 1816, George Peacock (1791-1858) traduit en anglais, avec Babbage et John F. W. Herschel (1792-1871), le *Traité de Calcul différentiel et Intégral* de S. F. Lacroix (1765-1843) de 1802, pour offrir aux tuteurs de Cambridge un outil de travail utilisant la notation leibnizienne du calcul différentiel, il présente cette écriture comme une manifestation de la supériorité de cette notation en « dx » sur la notation newtonienne en « $\dot{x}$ ». Il écrit :

Le beau théorème de Lagrange, si important dans la théorie des Différences Finies,

$$\Delta^n u_x=\left(e^{\frac{d}{dx}}-1\right)^n u_x \text{ [art. 387]}$$

et de nombreux autres qui lui sont reliés, sont incapables d'être représentés dans la notation fluxionnaire. ... La notation différentielle convient aussi bien pour représenter à la fois les opérations et les quantités : ses symboles sont distincts, ne sont jamais ambigus, elle est symétrique dans tous les cas, et elle continue à être tout aussi simple, quel que soit l'ordre de la différentielle, ou la nature de la fonction à laquelle elle s'applique, tandis que la notation fluxionnaire est défectueuse dans presque tous les cas particuliers que nous venons d'énumérer, et dans la représentation de très nombreux théorèmes, elle fait absolument défaut.[12]

B. L'Algèbre Symbolique comme résolution de ce dilemne

A la fois en 1830 dans un *Treatise of Algebra* destiné aux étudiants, et en 1833 dans un impressionnant *Report on the Recent Progress and Actual State of several Branches of Analysis,* préparé en 1833 pour le 3$^{\text{ème}}$ congrès de la *British Association for the Advancement of Science,* Peacock présente une structuration de l'algèbre en trois niveaux : arithmétique, algèbre arithmétique, algèbre symbolique, qui apparaît comme tentative de résolution de cette crise des fondements de la connaissance, et de ses répercussions en mathématiques. Pour donner à l'algèbre le statut de science, pour garantir son indépendance vis-à-vis de la géométrie, tout en respectant son ancrage sur l'expérience arithmétique, Peacock pose l'algèbre symbolique comme le "langage du raisonnement symbolique", opérant selon des lois dont il s'agit d'expliciter le fonctionnement. Mais le prix à payer pour pouvoir ainsi renoncer à tout recours à l'analogie est considérable : il impose une séparation radicale entre fonctionnement opératoire et signification du calcul.

Nous sommes censés être en possession d'une science de l'algèbre arithmétique dont les symboles désignent des nombres ou des quantités arithmétiques seulement, et dont les lois de combinaison sont susceptibles d'être rigoureusement démontrées, sans l'aide d'aucun principe qui ne soit fourni par notre connaissance de l'arithmétique commune.

Les symboles de l'algèbre arithmétique, bien que généraux dans leur forme, ne sont pas généraux en valeur, étant soumis à des limitations, qui sont nécessaires dans de nombreux cas, afin de garantir la pratique ou la possibilité des opérations à effectuer. Afin d'effectuer la transition de l'algèbre arithmétique à l'algèbre symbolique, nous faisons maintenant les hypothèses suivantes :

(1) Les symboles sont illimités, à la fois en valeur et en représentation ;

(2) Les opérations quelles qu'elles soient, effectuées sur ces symboles, sont possibles dans tous les cas ;

[12] Lacroix, S.F., 1816, Note B de G. Peacock, p. 620.

(3) Les lois de combinaison des symboles sont d'une nature telle qu'elles coïncident universellement avec ceux de l'algèbre arithmétique quand les symboles sont des quantités arithmétiques, et quand les opérations auxquelles ils sont soumis portent le même nom qu'en algèbre arithmétique.

L'expression la plus générale de cette dernière condition et de son lien avec la première hypothèse, est la loi de permanence des formes équivalentes, qui est notre guide approprié dans l'établissement des propriétés fondamentales de l'algèbre symbolique, dans l'invention des signes requis et dans la détermination de leur forme symbolique [13]

Le double énoncé du principe de permanence des formes équivalentes est porteur de toute l'ambiguïté de la démarche de Peacock, qui veut à la fois légitimer la généralité extrême de l'algèbre, en refusant au mathématicien la liberté d'inventer les lois opératoires elles-mêmes. Il est censé affirmer l'antériorité logique des lois opératoires, même si leur "découverte", ancrée sur l'expérience, est postérieure à la pratique arithmétique.

(A) : Toute forme qui est algébriquement équivalente à une autre quand elle est exprimée en symboles généraux doit continuer à lui être équivalente, quel que soit ce que ces symboles représentent.
(B) : Toute forme qui est découverte en algèbre arithmétique considérée comme science de suggestion, lorsque les symboles sont généraux dans leur forme, bien que spécifiques dans leur valeur, doit continuer à être une forme équivalente quand les symboles sont généraux dans leur nature aussi bien que dans leur forme.[14]

Les difficultés épistémologiques de ce double énoncé[15] déboucheront sur une reformulation de ce principe de permanence, notamment par Hermann Hankel (1839-1873) à la fin du 19ème siècle[16]. Il n'empêche qu'en Grande-Bretagne, le travail de Peacock, longuement discuté avec Babbage avant sa publication[17], fait naître tout un courant de recherche sur la logique propre à l'algèbre, plus précisément la logique des pratiques algorithmiques, qui ne nourrira que plus tard la mutation du statut de l'algèbre, devenue étude des structures abstraites. Bien qu'ils divergent sur le statut à donner à cette algèbre symbolique, Augustus de Morgan (1806-1871), George Boole (1815-1865), Arthur Cayley (1821-1895) sont des héritiers directs de cette problématique, et l'idée d'une séparation radicale entre fonctionnement opératoire et signification du calcul est aujourd'hui partout présente en informatique.

.

C. Les machines de Babbage

Si Babbage est à l'initiative du renouvellement de perspective qui a lieu dans l'enseignement des mathématiques à Cambridge dans la première moitié du 19ème siècle, il n'en sera pas l'artisan, laissant ce rôle à Peacock dans sa fonction de tuteur à Trinity College. Babbage a pourtant publié, en 1815 et 1816, un important mémoire, "On the calculus of functions", qui lui vaut de devenir très jeune membre de la *Royal Society*, et d'être reconnu parmi les fondateurs du calcul fonctionnel[18]. Il poursuivra dans ce sens une importante réflexion sur la notation algébrique au cours des années 1820, marquée par de nombreuses publications qui permettent à Ivor Grattan-Guinness de le qualifier de "penseur algorithmique"[19].

Mais ses interventions de réformateur vont l'entraîner sur une autre voie. Sa pensée algorithmique va se matérialiser dans la réalisation de machines qui concrétiseront la séparation entre logique et signification du calcul explicitée par Peacock. Ayant créé, avec ses amis, la *Royal Astronomical* Society en 1820, pour secouer la

---

[13] Peacock, G., 1833, p. 206.
[14] Peacock, G., 1833, p. 194.
[15] Ces difficultés ont été analysées dans plusieurs contributions à la lumière de la philosophie empiriste de John Locke (1632-1704), dont l'*Essay on Human Understanding* fait partie du cursus universitaire de ces jeunes algébristes. Voir notamment Durand-Richard, 2004.
[16] Hankel, 1867.
[17] Dans les années 1810 et 1820, Babbage, Herschel et Peacock correspondent très régulièrement, élaborant dans ces échanges le contenu de leurs publications, lisant et critiquant les travaux des autres. C'est notamment le cas d'un manuscrit non publié de Babbage, portant sur la *Philosophy of Analysis,* que Peacock a lu et critiqué avant la publication de son traité d'algèbre.
[18] Babbage, *Works,* 1, pp. 93-193.
[19] Grattan-Guinness, 1992.

léthargie qu'il perçoit dans les travaux de la *Royal* Society comme du *Nautical Almanach*, Babbage envisage, dès le discours inaugural de 1821, un programme d'observations fondé sur la division du travail, aussi bien dans la répartition des observateurs sur le territoire du Commonwealth que dans la collecte et le traitement des observations. La division du travail, énoncée par Adam Smith en 1776 dans *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations,* apparaît alors aux théoriciens de la Révolution Industrielle comme un facteur d'efficacité déterminant. C'est dans cet état d'esprit que Babbage cherche à éliminer les erreurs des tables astronomiques, qui constituent une source importante de danger pour la navigation.

C'est donc pour mécaniser la réalisation de ces tables qu'il entreprend les plans et la fabrication d'une première machine, "the difference engine". Et c'est en s'appuyant a la fois sur la conception symbolique de l'algèbre, et sur le principe de la division du travail, appliqué non pas seulement au travail manuel, mais au travail mental, que Babbage va passer, de la fabrication de la "machine aux différences" à la "machine analytique". Depuis 1819, il se livre parallèlement à une grande enquête sur les manufactures, visitant l'ensemble des villes industrielles, jusqu'à publier en 1832 *The Economy of Machines and Manufactures,* ouvrage cité par Karl Marx dans *Le Capital,* comme une de ses sources documentaires[20]. Babbage y consacre un chapitre entier à la division du travail mental. Sa façon d'expliciter les conditions de sa mise en œuvre ne sont pas sans intérêt pour tenter de répondre aux questions évoquées dans l'introduction :

L'effet de la division du travail, à la fois dans les opérations mécaniques et mentales, est ce qui nous permet de développer et d'appliquer précisément pour chaque processus la quantité d'habileté et de connaissance exactement requise pour l'effectuer : nous évitons d'employer une partie du temps de travail d'un homme qui peut gagner huit ou dix shillings par jour grâce à son habileté pour tremper des aiguilles, pour tourner une roue, ce qui peut être fait pour six pence par jour, et nous évitons également la perte qui survient quand on emploie un mathématicien accompli pour effectuer les processus les plus élémentaires de l'arithmétique.

La division du travail ne peut être mise en œuvre avec succès que s'il existe une forte demande pour sa production ; et elle demande un CAPITAL *important pour pouvoir être utilisée dans les arts qui en ont besoin.* [21]

1. Matérialisation de la méthode des différences finies

Babbage observe à son tour[22] que les différences secondes des entiers naturels sont nulles :

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	
0	0	0	0	0	0	0		

que les différences troisièmes de nombres carrés sont nulles :

0	1	4	9	16	25	36	49	64
1	3	5	7	9	11	13	15	
2	2	2	2	2	2	2		
0	0	0	0	0	0			

et plus généralement, que les différences (n+1)-ièmes des valeurs successives d'un polynôme de degré n sont nulles ; enfin, que pour toute fonction développable en série de Taylor, il existe un intervalle sur lequel une telle propriété est vraie, à une approximation près bien sûr, mais quelle que soit l'approximation requise[23]. Ainsi l'équation aux différences $\Delta^4 u_n = 0$ donne-t-elle une bonne approximation des fonctions logarithmes.

Réciproquement, la seule connaissance des premiers nombres de chaque ligne suffit, par une simple réitération d'additions, de retrouver d'abord tous les nombres de la ligne précédente, et ceci jusqu'aux valeurs de la fonction.

[20] Marx, 1952, chapitres "La division du travail et la manufacture" et "Le machinisme et la grande industrie" du *Capital*.vol. 2, p. 37 et 62.

[21] Babbage, 1832, p. 141.

[22] Leibniz avait déjà fait ce type de remarque, dont il affirme lui-même qu'elle a été déterminante pour sa conception du calcul différentiel (Leibniz, 1714). Newton avait montré comment l'utiliser dans le calcul numérique, et les astronomes l'avaient abondamment mis en œuvre, notamment Clairaut pour calculer le retour de la comète de Halley. Lacroix en donne un exposé détaillé dans son grand traité (cf. page suivante) et Prony et Legendre l'utilisent pour dresser leurs tables. Cf Tournès, 1996.

[23] K. Weierstrass démontrera en 1885 que cette propriété est vraie pour toute fonction continue.

Dans ce même ouvrage sur l'économie des machines et des manufactures, Babbage voit dans le fait que "la division du travail peut s'appliquer avec autant de succès aussi bien aux opérations mentales que mécaniques", l'occasion de montrer que l'organisation interne d'une manufacture "est fondée sur des principes plous profonds que ce qu'on pourrait supposer". Concernant la machine aux différences, qui lui sert d'exemple, il s'appuie sur l'organisation du travail mise au point en France par le baron G.R. de Prony (1755-1839), dans le but de recalculer des tables trigonométriques pour la division centésimale du cercle, à savoir le grade, ainsi qu'une table de logarithmes des nombres de 1 à 200 000, afin de faciliter l'application du système décimal qui venait d'être adopté. De Prony lui-même affirmait avoir utilisé le principe de la division du travail d'Adam Smith pour concevoir un plan de fabrication[24] répartissant le travail en trois sections :

La première section était formée de cinq ou six des plus éminents mathématiciens de France. Sa tâche était de chercher, parmi les différentes expressions analytiques qui pouvaient être trouvées pour la même fonction, laquelle était la plus directement adaptée à un calcul numérique simple fait par de nombreux individus travaillant en même temps. Cette section n'avait pratiquement rien à voir avec le calcul numérique. Quand son travail était achevé, elle fournissait à la deuxième section la formule qui avait été retenue.

La deuxième section était formée de sept à huit personnes connaissant très bien les mathématiques, dont le travail consistait à convertir en nombres les formules que leur avait confiées la première section – une opération très laborieuse – puis à livrer ces formules aux membres de la 3ème section, et à en recevoir les calculs terminés. Les membres de cette deuxième section avaient les moyens de vérifier les calculs sans avoir à répéter, ou même à examiner, tout le travail de la troisième section.

Les membres de la troisième section, dont le nombre variait de soixante à quatre-vingt personnes, recevaient les nombres de la deuxième section, et, en n'utilisant rien de plus que de simples additions et soustractions, retournaient les tables terminées à la deuxième section. Il est remarquable que les neuf-dixièmes de ce groupe de personnes n'ont aucune connaissance de l'arithmétique au delà des deux premières règles qu'ils sont ainsi amenés à utiliser, et qu'elles se révèlent habituellement plus exactes dans leurs calculs, que celles qui possèdent une plus grande connaissance du sujet.[25]

Le troisième volume du grand *Traité de Calcul différentiel et Intégral* (1797-1798-1802) de Lacroix, intitulé "Des différences et des séries", fournit un bon exemple du travail mis en œuvre de la méthode aux différences. Ainsi, le calcul des différences de la fonction logarithme. Lacroix écrit :

C'est surtout par rapport aux fonctions transcendantes, dont le calcul approximatif est laborieux, que l'on gagne beaucoup à se servir des différences. Ainsi, dans le cas des logarithmes, avec :

$$u = lx \quad u_1 = l(x+h) \qquad u_2 = l(x+2h) \qquad \text{et } M = l\,e$$

$$\Delta lx = l(x+h) - lx = l(1+\frac{h}{x}) = M(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - etc)$$

$$\Delta^2 lx = l(x+2h) - 2l(x+h) + lx = l(1+\frac{2h}{x}) - 2l(1+\frac{h}{x}) = -M(\frac{h^2}{x^2} - \frac{2h^3}{x^3} + etc)$$

$$\Delta^3 lx = l(x+3h) - 3l(x+2h) + 3l(x+h) - lx = l(1+\frac{3h}{x}) - 3l(1+\frac{2h}{x}) + 3l(1+\frac{h}{x}) = +M(\frac{2h^3}{x^3} - etc)$$

On poussera ces suites, selon la grandeur du nombre x, jusqu'à ce que la dernière différence soit assez petite pour être négligée sans erreur sensible

Ex : $x = 10000$ $\qquad$ $h = 1$ $\qquad$ $u = l\ 10000$

$\Delta x = 0{,}00004\ 34272\ 76863$

$\Delta^2 x = -\ 0{,}00000\ 00043\ 42076$

$\Delta^3 x = 0{,}00000\ 00000\ 00868$

[24] *Note sur la publication, proposée par le gouvernement anglais des grandes tables logarithmiques et trigonométriques de M. de Prony,* De l'imprimerie de F. Didot, 1 décembre 1829, p. 7. Cité par Babbage dans cette présentation.

[25] Babbage, 1832, p. 196, 1989, p. 137-138.

Pour des résultats à 10 chiffres, on pourrait négliger longtemps les $\Delta^4 x$.[26]

C'est cette troisième section[27] que Babbage se propose de remplacer par une machine. Dans les années 1820, il conçoit les plans d'une machine aux différences d'ordre 2, travaillant sur des nombres à 10 chiffres, dont il entreprend la fabrication avec l'aide d'un artisan qualifié. En raison de difficultés de financement et de réalisation[28], il n'en achève qu'un montage partiel, travaillant sur des nombres à 6 chiffres, qui se trouve toujours exposé au Science Museum de Londres [Voir Annexe 1]. Chaque colonne de la machine représente un ordre de différences – ou la fonction pour la dernière d'entre elles – et peut donc porter un nombre à six chiffres, autant que de roues à chiffres, chaque roue pouvant tourner sur son axe pour afficher un des dix chiffres possibles.

La machine aux différences de Babbage est ainsi susceptible de calculer les valeurs successives de n'importe quelle fonction récursive primitive, telle qu'elle sera définie plus tard[29] au 20ème s.

A partir de 1854, profitant des acquis de ses recherches sur la machine analytique, Babbage reprendra les plans détaillés d'une seconde machine aux différences, qui a été construite à l'intérieur même du *Science Museum* en 1991, et qui s'y trouve aujourd'hui exposée [Voir Annexe 2], ainsi qu'un deuxième exemplaire de cette machine actuellement en construction pour un musée des Etats-Unis.

2. Matérialisation de l'analyse mathématique comme algorithmique

Inventeur dans l'âme, toujours à l'affût d'une idée nouvelle, Babbage en délaisse cependant le projet en 1834 pour se tourner vers la conception d'une nouvelle machine, "the analytical engine", dont le nom reflète précisément l'ambition : calculer les valeurs de toutes les fonctions de l'analyse telle que les algébristes anglais la concevait alors, c'est-à-dire de tout développement en série de Taylor. Partant de la machine aux différences, il passe d'une structure linéaire à une structure circulaire en envisageant d'abord la résolution d'équations aux différences du type $\Delta^2 u_n$. = chiffre des unités de u_{n+1}, une structure circulaire qui ouvre la possibilité d'interconnexions multiples entre les différents éléments de calcul de la machine [Voir Annexe 3] Et c'est à partir de la question du stockage des retenues, pour ne pas allonger le temps de calcul en les effectuant à la suite les unes des autres, que Babbage est amené à envisager un stockage en mémoire. Dès 1835, dans une lettre à l'astronome et statisticien belge Adolphe Quetelet (1796-1874), Babbage s'étonne "de la puissance qu['il est] parvenu à lui donner, et qu['il n'aurait] pas cru possible d'atteindre un an auparavant". Il précise :

Quand il existe une relation entre un nombre quelconque des coefficients successifs d'une série (pourvu qu'elle puisse être exprimée par addition soustraction, multiplication, division, puissances ou extraction de racines), la machine en calculera et fera connaître successivement les termes, et on pourra la disposer de manière à trouver la valeur de la série pour toutes les valeurs de la variable.[30]

Dans un manuscrit alors non publié[31], daté du 12 décembre 1837, il nomme les différentes parties de la machine selon la fonction spécifique de chacune, en utilisant essentiellement le vocabulaire de la manufacture [Voir Annexe 4] :

- "the store", autrement dit le magasin, qui n'est autre qu'un lieu de stockage, et implique donc une conception statique de la mémoire. C'est là que sont placées toutes les variables, aussi bien celles sur lesquelles on va calculer, que celles qui résultent des opérations. Elle est composée d'axes verticaux (« figure axes ») munis de roues à chiffres, qui doivent emmagasiner les nombres correspondants. La valeur d'une variable est de fait portée sur deux axes, afin qu'elle puisse être prélevée sur l'un pour le calcul et conservée sur l'autre.

---

[26] Lacroix, 1802, p. 12.
[27] De Prony avait confié le travail de cette troisième section à d'anciens perruquiers ruinés par la Révolution Française, qui ne savaient faire que des additions, et il affirmait qu'ils calculaient mieux de manière automatique qu'une personne mieux versée en mathématiques. Voir Grattan-Guinness, 2003.
[28] Durand-Richard, 1992.
[29] Mosconi, 1983.
[30] Babbage, *Works,* 3, p. 10.
[31] Babbage, *Works,* 3, pp.15-61

- "the mill", autrement dit le moulin, ou plutôt la manufacture, c'est-à-dire l'unité de calcul où sont effectuées les opérations. Les axes A, 'A, "A assurent les multiplications et divisions par 10. Les axes F, 'F, "F sont les axes de report pour les additions. Les axes F_i constituent une table de multiplication.

- "the rack", ou râtelier, qui permet de conduire les nombres de la mémoire à l'unité de calcul. Des crémaillères acheminent chaque nombre jusqu'à l'unité centrale de calcul. Un transfert analogue a lieu dans l'autre sens après le calcul, sur des crémaillères différentes. Ces transferts sont dirigés par une carte perforée insérée dans un cadre situé sous la roue la plus basse, et qui désigne la nature de cette variable.

- le dispositif de commande de la succession des opérations, assuré à la fois par des cylindres à picots B – susceptibles de se mouvoir par rotation et translation horizontale – pour la gestion interne des calculs, et par des cartes perforées de type Jacquard pour leur gestion externe [Voir Annexe 5]. Ces cylindres sont formés chacun de plusieurs dizaines de disques enfilés sur un même axe, chaque disque pouvant recevoir 4 ergots ou pignons. Ils possèdent ainsi entre 200 à 400 positions pour codifier les instructions de traitement des opérations. La position des ergots sur chaque cylindre, ainsi que la rotation de chaque cylindre sur son axe, et leur mouvement d'avancée ou de recul latéral, permettent de dicter la nature des opérations à effectuer, et le moment de leur intervention.

Babbage poursuit en précisant par quels moyens mécaniques sont effectuées les différentes opérations. Bien que la machine n'ait pas été construite, aussi bien l'ingénieur militaire Luigi F. Menabrea (1809-96), futur premier ministre de l'Italie unifiée, à qui Babbage a présenté les plans de sa machine, que Lady Ada Lovelace (1815-1852), qui traduit en anglais la présentation de Menabrea et travaille avec Babbage, donnent des exemples de calcul ainsi programmés : calcul des valeurs d'une formule algébrique, résolution d'un système de deux équations à deux inconnues, produit d'expressions algébriques ou trigonométriques, calcul des nombres de Bernoulli. Lady Lovelace saisit tout particulièrement le caractère universel de la machine, qu'elle considère comme matérialisation de la généralité de l'Algèbre Symbolique, conçue, sur les traces d'Arbogast, comme un Calcul des Opérations :

Bien des personnes qui ne sont pas au courant des études mathématiques imaginent que, parce que le travail de la machine est de donner ses résultats en notation numérique, la nature de ses processus doit par conséquent être arithmétique et numérique, plutôt qu'algébrique et analytique. C'est une erreur. La machine peut arranger et combiner ses quantités numériques exactement comme si elles étaient des lettres, ou tout autre sorte de symboles généraux, et en fait, elle pourrait sortir ses résultats en notation algébrique, si des dispositions étaient prises dans ce sens. Elle pourrait développer trois ensembles de résultats simultanément, à savoir des résultats symboliques, des résultats numériques, et des résultats algébriques en notation littérale. Quoi qu'il en soit, il n'a pas été jugé nécessaire ou désirable d'ajouter cette puissance supplémentaire à ses possibilités, en partie parce que les arrangements nécessaires pour la réaliser auraient accru la complexité et la taille du mécanisme dans un rapport disproportionné vis-à-vis des avantages qui en auraient découlé, alors que l'objet principal de l'invention est de traduire en langage numérique les formules générales de l'analyse qui nous sont déjà connues, ou dont les lois de formation nous sont connues. Mais ce serait une erreur que de supposer que, parce qu'elle donne ses résultats dans la notation d'une science plus restreinte, ses processus sont forcément restreints à ceux de cette science. Le but de la machine est en fait de donner le plus possible d'efficacité pratique aux ressources des interprétations numériques de la science supérieure de l'analyse, alors qu'elle utilise les processus et les combinaisons de cette dernière.[32]

Ainsi, les machines de Babbage sont conçues par un mathématicien soucieux de mécaniser l'ensemble des processus algorithmiques qui structurent les opérations de l'algèbre, indépendamment des valeurs numériques attribuées aux symboles, et qui garantissent de ce fait sa légitimité. Si l'universalité du calcul qu'il exhibe n'est pas sans rappeler celle dont se targue l'ambition des ordinateurs, certaines caractéristiques de la "machine analytique" témoignent de son inscription dans une perspective bien différente. *The analytical engine* fonctionne en système décimal, et Babbage la conçoit avant même que Boole ne fasse basculer la logique du côté des mathématiques. Elle opère sur des développements en série de Taylor qui constituent à la fois une définition et

[32] Lovelace, in Babbage, *Works*, 3, p. 144.

une possibilité d'approximation des valeurs des fonctions, que Babbage souhaite aussi précise que possible, quand il envisage des axes de nombres à 40 chiffres. Quant aux difficultés que rencontre Babbage pour réaliser aussi bien l'une que l'autre des deux machines, elles ne relèvent pas seulement des problèmes techniques qu'il doit résoudre au fur et à mesure qu'il conçoit les machines, ou au gigantisme du second projet. Son travail souffre aussi du fort décalage qui existe entre l'ambition de son entreprise et le peu d'intérêt que peuvent y trouver les partenaires qui interviendront dans les décennies futures. Bien que les astronomes effectuent au quotidien des calculs gigantesques par la méthode des différences finies, le calcul reste une affaire humaine. Ni le gouvernement britannique, ni les physiciens ou astronomes de la première moitié du 19ème siècle, ni les industriels n'envisagent la mécanisation universelle des calculs qu'autorise la machine analytique. La forte demande, ce « capital » dont Babbage affirmait lui-même la nécessité en 1832 pour pouvoir espérer ce soutien est potentiel, mais ses acteurs ne le mobilisent pas. C'est Babbage qui doit sans cesse solliciter la *Royal Society* ou le gouvernement britannique, pour obtenir les 17 000 £ dont il a finalement bénéficié sur les cinquante années de son entreprise, et il comptera surtout sur sa fortune personnelle pour mener à bien ses recherches, avec l'installation d'un atelier de fabrication à domicile[33]. Si Babbage entretient des relations tout à fait privilégiées avec le monde industriel, en particulier avec des ingénieurs comme Marc Isambart Brunel (1769-1849), Robert Stephenson (1803-1859) ou Joseph Whitworth (1803-1887), ces contacts demeurent une affaire personnelle et ne trouvent pas les relais institutionnels indispensables à une fabrication plus systématique, même si ses exigences de précision dans la fabrication auront des répercussions dans l'industrie lorsque Whitworth quittera son atelier pour s'installer comme ingénieur à Manchester[34]. Plus encore peut-être, non seulement Babbage se laisse constamment emporter par son désir d'invention, mais comme Peacock, il revendique pour le symbolisme opératoire un statut fondateur qui n'est généralement pas accepté par ses contemporains. Les algébristes de la seconde génération, comme De Morgan ou Cayley, s'ils persisteront à parler d'algèbre symbolique, et à en approfondir les propriétés[35], en parleront plutôt comme d'une "algèbre technique", venant après qu'ait été spécifiée la signification des calculs. Le discours présidentiel de James J. Sylvester (1814-1897) au 39ème congrès de la *British Association for the Advancement of Science,* en 1870, témoigne des réticences à concevoir ce type de mécanisation, soupçonné de réduire la pensée à des automatismes :

Plutôt que de favoriser l'idée que les Algébristes sont un ensemble de simples machines à calculer munies d'organes de locomotion, ou au mieux, une sorte de créatures muettes qui ne sont capables de communiquer que par signes et par symboles avec le monde extérieur, j'ai résolu de prendre mon courage à deux mains, et de dire quelques mots qui, je l'espère, rendront, sinon intéressant, au moins intelligible, un sujet auquel j'ai consacré la plus grande partie de mon existence. [36]

Accepter ou non la possibilité de mécaniser les opérations de l'algèbre est une question qui renvoie au statut des mathématiques. Sont-elles une science explicitant les opérations de l'esprit, ou une science exprimant les lois de la nature ? Plus concrètement, sont-elles une science dont la pureté est garante de cette harmonie théologiquement affirmée, mais si difficilement perceptible socialement dans ce nouveau pays industriel ? Ou bien sont-elles une science au service des intérêts politiques et économiques d'un pays dont la haute technicité peut soutenir l'expansion ? Ce débat est largement ouvert en Grande-Bretagne au milieu du 19ème siècle[37]. Et les années qui vont suivre vont voir pencher la balance du côté de la seconde face de cette alternative. En tous cas, l'affirmation de Babbage et de Peacock de la supériorité quasi ontologique de l'algèbre symbolique sur les pratiques du calcul n'encourage pas les interactions qui présideront au développement du calcul scientifique.

[33] Hyman A., 1983, pp. 123-135.
[34] Hyman A., 1983, pp. 57 et 231.
[35] De Morgan explicite en 1854 les propriétés des nombres réels qui en font un corps, et Cayley donne en 1859 les propriétés qui caractérisent un groupe.
[36] Sylvester, 1870, p. 2.
[37] En témoignent notamment, pour toute cette période, les discours présidentiels des congrès de la *Bristish Association for the Advancement of Science*.

II. De l'analyseur harmonique à l'analyseur différentiel

C'est une inscription socio-culturelle toute différente de la mécanisation du calcul qui se met en place à partir de la seconde moitié du 19ème siècle, depuis l'analyseur harmonique de Lord Kelvin des années 1870, jusqu'aux analyseurs différentiels de Bush aux Etats-Unis et de Hartree en Angleterre des années 1930. Son développement correspond précisément au moment où la recherche sort du cadre strictement académique pour se développer au sein de laboratoires, comme le *Cavendish Laboratory* à Cambridge, et où la formation des ingénieurs s'institutionnalise[38]. Créée en 1831 par Babbage et ses condisciples, la *British Association for the Advancement of Science* joue également un rôle moteur dans cette rencontre entre praticiens et théoriciens[39].

L'extension des représentations corpusculaire de la matière et ondulatoire des phénomènes de diffusion pour appréhender de très nombreux phénomènes naturels va puissamment contribuer au développement de la physique mathématique au 19ème siècle. Comme en témoignent les acteurs de cette mécanisation du calcul, scientifiques et ingénieurs participent tout autant au renforcement de l'édifice théorique de la physique qu'à l'industrialisation des sociétés, au moins en Europe et aux Etats-Unis. Dans ce contexte, l'importance prise par la résolution mécanique des équations s'inscrit tout autant dans un contexte pratique d'une augmentation des besoins, que dans un contexte théorique du fait des solutions approchées qu'elle est susceptible de fournir dans les très nombreux cas d'équations différentielles ou de systèmes d'équations algébriques dont la solution formelle est soit inconnue, soit extrêmement laborieuse à obtenir par le calcul manuel.

A. Le calcul scientifique entre mathématiques, physique et ingénierie

Ces analyseurs sont conçus et réalisés par des physiciens qui sont en contact étroit et effectif avec le monde des ingénieurs. Contrairement à ceux de Babbage, ces contacts ne sont plus seulement mondains[40], ils relèvent de leur pratique effective de travail.

William Thomson (1824-1907), qui deviendra Lord Kelvin en 1892, fait une partie de ses études à Cambridge, mais il est aussi formé à l'Université de Glasgow, où est créée la première chaire d'ingénierie civile et de mécanique fondée par la reine Victoria en 1840, et où il occupera la chaire de philosophie naturelle de 1846 à 1899. C'est dans cette ville profondément marquée par l'essor industriel qu'il s'emploie à mettre l'analyse mathématique au service de la physique. Industriel lui-même, il travaille en étroite collaboration avec son frère James Thomson (1822-92), ingénieur aux Chantiers Navals à Londres et à Manchester avant de devenir professeur d'ingénierie civile à Belfast et Glasgow. Kelvin s'impliquera directement dans plusieurs projets politico-industriels d'envergure, dont le plus célèbre est sans nul doute l'installation du câble transatlantique entre la Grande-Bretagne et les Etats-Unis.

Mathématicien et ingénieur de formation, Vannevar Bush (1890-1974) est professeur associé au *Massachusetts Institute of Technology,* où il étudie les questions d'ingénierie électrique depuis 1919. Il a travaillé sur les problèmes de détection sous-marine pendant la Première Guerre Mondiale, et présidera successivement le *National Defense Research Committee,* créé par Roosevelt le 27 juin 1940, puis l'*Office of Scientific Research and Development* en 1941, chargé de coordonner le travail scientifique entre l'armée, l'industrie et l'université. L'analyseur différentiel est mis au point au MIT entre 1927 et 1931, essentiellement pour le calcul des tables de tir destinées à une défense anti-aérienne qui doit s'adapter à l'amélioration de la vitesse et de la hauteur de vol des avions depuis la Première Guerre Mondiale. Il nourrira les recherches sur les grands calculateurs pendant la Seconde Guerre Mondiale.

Douglas R. Hartree (1897-1958) s'intéresse avant tout aux mathématiques appliquées. Il sera successivement professeur de mathématiques appliquées, puis de physique théorique à l'université de Manchester, et de physique mathématique à l'Université de Cambridge. Il étudie la structure atomique en physique théorique, et la propagation des ondes radio. Préoccupé d'analyse numérique depuis qu'il a aidé son père dans les calculs numériques pour l'artillerie anti-aérienne pendant la Première Guerre Mondiale, il construit dès 1935 un modèle en Meccano de l'analyseur différentiel de Bush [cf. Annexe 12], avant d'en faire réaliser un

---

38 Smith & Wise, 1989, p. 650-70,

39 Howarth, 1922, p. 174.

40 Babbage est un personnage reconnu de la bonne société londonienne. Il est membre de nombreux cercles, et reçoit chaque samedi pendant la saison. Sa salle de dessin est un des grands lieux de rencontre de l'Europe intellectuelle libérale. Hyman, 1983, pp. 165 et 175.

modèle complet par la firme Vickers en 1936, grâce à un don personnel du trésorier de l'Université de Manchester.

Comme les textes présentés vont permettre de le préciser, les analyseurs que ces scientifiques mettent au point sont directement conçus pour un calcul scientifique qui se développe en contact étroit avec les besoins techniques de la politique britannique ou américaine. Sur le plan théorique, ils sont destinés à fournir des solutions effectives, sinon exactes, des équations différentielles issues de la physique corpusculaire et de la mécanique ondulatoire.

Destiné à décomposer le mouvement ondulatoire en certaines de ses composantes harmoniques, l'analyseur harmonique de Kelvin [Voir Annexe 6] intervient après qu'un marégraphe ait enregistré les marées sur un cylindre enregistreur à partir des mouvements d'un flotteur installé sur les lieux de la mesure, et avant qu'un prédicteur de marées ne recompose ces harmoniques pour dresser les courbes de marées sur une année[41] [Voir Annexe 7]. Ce programme scientifique est organisé en 1868 au sein de la *British Association for the Advancement of Science,* et concernera surtout l'établissement des tables de marées pour les ports de l'Inde, publiées sous l'autorité du secrétariat d'état des affaires indiennes. Un modèle en est utilisé à Glasgow, et un autre est également réalisé à Londres en 1878, qui servira au Service Météorologique pour enregistrer les variations quotidiennes de la température et de la pression atmosphérique[42]. Dès 1876, William Thomson envisage pour l'analyseur harmonique les applications suivantes :

Je crois qu'en utilisant cette machine pour l'analyse harmonique des marées, on pourra obtenir, en une heure ou deux, chacun des éléments harmoniques simples des marées d'une année enregistrées sur des courbes à la manière habituelle grâce à un marégraphe ordinaire – un résultat qui jusqu'à présent ne requiert pas moins de vingt quatre heures de calcul par des arithméticiens expérimentés. Je pense que cet instrument sera d'une grand utilité pour déterminer les constituants diurne, semi-diurne, tri-diurne, et quadri-diurne des variations quotidiennes de température, de pression barométrique, des composantes Est-Ouest et Nord-Sud de la vitesse du vent, des trois composantes de la force magnétique terrestre, du potentiel électrique de l'air au point où le cours de l'eau se brise en gouttes dans les électromètres atmosphériques, et d'autres sujets relatifs aux observations magnétiques ou météorologiques ordinaires. Il permettra aussi d'estimer précisément la variation du magnétisme terrestre pendant la période de onze ans des taches solaires, et des taches solaires elles-mêmes ; de confirmer ou d'infirmer également d'éventuelles relations entre les taches solaires et les positions et conjonctions planétaires ; d'étudier aussi l'influence de la lune sur la hauteur du baromètre, et sur les composantes de la force magnétique terrestre, et de trouver si l'influence de la lune est sensible sur tout autre phénomène météorologique.[43]

Quant à l'analyseur différentiel, celui de Bush comme celui de Hartree, il sera utilisé à la résolution d'équations différentielles issues de très nombreux domaines. Comme Hartree l'indique en 1949, en rapportant chacun des exemples qu'il donne à des références précises de sa bibliographie :

L'analyseur différentiel évalue les solutions d'équations différentielles, sans se référer aux problèmes particuliers, qu'ils soient physiques, chimiques, techniques, ou autres, d'où proviennent les équations. Le champ des problèmes auxquels il peut être utilisé est donc très vaste. Il a été appliqué à des calculs concernant la structure des atomes ou celle des étoiles, au mouvement des particules électrifiées dans le champ magnétique de la terre de l'espace interplanétaire, ainsi qu'aux temps de parcours des trains de chemins de fer, à l'effet d'un déphasage sur la performance de circuits de contrôle automatiques, aux problèmes de circuits électriques non

[41] Un exemplaire du prédicteur de marées, construit en 1881, se trouve également dans les réserves du Conservatoire National des Arts et Métiers. Acquis en 1950 par le Service Hydrographique de la Marine, il a été utilisé jusqu'en 1966 pour réaliser les calculs de prédiction de marées pour les ports d'Outre-Mer. Il existait avant la Seconde Guerre Mondiale une quinzaine de ces machines dans le monde. Un modèle en est exposé dans le hall d'entrée de l'Etablissement Principal du SHOM à Brest.
[42] Le modèle de Glasgow se trouve aujourd'hui au Département de Physique et d'Astronomie de l'Université de Glasgow, et celui de Londres est exposé au *Science Museum* de Londres.
[43] Thomson W., 1876, p. 496. Les citations issues des textes anglais qui concernent le travail de Kelvin ont été traduites par l'auteur avec la collaboration de Dominique Tournès.

linéaires, au mouvement des fluides, et à la cinétique chimique, aux oscillations de l'atmosphère et à une grande variété d'autres problèmes.[44]

Mais ces analyseurs se distinguent surtout de la machine analytique de Babbage par la façon dont ils traitent les données et le calcul : il ne s'agit plus de machines digitales, ou numériques, mais de machines analogiques. Elles lisent les données et fournissent les solutions sous forme de graphiques, dans un contexte où ni la forme analytique de la fonction de départ, ni celle de la solution, ne sont – ou ne peuvent être – nécessairement connues. Le tracé sur papier millimétré fournit cependant une approximation adaptée aux besoins des ingénieurs et des physiciens. Le programme de calcul de Babbage, visant à maîtriser les phénomènes par la quantification[45], n'est pas tombé dans l'oubli. Mais sa réalisation a adopté une autre forme que celle qu'il avait initiée.

B. De l'intégraphe à l'analyseur harmonique

Quelques rappels sur l'analyse harmonique vont permettre de saisir comment cette décomposition d'une fonction périodique en ses composantes harmoniques passe par le "calcul" – ici mécanique – de l'intégrale d'un produit de deux fonctions.

Et c'est la raison pour laquelle l'analyseur harmonique, qui réalise mécaniquement cette décomposition, prolonge de fait la tradition des planimètres et des intégraphes, mécanismes intégrateurs en usage au 19$^{\text{ème}}$ siècle[46] [voir Annexe 8].

1. Rappels sur l'analyse harmonique[47]

Un phénomène périodique est descriptible comme une somme d'un mouvement périodique simple et de ses harmoniques, avec des amplitudes correctement choisies.

Même une fonction arbitraire peut être représentée sur un certain intervalle par une telle somme, et cette propriété étonnante a fait l'objet d'âpres débats pendant toute la seconde moitié du 18$^{\text{ème}}$ s. On peut écrire :

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{p} - e_1\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi t}{p} - e_2\right) + ...$$

où le nombre de termes de la somme peut être fini ou infini.

On peut se débarrasser des angles de phases en utilisant les formules donnant le cosinus d'une somme de 2 angles, et écrire :

$$f(x) = b_0 + b_1 \cos\frac{2\pi t}{p} + b_2 \cos\frac{4\pi t}{p} + ... + c_1 \sin\frac{2\pi t}{p} + c_2 \sin\frac{4\pi t}{p} + ...$$

L'analyse harmonique d'un phénomène consiste à déterminer les harmoniques fondamentaux, c'est-à-dire les cœfficients du développement de f(x).

Parce que les fonctions sinus et cosinus sont orthogonales (l'intégrale du produit de deux d'entre elles, quelconques et distinctes, sur un intervalle égal à une période, est nulle), on peut montrer que les cœfficients s'expriment par :

$$b_0 = \frac{1}{p}\int_0^p f(t).dt$$

$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(t).\cos\frac{2\pi nt}{p} dt$$

[44] Hartree, 1949, p. 25.

[45] Babbage, *Works,* 2, pp. 15-32.

[46] Un planimètre donne l'aire contenue dans une courbe fermée. L'intégraphe enregistre l'aire sous une courbe. Stibitz attribue le premier appareil de ce type à l'ingénieur allemand J.H. Hermann en 1814. De nombreuses versions améliorées de ce planimètre seront réalisées en France et en Grande-Bretagne. Le *Science Museum* en expose une collection à Londres. Le CNAM possède également une collection de planimètres et intégraphes, qui devrait faire l'objet d'une exposition, organisée conjointement par le CNAM et le projet ACI « Les instruments du calcul savant », conduit par Dominique Tournès (IUFM La Réunion-REHSEIS).

[47] d'après Goldstine, 1972?

$$c_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(t).\sin\frac{2\pi nt}{p} dt$$

Ainsi, l'analyse harmonique consiste à former un nombre d'intégrales de la forme générale :

$$\int_0^p f(t).g(t).dt$$

où g(t) est une fonction sinus ou cosinus.

C'est ce que va réaliser William Thomson par une adaptation ingénieuse de l'intégrateur disque-sphère-cylindre de son frère James.

2. Le principe du mécanisme intégrateur

Afin de préciser d'abord le principe de fonctionnement du mécanisme intégrateur, il est intéressant de s'appuyer sur le texte de Hartree de 1938. S'il est plus tardif, ce texte a le mérite d'être extrêmement clair dans sa description du principe de l'intégrateur, et dans l'analyse des difficultés rencontrées dans la réalisation des appareils existants avant le travail de Kelvin. Selon Hartree donc :

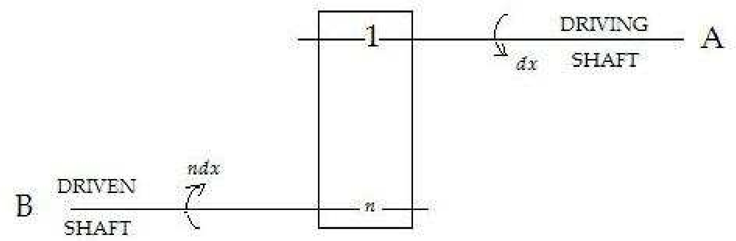


Figure 1

Soit une tige (A), montée pour entraîner une deuxième tige (B) selon un rapport d'entraînement n : 1 (c'est-à-dire que l'axe entraîné fait n tours pendant que l'axe d'entraînement en fait un). Alors, pour une rotation dx de l'axe d'entraînement, quand le rapport d'entraînement est n, la rotation de l'axe entraîné est ndx ; si le rapport d'entraînement change au cours de la rotation de l'axe d'entraînement, la rotation totale de l'axe entraîné est la somme des éléments successifs de la rotation ndx, c'est-à-dire $\int ndx$ *pour la totalité.*

Pour les applications pratiques, il est commode d'avoir un entraînement qui varie continûment et pour lequel il n'y ait aucune difficulté mécanique à ce que le rapport d'engrenage devienne nul ou négatif ; et aussi, pour la précision de l'opération de la machine, le rapport d'entraînement doit pouvoir être fixé avec un grand degré de précision (de l'ordre de 1 sur 3000 ou mieux si on envisage pour la machine une précision globale de 1 sur 1000).

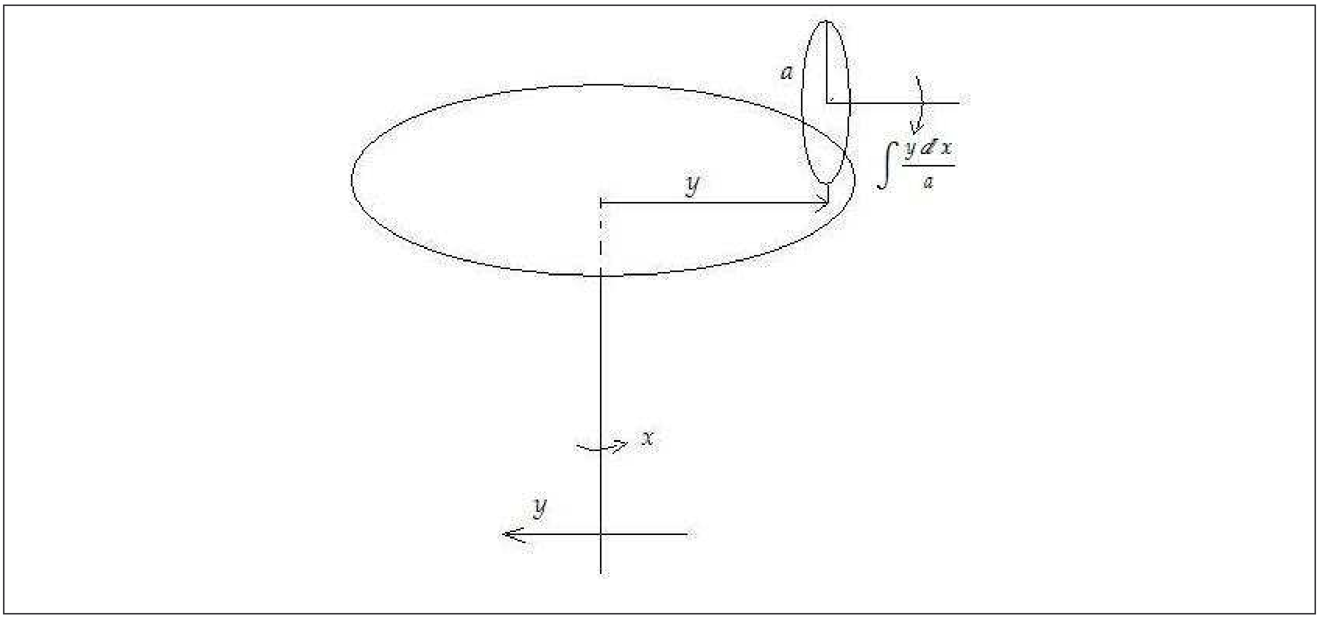


Figure 2

La fig. 2 montre le principe de la forme de l'entraînement variable utilisé. Une roue verticale, dont le plan est fixé, repose sur un disque horizontal qui peut tourner autour d'un axe vertical reposant par un roulement sur un chariot mobile, de telle sorte que la distance y du centre du disque au point de contact de la roue avec le disque puisse varier. Cette distance correspond au rapport d'entraînement n, car si a est le rayon de la roue verticale, alors, si le disque tourne de dx, la rotation de la roue est $\frac{ydx}{a}$*, pourvu qu'il n'y ait pas de glissement (dans le plan de la roue). Ainsi, si le déplacement y varie tandis que le disque est en rotation, la rotation totale de la roue est* $\int \frac{ydx}{a}$*. Il est alors clair qu'aucune difficulté mécanique n'empêche le rapport d'entraînement* $\frac{y}{a}$ *de devenir nul ou négatif. Il est intéressant de savoir qu'un planimètre basé sur ce principe est beaucoup plus vieux que celui du type de planimètre Amsler qui est aujourd'hui plus commun.*[48]

L'analyseur harmonique de Kelvin fait, lui, travailler en série plusieurs mécanismes intégrateurs d'un genre particulier, l'intégrateur disque-sphère-cylindre, inventé par son frère pour surmonter les problèmes de dérapage de la roulette ou d'usure du disque. Voici la description de cet intégrateur particulier, tel que le décrit James Thomson, précisant que le physicien écossais James C. Maxwell[49] (1831-1879) a le premier envisagé une façon d'obtenir un "roulement parfait" en lieu et place de la combinaison peu fiable roulement-glissement. James Thomson écrit donc, en 1876, dans les *Proceedings of the Royal Society* [Voir Annexe 9] :

Le nouveau principe consiste principalement dans la transmission du mouvement issu d'un disque … à un cylindre par l'intermédiaire d'une boule libre, qui presse par sa gravité sur le disque et le cylindre …., dont la pression est suffisante pour donner la cohérence frictionnelle nécessaire en chaque point de contact du roulement ; l'axe du disque …. et celui du cylindre sont toujours maintenus chacun dans une position fixe par rapport à un cadre statique, et la disposition des axes est telle que quand le disque …. et le cylindre sont maintenus immobiles, autrement dit sans rotation sur leurs axes, la boule peut rouler en restant en contact avec chacun d'eux, de telle sorte que le point de contact boule-cylindre parcourt une ligne droite sur la surface cylindrique, nécessairement parallèle à l'axe du cylindre – et de telle sorte que, quand on utilise un disque, le point de contact boule-disque parcourt une ligne droite passant par le centre du disque –….. On peut ainsi

[48] Hartree, 1938, p. 343-344.
[49] Maxwell, 1855.

montrer facilement que,lorsque le cylindre et le disque …. sont au repos ou en rotation autour de leur axe, les deux lignes de contact de la boule , celle avec le cylindre, et celle avec le disque…. , si on les considère comme des droites tracées dans un espace immobile par rapport au cadre de l'instrument tout entier, seront deux droites parallèles, et que la ligne de déplacement du centre de la boule sera également une droite parallèle à ces deux droites. Pour faciliter les explications, le mouvement du centre de la boule le long de cette parallèle à l'axe du cylindre peut être appelé le mouvement longitudinal de la boule.

Qu'en est-il maintenant de l'intégration de y.dz ? La distance entre le point de contact de la boule avec le disque …. et le centre du disque …., dans le mouvement longitudinal de la boule, doit représenter y, tandis que l'espace angulaire obtenu par la rotation du disque …. depuis sa position initiale représente x ; alors, l'espace angulaire obtenu par la rotation du cylindre, une fois multiplié par un cœfficient numérique constant adéquat, exprimera l'intégrale $\int ydx$ *quelle que soit l'unité requise pour son évaluation.*

On peut communiquer à la boule son mouvement longitudinal en disposant le cadre de l'instrument tout entier de telle sorte que les droites qui correspondent au déplacement longitudinal des deux points de contact et du centre de la boule, qui sont trois droites parallèles entre elles, soient suffisamment inclinées à l'horizontale pour que la boule ait nécessairement tendance à descendre le long de la droite de son mouvement longitudinal ; on peut alors régulariser le mouvement de la boule par un contrôleur de butée, qui peut se trouver au point de contact, là où presse la boule, dans un plan perpendiculaire à la droite du mouvement de la boule…

Le plan du disque peut adéquatement être incliné de 45 degrés sur l'horizontale.[50]

De fait, ce mécanisme avait été imaginé par James indépendamment des recherches de William, et c'est à la suite du congrès de la *British Association* à Bristol que le premier met ce mécanisme à la disposition des projets de son frère.

3. Comment l'analyseur harmonique donne l'intégrale d'un produit de deux fonctions

C'est donc une utilisation spécifique de cet intégrateur que réalise William pour obtenir l'intégrale du produit de deux fonctions, une utilisation délicate dans le cas de deux fonctions quelconques, mais relativement plus simple dans le cas où l'une d'entre elles est une fonction trigonométrique.

Pour calculer $\int \Phi(x)\Psi(x)dx$*, le disque en rotation doit être déplacé, à partir de zéro ou de sa position initiale, d'un angle égal à* $\int_0^x \Phi(x)dx$ *, tandis que la boule roulante se déplace de telle sorte qu'elle reste toujours à une distance de sa position initiale égale à Ψ(x). Ceci étant réalisé, le cylindre tournera d'un angle égal à* $\int_0^x \Phi(x)\Psi(x)dx$ *, ce qui résout le problème…….*

La machine ainsi décrite peut immédiatement être utilisée pour calculer les valeurs H_1 , H_2 , H_3 , *etc des constituants harmoniques d'une fonction Ψ(x) dans la splendide généralisation de l'analyse harmonique simple de Fourier, qu'il a lui-même initiée dans les solutions qu'il a données pour la conduction de la chaleur dans la sphère et le cylindre, et qui a été si habilement et si élégamment travaillée par Poisson, et par Sturm et Liouville ds leurs mémorables mémoires sur ce sujet…*

En effet, si $\Psi(x) = H_1(x)\Phi_1(x) + H_2(x)\Phi_2(x) + H_3(x)\Phi_3(x) + etc$

est l'expression d'une fonction arbitraire Ψ(x). en fonction des fonctions harmoniques généralisées Φ_1, Φ_2, Φ_3, *etc, ces fonctions étant telles que*

$$\int_0^1 \Phi_1(x)\Phi_2(x)dx = 0 \qquad \int_0^1 \Phi_1(x)\Phi_3(x)dx = 0 \qquad \int_0^1 \Phi_1(x)\Phi_4(x)dx = 0 \quad etc$$

on aura :

---

[50] Thomson J., 1876, p. 489-490. Les points de suspension présents dans ce texte correspondent au fait que j'ai supprimé les références faites par James Thomson au système disque-cône-cylindre envisagé par Maxwell, et auquel James Thomson se réfère sans cesse, parallèlement au système disque-sphère-cylindre.

$$H_1 = \frac{\int_0^l \Phi_1(x)\Psi(x)dx}{\int_0^l (\Phi_1(x))^2 dx} \qquad H_2 = \frac{\int_0^l \Phi_2(x)\Psi(x)dx}{\int_0^l (\Phi_2(x))^2 dx} \qquad \textit{etc.}$$

Dans les applications physiques de cette théorie, les intégrales qui constituent les dénominateurs des formules pour H_1, H_2, *etc doivent toujours être évaluées en termes finis d'après une extension de la formule de Fourier pour* $\int_0^x xu_1^2 dx = 0$ *dans son problème du cylindre, qu'a donnée Sturm……[en] 1836. Les intégrales des numérateurs sont calculées très facilement à l'aide de la machine, fonctionnant de la manière décrite ci-dessus.*

La grande utilité pratique de cette machine permettra d'effectuer l'analyse harmonique simple de Fourier pour les observations des marées, de la météorologie et peut-être même de l'astronomie. C'est le cas où :

□(x) = sin (nx)

[ou] *cos (nx)*

et où l'intégration est effectuée sur un intervalle égal $\frac{2i\pi}{n}$ *(i étant un entier), donné par cette application. Dans ce cas, il suffit d'ajouter un simple mécanisme à manivelle, pour donner un mouvement angulaire harmonique simple au disque rotatif dans la période propre* $\frac{2\pi}{n}$, *quand le cylindre qui porte la courbe y =* $\Psi(x)$ *tourne uniformément.*[51]

Bien que l'histoire ait à ce jour retenu surtout les instruments que Lord Kelvin a mis au point pour améliorer la précision des mesures en physique[52], ses recherches dans le domaine de la mécanisation des calculs ne s'arrêtent pas là. La même année, il envisage la façon d'adapter l'analyseur pour résoudre mécaniquement des équations différentielles linéaires du second ordre à cœfficients variables, en écrivant l'équation sous la forme :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{P}\frac{du}{dx}\right) = u, \qquad (1)$$

où P est une fonction donnée quelconque de x, et en procédant par itérations successives[53]. Hartree, qui se réclame comme Bush des travaux de Lord Kelvin en ce domaine, nous en rappelle le principe pour une équation différentielle du premier ordre, ainsi que la difficulté majeure à résoudre pour les équations plus compliquées :

Pour voir comment ce mécanisme d'intégration peut être appliqué à l'intégration des équations différentielles, considérons l'équation simple : $\frac{dz}{dx} = f(z)$, *où f(z) est une fonction donnée de z, qu'il est possible de spécifier par un graphe empirique ou une table et pas nécessairement par une formule analytique. …..Pour voir comment (la machine) traite cette équation, il est plus facile …. de la considérer sous la forme :* $z = \int f(z)dx$. *Sous cette forme, on voit qu'à chaque étape de l'intégration, la quantité f(z) qui doit être fournie à un intégrateur comme intégrande pour cette étape, doit être connectée de manière définie à la valeur que prend l'intégrale pour cette étape……. Ainsi, le problème mécanique est de fournir à l'intégrateur un déplacement y = f(z) qui dépend de manière spécifique de la valeur obtenue pour l'intégrale z ; si c'est possible, la relation entre la rotation du disque (x) et la rotation de la roue (z) donnera la solution de l'équation.*

La manière dont cette connexion est réalisée est indiquée fig. 3.

---

[51] Thomson W., 1876, p. 493-495.

[52] C'est ainsi que le catalogue de l'exposition réalisée à Glasgow en 1970 sur les instruments réalisés par Lord Kelvin pour la précision des mesures en physique, ne contient qu'une allusion aux machines dont il est ici question : « Il inventa …. aussi une série de mesureurs, d'analyseurs et de prédicteurs de marées, qui permirent la prédiction de la marée en n'importe quel port du monde ». Green & Lloyd, 1970, p. 2.

[53] Thomson, William, 1876 b, p. 497.

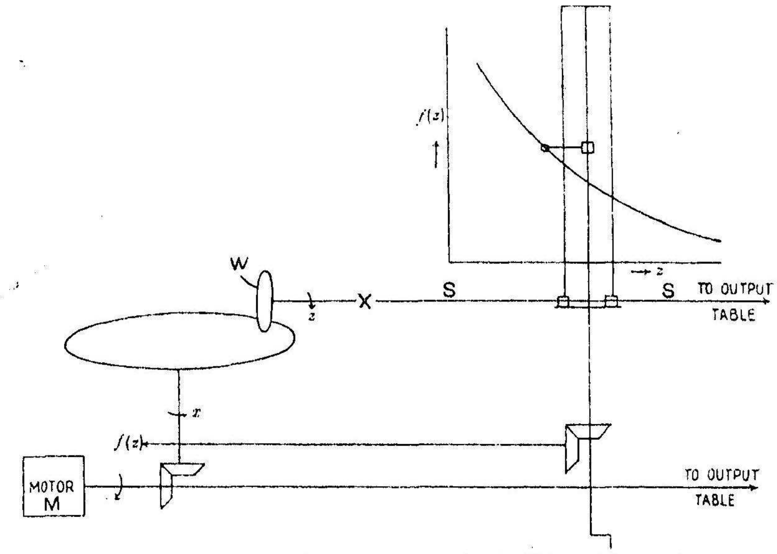


FIG. 3. Application of integrator to a simple differential equation

$$\frac{dz}{dx}=f(z), \quad \text{or} \quad z=\int f(z)\,dx.$$

Figure 3

Un graphe de f(z) en fonction de z, tracé auparavant, est fixé sur une table, appelée table d'entrée, et une glissière, située au-dessus de la table parallèlement aux ordonnées du graphe, se déplace perpendiculairement à elle-même grâce à la rotation de la roue d'intégration : ce mouvement est réalisé grâce à une vis SS, qui ne peut se déplacer axialement, et qui est entraînée par la roue d'intégration passant par un écrou fixé sur la glissière. La glissière soutient un chariot qui porte un pointeur et qui peut se déplacer le long de la glissière par la rotation d'une manivelle. Si l'opérateur tourne la manivelle de telle sorte que le pointeur suive la courbe lorsque la glissière est entraînée le long de la table grâce à la vis, la rotation totale de la manivelle à chaque étape (selon une échelle adéquate et comptée à partir d'un zéro convenablement choisi) sera f(z), où z est la rotation totale de la vis à cette étape à partir de la position zéro. Si maintenant on fixe un entraînement à cette manivelle pour déplacer l'intégrateur, on fournira à chaque étape à l'intégrateur un déplacement f(z) correspondant à la valeur obtenue pour l'intégrale z à cette étape, et ceci est précisément ce que nous voulions faire pour résoudre l'équation. La rotation du moteur M, qui représente l'accroissement continu de la variable x, entraîne alors le reste du mécanisme conformément à l'équation.

Finalement, la solution (c'est-à-dire z comme fonction de x) doit être enregistrée. Ce qui peut être fait graphiquement sur une seconde table (table de sortie) atteinte par une glissière mobile semblable, soutenant un chariot semblable portant un crayon au lieu d'un pointeur ; si la glissière se déplace en abscisse grâce à l'axe dont la rotation est x, et si le support du crayon se déplace sur un axe entraîné par la roue d'intégration, le crayon tracera un graphe de z en fonction de x…….

Il reste un point mécanique important à ajouter. Dans un planimètre basé sur l'intégrateur que montre la fig. 2, la roue d'intégration n'a qu'à entraîner le compteur qui enregistre le nombre de révolutions qu'elle a faites ; ceci est une tension légère, qui peut facilement être assurée par la force de friction entre la roue et le disque. Mais dans l'évaluation des solutions des équations différentielles, la roue d'intégration (W fig. 3) peut avoir à entraîner tout un tas de mécanismes ; ….., dans les équations moins simples, elle doit aussi déplacer ou *faire tourner non seulement un mais plusieurs intégrateurs. Ceci ne peut être assuré par la force de friction entre le disque et la roue seule.*[54]

C'est là un autre élément important qui intervient dans la marginalisation de ce type de travail par une histoire qui tend à ne retenir que les succès de la recherche, et qui néglige trop souvent les difficultés techniques quand elle étudie les développements scientifiques. Or dans le cas présent, de par leur mode même de fonctionnement, le développement des machines analogiques est en contact étroit avec l'histoire des techniques. C'est bien en raison d'une question technique que ces machines analogiques, que Kelvin appelle « machines à calculer continues », n'ont pas eu immédiatement le succès escompté : la possibilité d'une résolution mécanique des équations différentielles fondée sur le principe de réitération du calcul suppose que soit résolu le problème de l'entraînement dans la transmission du mouvement mécanique d'un intégrateur à un autre.

C. L'analyseur différentiel

En raison de l'absence de solutions formelles pour bon nombre d'équations différentielles, ou de la difficulté à les obtenir dans le cas des systèmes d'équations algébriques, la possibilité d'une résolution mécanique des équations demeure pourtant d'un intérêt capital.

1. Le nouveau contexte du développement des machines analogiques

C'est dans cette perspective que Vannevar Bush situe la mise au point de l'analyseur différentiel en 1928 :

Le statut de la physique et de l'ingénierie est aujourd'hui particulièrement favorable aux développements de ce type. L'ingénierie électrique, par exemple, ayant traité substantiellement des réseaux linéaires tout au long de la plus grande partie de son histoire, introduit maintenant rapidement dans ces réseaux des éléments dont la non-linéarité est le caractère principal …..

Au Département d'Ingénierie Electrique du Massachusetts Institute of Technology, le développement a suivi trois directions. La première concerne le processus de résolution d'équations algébriques simultanées compliquées comme celles qui interviennent par exemple dans le traitement des réseaux modernes sous tension, au moyen de mesure du courant alternatif faites sur une réplique électrique du système. Les agglomérats de bobines, de résistances, et de condensateurs par lesquels on y parvient s'appelle un analyseur de réseau. La seconde consiste à s'attaquer à l'intégrale à paramètre variable par une méthode optique d'abord suggérée par Wiener. Ce qui donne une approche de l'équation intégrale et de certains processus d'analyse statistique. L'appareil lui-même est appelé un intégraphe photoélectrique. La troisième traite de l'équation différentielle ordinaire, et fournit des solutions sous forme de courbes par points pour des conditions aux limites spécifiées. La machine traitée dans le présent article est la dernière étape de cette troisième direction. On l'appelle un analyseur différentiel.

La machine pour résoudre les équations différentielles ordinaires du second ordre, qui a été décrite dans ce journal en 1928, en dépit de ses limitations, a été utilisée avec succès dans un grand nombre de problèmes, dont certains ont été décrits dans la littérature. Il a été très définitivement prouvé qu'une telle machine, si elle est flexible, robuste et précise, pouvait rendre de très grands services en ingénierie et en physique…..

La technique a énormément évolué depuis l'époque où William Thomson suggéra pour la première fois, il y a plus de cinquante ans, que les intégrateurs conçus par son frère pouvaient être connectés entre eux et contraints par là à produire des solutions d'équations différentielles. L'idée pouvait difficilement être mise en pratique, pour la simple raison qu'un intégrateur, qui est simplement une transmission à vitesse variable, ne pouvait pas encore être construit en étant tout à la fois précis et capable de supporter une charge suffisante pour mouvoir de nombreuses pièces mécaniques.

Le présent appareil reprend la même idée de base de l'interconnexion d'unités d'intégration, comme dans cette machine précédemment décrite. Mais dans le détail, il y a peu de ressemblance avec le modèle initial.[55]

[54] Hartree, 1938, p. 344-346.
[55] Bush, 1931, p. 448-449.

La taille même de la machine suffit à indiquer le changement d'échelle qui est intervenu dans ces recherches depuis la machine de Kelvin [Voir Annexe 10]. Dès l'introduction de son article de 1938, Hartree situe clairement l'analyseur différentiel, non pas dans la lignée des machines arithmétiques, mais dans celle des machines qui cherchent à matérialiser les variations continues d'une variable ou d'une fonction. Il fait en même temps le point sur les conditions d'utilisation de cette machine, et sur l'importance de son développement. L'exposé de Hartree est suffisamment détaillé pour se laisser guider par sa présentation, tout en consultant les illustrations jointes en annexes :

La plupart des machines à calculer traitent les opérations de l'arithmétique (addition, soustraction, multiplication, division), seules ou combinées, mais peu d'entre elles ont été conçues pour maîtriser des calculs qui contiennent les idées et la technique du Calculus [le calcul différentiel et intégral] et en particulier l'idée de taux de variation d'une quantité variable, qui est un concept tout à fait étranger au type de machine purement arithmétique. Un des usages de telles machines, d'une importance pratique toute particulière, est l'évaluation des solutions des équations différentielles.

Des équations différentielles qui n'ont pas de solution formelle, ou aucune solution qui convienne à l'évaluation numérique, interviennent fréquemment dans un très vaste champ d'application des mathématiques aux problèmes de la science, aussi bien pure qu'appliquée, en particulier en physique et en ingénierie électrique, mais aussi dans d'autres branches de l'ingénieur, ainsi qu'en chimie, en biologie, et possiblement aussi en économie ; et, dans les contextes où elles interviennent, le plus souvent, ce n'est pas la forme qualitative de la solution qui est intéressante, mais les valeurs quantitatives numériques effectives.

….La mise au point d'un moyen mécanique pour évaluer les solutions de telles équations, un moyen qui soit rapide, assez précis pour les besoins pratiques, et facilement applicable à un vaste domaine d'équations, [constitue] une avancée technique importante, et [aura] un vaste domaine d'applications dans la science pure et appliquée.

Une telle avancée a été réalisée par le Dr V. Bush du Massachussetts Institute of Technology, qui a conçu, construit et développé une machine qu'il a appelé l'Analyseur Différentiel. Le nom de cette machine, soit dit en passant, me paraît très peu appropriée, car cette machine ne différentie pas plus qu'elle n'analyse, puisque, bien plus précisément, elle effectue l'inverse de chacune de ces opérations. Quoi qu'il en soit, c'est l'enfant du Dr Bush et je pense qu'il a le droit de la baptiser. La conception originale d'une telle machine, en termes généraux, formée d'un certain nombre de mécanismes intégrateurs reliés entre eux, est due à Kelvin, mais la première réalisation pratique d'une machine qui ait été faite, et qui puisse opérer de manière fiable et précise une fois construite, est due au Dr Bush.

Il y a deux ou trois autres machines aujourd'hui en opération en Amérique ; en Europe, il y en a une à l'Université de Manchester qui opère maintenant depuis trois ans et dont je me suis beacucoup occupé ; d'autres sont en construction dans les universités de Cambridge et d'Oslo. L'Université de Manchester doit sa machine à la générosité de son trésorier, Sir Robert Mc Dougall, qui a défrayé l'université du coût de la machine, aux conseils et à l'aide du Dr Bush au moment de sa conception et de sa construction, et au Dr Fleming, directeur de recherches à la Metropolitan Vickers Electrical Company, où la machine a été construite. La machine est à la fois imposante et coûteuse, et il y a déjà un certain nombre de versions plus petites en service ou en construction dans ce pays, comme nous le mentionnerons plus tard….

La machine est formée d'un certain nombre d'unités de calcul interconnectées par des axes et des engrenages. Chaque unité est la traduction, en termes mécaniques, d'une opération (intégration, addition, etc) qui peut intervenir dans la solution d'une équation différentielle ; chaque axe représente une des quantités qui interviennent dans l'équation, et la rotation de cet axe représente, à une échelle donnée, la grandeur de cette quantité.

Je commencerai par l'opération d'intégration, qui est celle que les unités fondamentales de la machine doivent effectuer.[56]

[56] Hartree, 1938, pp. 342-343.

C’est ici que se situent les rappels précédemment introduits de Hartree sur le principe de l’intégrateur et sur son utilisation pour résoudre une équation différentielle simple du premier ordre, qui ont été déjà mobilisés dans les parties précédentes de cette présentation.

Du point de vue de la résolution des difficultés techniques antérieures, c’est l’introduction d’un amplificateur de torsion associé à chaque intégrateur, ainsi que la mise au point d’un système très souple d'arbres de transmission, qui va permettre aux unités d'intégration d’être interconnectées, ou couplées en retour, à volonté. Mais l'usage de moteurs électriques est bien sûr tout aussi déterminant dans ce développement.

2. L’amplificateur de torsion

Le schéma donné par la fig. 4 de Hartree montre précisément comment intervient cet amplificateur de torsion. Fonctionnant sur le principe du cabestan, il donne la possibilité technique de faire travailler plusieurs intégrateurs en série :

Dans l'évaluation des solutions des équations différentielles, la roue d'intégration (W fig. 3) peut avoir à entraîner tout un tas de mécanismes ; dans l'exemple considéré, elle doit seulement déplacer la glissière de la table d'entrée, et le porte-crayon sur la glissière de la table de sortie, mais, dans les équations moins simples, elle doit aussi déplacer ou faire tourner non seulement un mais plusieurs intégrateurs. Ceci ne peut être assuré par la force de friction entre le disque et la roue seule, et dans ce cas, on introduit en X sur l'axe entraîné par la roue d'intégration un relais mécanique ou "amplificateur de torsion", de telle sorte que la portion d'axe XSS puisse tourner avec la même vitesse que la portion WX, mais avec une torsion plus grande.

L'opération qu'exerce l'amplificateur de torsion repose essentiellement sur le principe du cabestan, familier en statique élémentaire.

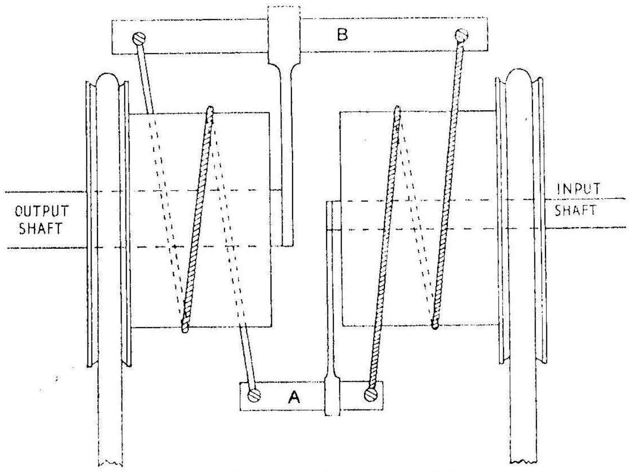


FIG. 4. Principle of torque amplifier.

Figure 4 : amplificateur de torsion

Le diagramme de la fig. 4 montre les parties essentielles d'un amplificateur de torsion ; l'axe d'entrée ou axe directeur est celui auquel la roue d'intégration est fixée, et l'axe de sortie ou axe entraîné est celui auquel le mécanisme qui doit être entraîné par l'intégrateur est relié. Des tambours sont montés coaxialement aux axes, et entraînés en sens opposés par un moteur ; ils tournent indépendamment des axes et sont actionnés en continu quand la machine fonctionne. Sur chaque axe est attaché un bras, et le seul lien entre les deux bras est constitué d'une courroie (si elle est parfaitement flexible) telle que le couple exercé sur le bras B fixé à l'axe de sortie soit plus grand que le couple exercé sur le bras A fixé à l'axe d'entrée ; un rapport de torsion de 60 ou de 80 pour 1 est tout à fait facile à obtenir, et en utilisant deux de ces mécanismes en série, en prenant l'axe de sortie du premier comme entrée du second, on peut obtenir un rapport de torsion de l'ordre de 8000 à 1.

L’annexe 11 montre un intégrateur et l'amplificateur de torsion qui lui est associé.

Le chariot (A), transportant le disque intégrateur (B) glisse sur des tiges (C) et se déplace par la rotation d'une vis (D) passant par un écrou qui fait partie du chariot de l'intégrateur. Une des extrémités de l'axe E qui porte la roue d'intégration (F) est maintenue par un roulement fixe (G) et l'autre extrémité passe par un trou dans l'axe de sortie qui tourne avec la même vitesse , de telle sorte qu'il n'y ait aucune friction. L'amplificateur de torsion (H) se trouve derrière l'intégrateur…..

3. Construction et utilisation de la machine

Hartree rappelle ici comment il eut d'abord l'idée de construire un modèle de démonstration de cette machine à l'aide d'éléments de Meccano, qui a bel et bien fonctionné à la fois qualitativement et quantitativement, avec une précision au 2/100, et qui lui a permis aussi d'expérimenter des idées nouvelles pour de nouveaux éléments de la machine [Voir Annexe 12]. Celle réalisée à Manchester et aujourd'hui exposée en deux morceaux, à Londres et à Manchester, travaillait avec huit intégrateurs couplés chacun à un amplificateur de torsion, et enfermés deux par deux dans des caissons vitrés situés latéralement, avec les tables d'entrée et de sortie, graphiques, de la machine [Voir Annexe 10]. La partie centrale de la machine, la plus visible, est en fait celle qui correspond aux organes mécaniques de liaison entre les organes de calcul. Hartree, comme Bush avant lui, et aussi comme Babbage au 19ème siècle, fournit un tableau de notation de ces différents organes de calcul [Voir Annexe 13], ainsi que différents plans de montage correspondant à la résolution d'équations différentielles spécifiques [Voir Annexe 14].

Hartree précise alors comment l'utilisation de la machine consiste d'abord à traduire les opérations indiquées dans l'équation différentielle en plan de montage. Elle suppose donc un travail collectif qui ne doit pas être passé sous silence, puisque c'est la réflexion sur cette étape de travail qui débouchera sur la conception des programmes d'ordinateur.

Le plan de montage de la machine est d'abord préparé sur papier, et l'installation effective de la machine, qui consiste à disposer les roues d'engrenage, etc., aux endroits appropriés, est réalisée à partir du diagramme finalement obtenu sur le papier. En établissant de diagramme de montage, on utilise une notation dans laquelle chaque unité est représentée par un symbole indiquant sous forme simple l'opération mécanique effectuée par cette unité…..

Le processus de montage de la machine consiste en trois étapes :
(i) On établit le schéma général du type d'unités à utiliser et la manière de les connecter ensemble, sans référence aux échelles ou aux sens de rotation des différents axes.
(ii) On choisit les échelles grâce auxquelles des rotations des différents axes représenteront les variables de l'équation, selon le temps d'utilisation envisagé pour la solution, ainsi que les limites de déplacement des intégrateurs ; ce qui inclut aussi de fixer les rapports requis pour les trains d'engrenage entre les différents axes.
(iii) Sur le plan du squelette de la machine, on dispose les unités à monter dans la machine, avec la localisation des différents axes, engrenages, etc., à utiliser ; on choisit les directions positives de rotation des différents axes, et on détermine le signe des engrenages hélicoïdaux (à main droite et à main gauche) pour chaque connexion entre un axe longitudinal et un axe transversal.

Pour conclure

De l'analyseur harmonique à l'analyseur différentiel, s'est ainsi développée une collaboration étroite entre ingénieurs, physiciens et mathématiciens, qui concerne essentiellement ce qui est plutôt qualifié de « mathématiques appliquées », dès lors qu'il est présupposé que les mathématiques elles-mêmes se développeraient indépendamment de leurs applications. Un siècle de développement de ces machines analogiques réalise assez fidèlement l'ambition de Babbage, qui affirmait l'importance des échanges entre science, gouvernement et industrie. Et c'est précisément en oubliant ce travail collectif, et en n'observant que le développement des machines arithmétique que bien des histoires de l'informatique donnent l'illusion d'un oubli du travail de Babbage.

Oubli d'autant plus dommageable que c'est précisément de l'observation des plans de montage de ces machines, tout comme des plans de montage des circuits électriques et des centraux téléphoniques, qu'émergera au 20ème siècle l'unification de ces processus sous le concept de programme. Une origine « technique » de la notion de programme, qui permet aux historiens russes de parler de « logique technique », et d'en rappeler quelques jalons eux aussi oubliés, comme par exemple à Saint-Petersbourg[57] en 1904, la construction d'un analyseur différentiel pour la construction des bateaux sous la direction de A. N. Krylov (1863-1945) à l'Académie Maritime, et en 1910 au même endroit, les réflexions de Paul Ehrenfest (1880-1933) sur la structuration des centraux téléphoniques. Une histoire, plus arborescente que linéaire, permettra de restituer les recherches menées au cours de la même période en Europe continentale – autour des travaux d'E. Pascal (1865-1940), L. Torres Quevedo (1852-1936), I. S. Bruk (1902-1974), et d'autres scientifiques en Allemagne et en Europe centrale, comme Grigore C. Moisil (1906-1973). en Roumanie – et d'en réévaluer l'importance respective.

Remerciements

Outre mes anciens travaux sur l'Ecole Algébrique Anglaise[58], les recherches qui ont nourri le présent article ont été menées dans le cadre du projet ACI dirigé par Dominique Tournès, que je tiens à remercier pour m'avoir associée à ce projet, tout comme je remercie Christine Proust pour l'aide précieuse qu'elle m'a apportée dans la mise en forme matérielle de cette présentation. Mes remerciements vont aussi à toutes les bibliothèques qui m'ont accueillie, en France et en Grande-Bretagne au cours de ces dernières années, et qui ont si cordialement et si efficacement mis leurs fonds d'archives à ma disposition : Bibliothèque du Conservatoire National des Arts et Métiers, Cambridge Library, Trinity College Library (Cambridge), British Library of London, Royal Society (London), National Museum of Science and Industry (London), Science Museum Library (London), Glasgow University Library, The John Rylands University Library (M*a*nchester). Dans les annexes, les schémas de l'ouvrage de R. Ligonnière sont reproduits avec l'aimable autorisation des éditions Laffont, les photographies personnelles sont publiées avec celle du *National Museum of Science and Industry* de Londres. Les schémas et planches de l'article de Douglas Hartree proviennent du *National Archive for the History of Computing* (Manchester) et sont reproduits avec l'aimable autorisation du conservateur et du directeur de la bibliothèque de l'université de Manchester, *The John Rylands University Library.*

[57] Trogeman, 2001, p. 60.
[58] Durand-Richard, site Web : http://ufr6.univ-paris8.fr/lit-math/maths/MJDR/mjdrcv.html.

Ouvrages cités

Toutes les citations issues des textes anglais ont été traduites par l'auteur.
Celles qui concernent le travail de Kelvin ont été traduites avec la collaboration de Dominique Tournès.

ARBOGAST L.F.A., 1800, *Du Calcul des Dérivations,* Strasbourg, Levrault Frères.

BABBAGE C., III & IV, « An Essay towards the Calculus of Functions », *Philosophical Transactions of the Royal Society,* 105, 1815, pages 389-423, et 106, 1816, pages 179-356, in (eds) CAMPBELL-KELLY M., *The Works of Charles Babbage,* London, William Pickering, 1989, vol. 1, *Mathematical Papers,* pages 93-193.

BABBAGE C., III, « The Science of Numbers Reduced to Mechanism », Buxton Mss, *Museum of the History of Science,* Oxford. in (eds) CAMPBELL-KELLY M., *The Works of Charles Babbage,* London, William Pickering, 1989, vol. 2, *Calculating Engines,* pages 15-32.

BABBAGE C., II, « Une lettre à M. Quetelet de M. Ch. Babbage relativement à la machine à calculer », et IV., "On the Mathematical Powers of the Calculating Engine", 1837, in (eds) CAMPBELL-KELLY M., *The Works of Charles Babbage,* London, William Pickering, 1989, vol. 3, *Analytical Engine and Mechanical Notation,* pages 9-11 et 15-61.

BABBAGE C., *The Economy of Machines and Manufactures,* 1832, in (eds) CAMPBELL-KELLY M., *The Works of Charles Babbage,* London, William Pickering, 1989, vol. 8.

CAMPBELL-KELLY M., CROARKEN M., FLOOD R. & ROBSON E., *The History of Mathematical Tables,* Oxford, Oxford University Press, 2003.

DURAND-RICHARD M.-J., « Charles Babbage (1791-1871) : De l'Ecole algébrique anglaise à la "machine analytique" », *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines*, n° 118, 1992, pages 5-31; "Erratum", n° 120, 1992, pages 79-82.

DURAND-RICHARD M.-J., « L'Ecole Algébrique Anglaise : les conditions conceptuelles et institutionnelles d'un calcul symbolique comme fondement de la connaissance », in (éds) GOLDSTEIN C., GRAY J., RITTER J., *L'Europe Mathematique - Mythes, histoires, identité. Mathematical Europe - Myth, History, Identity,* Paris, Eds M.S.H, "1996, pages 445-77.

DURAND-RICHARD M.-J., « Russell et les fondements de la géométrie », *Histoire de Géométries,* Textes du séminaire 2002, Equipe expérimentale "Formalismes, Formes et Données sensibles : recherches historiques, philosophiques et mathématiques", Fondation Maison des Sciences de l'Homme, 2003, pages 65-104.

DURAND-RICHARD M.-J., « Babbage, Boole et la recherche de la logique des procédures algébriques », in *Des lois de la pensée au constructivisme,* (ed.) Marie-José Durand-Richard, Paris, *Intellectica,* n° 39, 2004/2, 2004, pages 23-53.

GOLDSTINE, Herman H., *The Computer from Pascal to von Neumann,* Princeton Un. Press, 1972.

GRATTAN GUINNESS I., « Babbage as an Algorithmic Thinker », *IEEE Annals of the History of Computing,* 14, n° 3, 1992, pages 34-48.

GRATTAN GUINNESS I., « The computation factory : de Prony's project for making tables in the 1790s », dans (eds) CAMPBELL-KELLY M., CROARKEN M., FLOOD R. & ROBSON E., *The History of Mathematical Tables,* Oxford, Oxford University Press, 2003, pages 105-122.

GREEN G. & LLOYD J.T., *Kelvin Instruments and the Kelvin Museum,* Glasgow, University of Glasgow Press, 1970.

HAMILTON W., 1836, (Anonyme), « CR Thoughts on the Study of Mathematics as a part of a Liberal Education, from W. Whewell », *Edinburgh Review,* janv. 1836, vol. 62, n° 126, p. 409-55. Republié sous le titre : "On the Study of Mathematics as an exercise of mind", dans *Discussions on Philosophy and Literature, Education and University Reform, Chiefly from the Edinburgh Review,* London 1852, 257-327.

HANKEL H., *Theorie der complexen zahlensysteme,* Leipzig, Voss, 1867.

HARTREE D.R., « The mechanical integration of differential equations », *The Mathematical Gazette,* 1938, p. 342-363, based on a paper read at the Annual Meeting of the Mathematical Association, january 1938.

HARTREE D.R., *Calculating Instruments and Machines,* Urbana, The University of Illinois Press, 1949.

HOWARTH O. J. R., *The British Assocation for the Advancement of Science, a retrospect, 1831-1921,* London, Published by the Association, 1922.

HYMAN A., *Charles Babbage, Pioneer of the Computer*, Princeton Un.Press, N. Jersey, 1983.

KELVIN Lord, Voir THOMSON W.

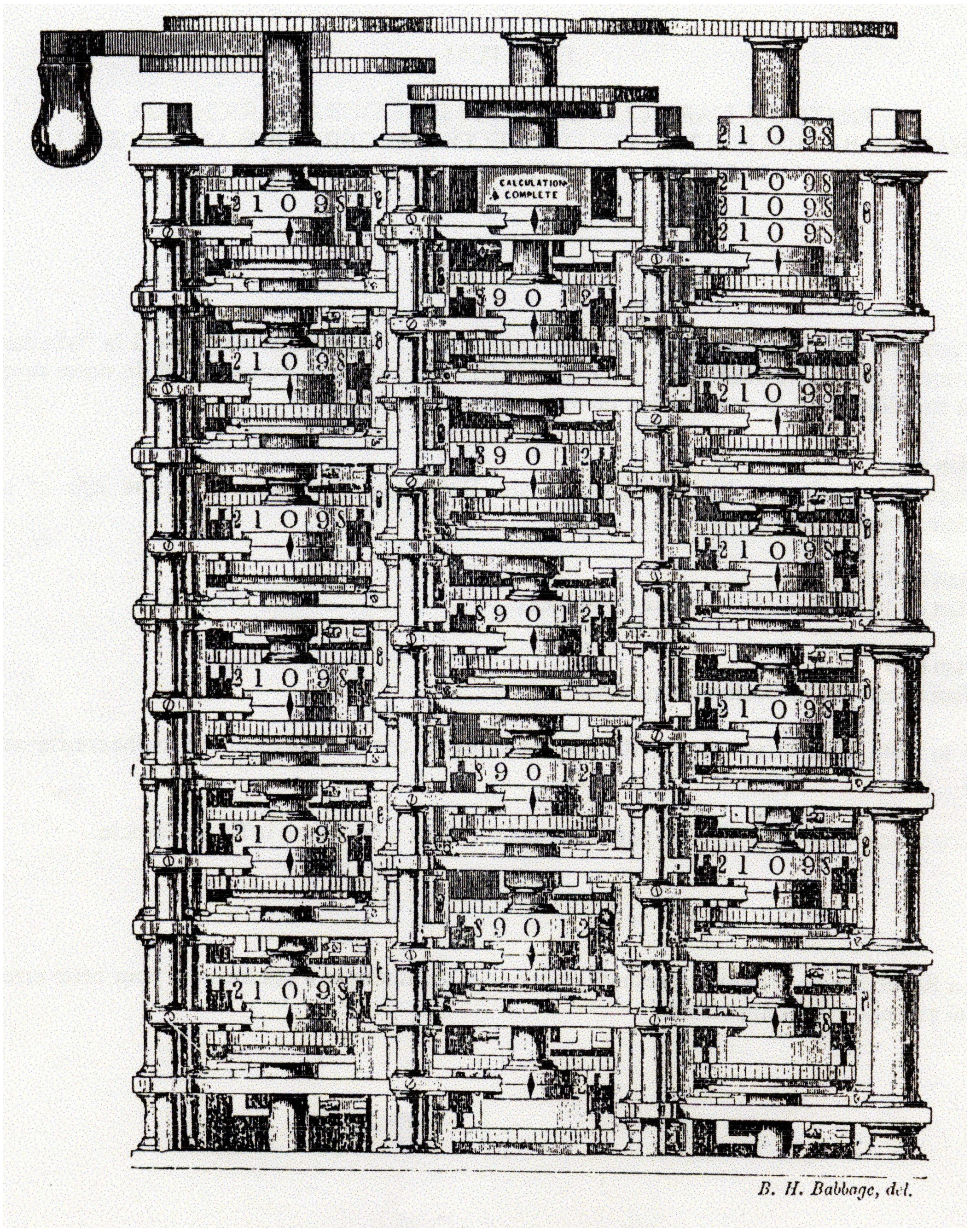
LACROIX S.F., 1799, *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral,* vol. 3 : *des Différences et des Séries,* Paris, .
LACROIX S.F., 1816, *An Elementary Treatise of Integral and Differential Calculus,* Traduit par Babbage, Ch., Herschel, J.F.W., Peacock, G., Cambridge, Cambridge University Press.
LEIBNIZ G., « Histoire et origine du calcul différentiel », *Les Cahiers de Fontenay,* n° 1, 1975.
LIGONNIERE , *Préhistoire et histoire des ordinateurs,* Paris, Robert Laffont, 1987.
LOVELACE A.A., « Sketch of the Analytical Engine », in (eds) CAMPBELL-KELLY M., *The Works of Charles Babbage,* London, William Pickering, 1989, vol. 3, *Analytical Engine and Mechanical Notation,* pages89-170.
MARX K., *Le Capital,* Paris, Editions Sociales, 1952, vol. 2.
MAXWELL J.C., *Proceedings of the Royal Scottish Society of Arts,* vol. IV, 1855.
MOSCONI J., "Charles Babbage : vers une théorie du calcul mécanique", *Revue d'Histoire des Sciences*, XXXV, 1, 1983, pages 69-107.
NEUMANN J. von, « A First Draft of a Report on the EDVAC », 1945, june the 30th,, reproduit dans *Annals of the History of Computing,*15, n° 4, pages 28-75.
PEACOCK G., 1833, "Report on the Recent Progress and Actual State of several Branches of Analysis", *Third meeting of the British Association for the Advancement of Science,* Cambridge.
PLAYFAIR J., (Anonymous), : Review : « A Reply to the Calumnies of the Edinburgh Review against Oxford ; containing an Account of Studies pursued in that University. Oxford », *Edinburgh Review*, vol. 16, n° XXXI, apr. 1810, pages 158-87.
PLAYFAIR J., "On the Arithmetic of Impossible Quantities", *Philosophical Transactions of the Royal Society*, n° 68, 1778, pages 318-343.
PONTEIL F, "L'éveil des nationalités et le mouvement libéral", *Peuples et Civilisations,* Paris, XV, 1968.
Reports of the Meetings of the British Association for the Advancement of Science, London. John Murray, depuis 1831.
SMITH C., & WISE M.N., *Energy and Empire: a biographical study of Lord Kelvin*, Cambridge, 1989.
STEWART D, *Elements of the Philosophy of Human Mind,* Edinburgh, A. Constable, 1792, vol. I.
STIBITZ G., « Mathematical Instruments », *Encyclopaedia Britannica,* London, 1948.
SYLVESTER J. J., « Presidential Address : Mathematics and Physics Section », *Report of the Thirty-ninth Meeting of the British Association for the Advancement of Science, held at Exeter in August 1869,* London. John Murray. 1870, pages 1-9.
THOMSON W., « An Instrument for calculating $\left(\int \Phi(x)\Psi(x)dx\right)$, the Integral of the Product of two given Functions », *Proceedings of the Royal Society,* 24, 1876, pages 266. Reproduit dans *Treatise on Natural Philosophy,* 1879, pp. 493-496.
THOMSON W., « Mechanical Integration of linear differential equations of the second order with variable cœfficients », *Proceedings of the Royal Society,* 24, 1876, pages 269-271. Reproduit dans *Treatise on Natural Philosophy,* 1879, pages 497-499
THOMSON J., « An Integrating Machine having a new Kinematic Principle », *Proceedings of the Royal Society,* 24, 1876. Reproduit dans THOMSON W., *Treatise on Natural Philosophy,* 1879, pp. 488-492.
TOURNES D., *L'intégration approchée des équations différentielles ordinaires (1671-1914),* Thèse de doctorat de l'université Paris 7 Denis Diderot, 1996.
TROGEMANN G., NITUSSOV, A. Y. & WOLFGANG E. (Eds), *Computing in Russia. The History of Computer Devices and Information Technology revealed,* Vieweg, 2001.
VERLEY J.-L., « Présentation historique générale », *Images, Imaginaires, Imaginations, une perspective historique pour l'introduction des nombres complexes,* Paris, Ellipses, 1998.
WOODHOUSE, R., 1801, « On the necessary truth of certain conclusions obtained by means of imaginary quantities », *Phiosophical. Transactions,* 1801, 91, 89-119.

Annexes

Annexe 1 : Machine aux différences n° 1
Annexe 2 : Machine aux différences n° 2
Annexe 3 : Schéma de l'évolution des conceptions de Babbage, de la machine aux différences à la machine analytique.
Annexe 4 : Plan de la machine analytique
Annexe 5 : Représentation d'un cylindre à picots et de ses mouvements possibles
Annexe 6 : Analyseur harmonique de Kelvin
Annexe 7 : Prédicteur de marées de Kelvin
Annexe 8 : Planimètre de Coradi
Annexe 9 : Intégrateur disque-sphère-cylindre de l'analyseur harmonique de Kelvin
Annexe 10 : Partie de l'analyseur différentiel de Hartree
Annexe 11 : Planche commentée de l'amplificateur de torsion
Annexe 12 : Modèle en Meccano de l'analyseur différentiel construit par Hartree en 1935
Annexe 13 : Notations correspondant aux différents organes de calcul de l'analyseur différentiel.
Annexe 14 : Un exemple de plans de montage associés à la résolution mécanique d'équations différentielles spécifiques

Annexe 1 : Machine aux différences n° 1
Aujourd'hui exposée au *Science Museum* de Londres.

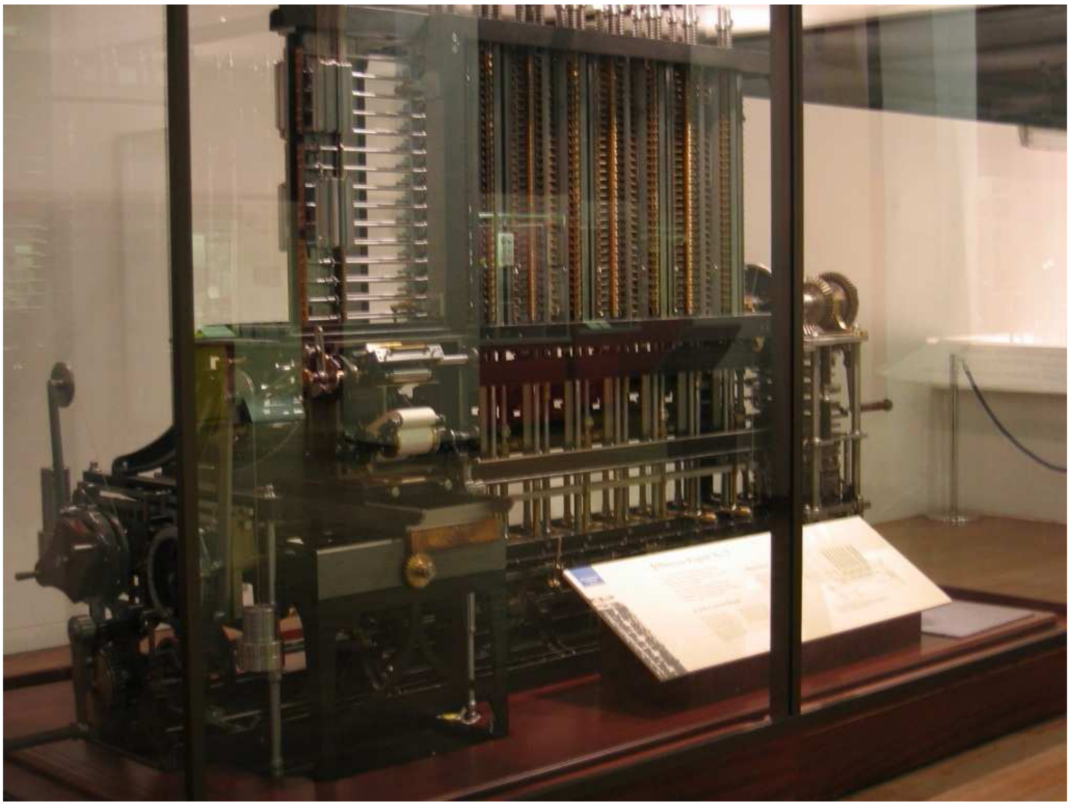
Page de garde de l'autobiographie de Babbage *Passages of the Life of a Philosopher,*
reproduite de *Mathématiques, Informatique et Sciences Humaines,* n° 120, pages 79-82.



Annexe 2 : Machine aux différences n° 2

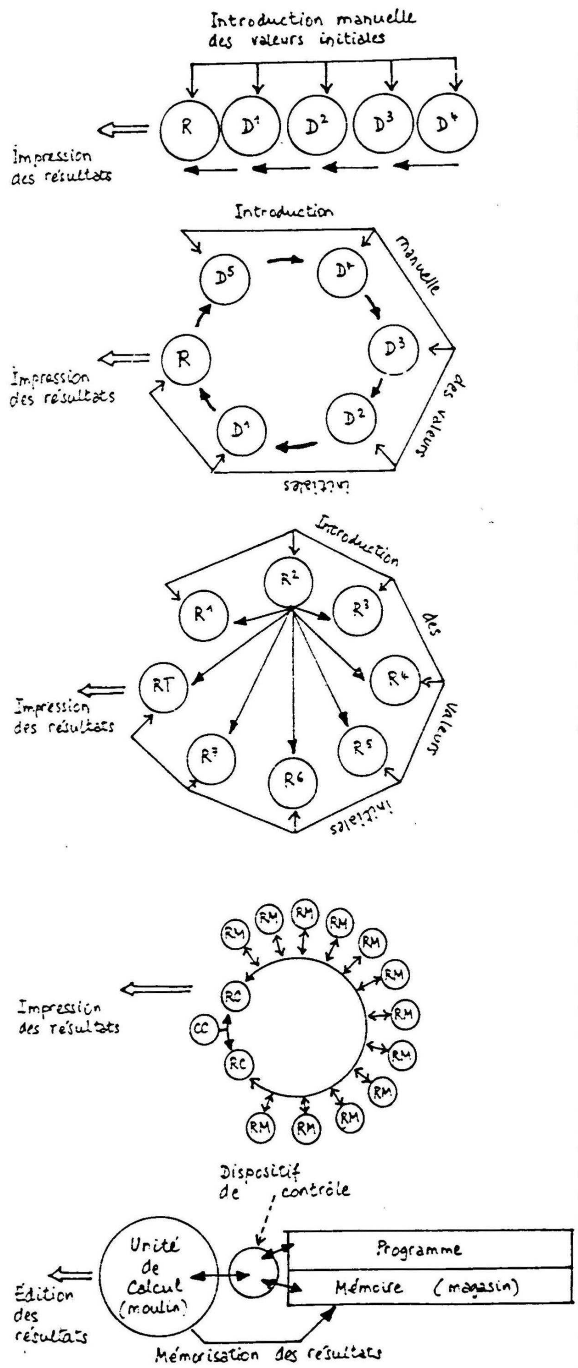
Aujourd'hui construite et exposée au *Science Museum* de Londres

Photographiée par l'auteur



Annexe 3 : Schéma de l’évolution des conceptions de Babbage, de la machine aux différences à la machine analytique.

D’après Ligonnière, p. 93.



1832 : Dans la machine à différence, de disposition linéaire, l'ordre des opérations de transfert est immuable.

1833 : Avec une disposition en cercle des colonnes de chiffres, une boucle sans fin des transferts de colonne à colonne devient possible.

1834 : Les souplesses permises par la disposition circulaire bouleversent la conception de la machine :

- les colonnes de rouages décimaux (R1 à R...) deviennent des registres indépendants les uns des autres ;
- tout registre (ex. : R2) peut être mis en correspondance, à volonté, avec n'importe lequel des autres registres ;
- un registre totalisateur (RT) est chargé de collecter les résultats à imprimer.

1835 : A - En développant cette architecture, Babbage imagine de spécialiser les registres et de relier des registres mémoire (RM) avec des registres de calcul (RC), sous la supervision d'un cylindre contrôleur (CC).

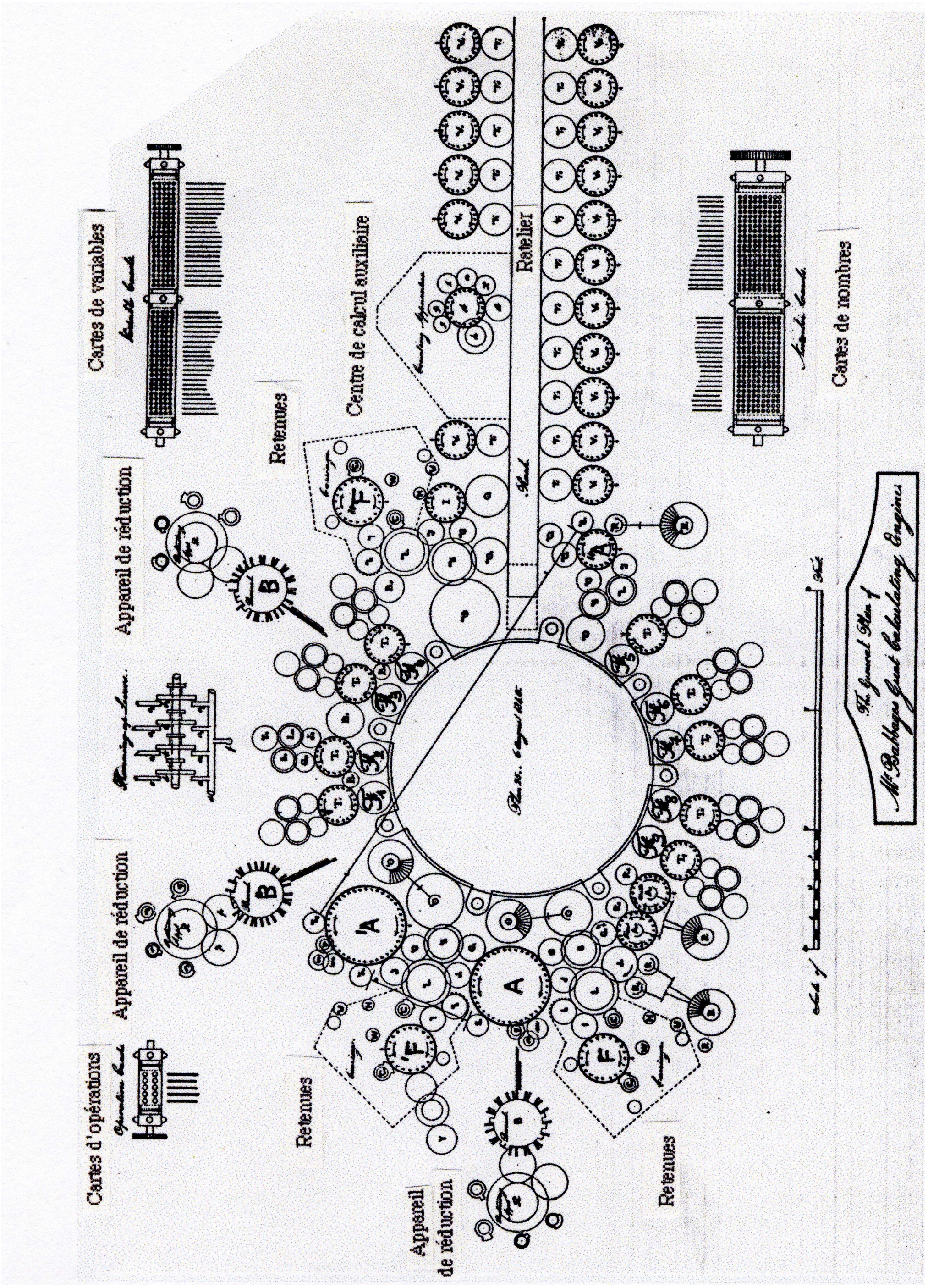
B - A condition de maîtriser : 1° la séquence des instructions au moyen d'un programme sur cartes perforées ; 2° l'exécution de ces instructions au moyen de dispositifs de contrôles (cylindres), l'exécution de tout calcul algorithmique sur des valeurs et des formules puisées en mémoire (registres) devient possible. Dans ces conditions, les possibilités théoriques de la machine sont sans limite. Le concept de machine analytique est né.

Comment Babbage est passé de la machine à différence au concept de machine analytique (1833-1835).

Annexe 4 : Plan de la machine analytique

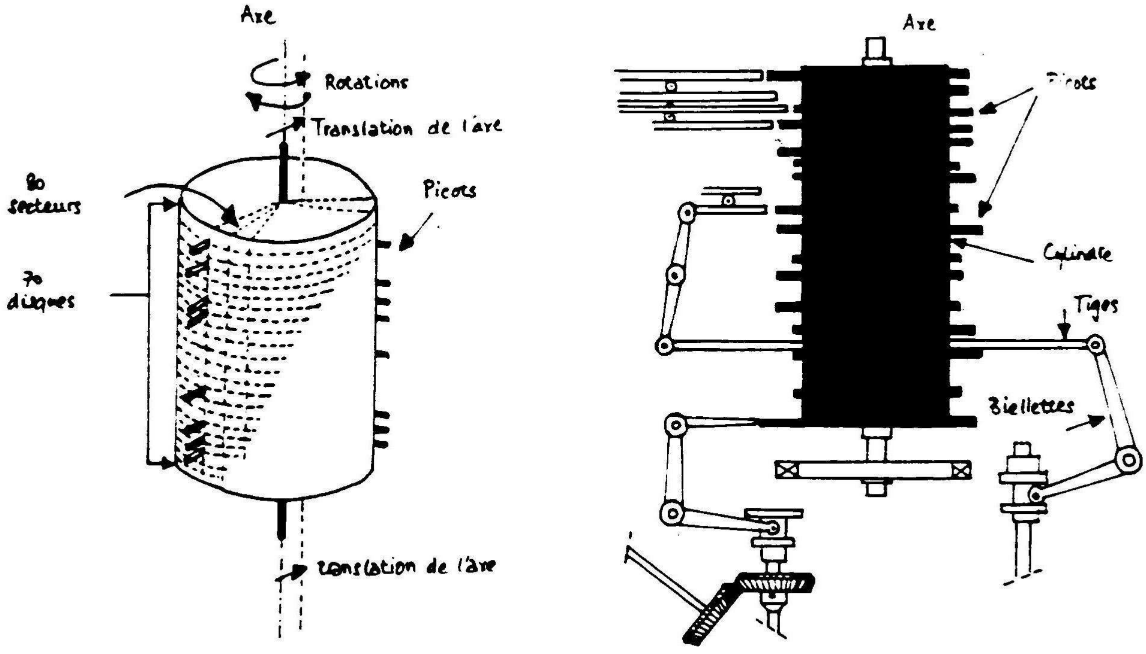
Daté du 06 octobre 1840, déposé à *Science Museum Library* de Londres

Figure complétée par l'auteur, pour le repérage des différentes parties de la machine.
Reproduite de *Mathématiques, Informatique et Sciences Humaines,* n° 120, pages 79-82.



Annexe 5 : Représentation d'un cylindre à picots et de ses mouvements possibles

D'après Ligonnière, p. 98.



Machine analytique : les cylindres à picots. Dans le projet de machine analytique, certaines opérations devaient être commandées au moyen de cylindres à picots, inspirés par ceux en usage dans les automates. En théorie, l'implantation des picots sur un cylindre était modifiable ; mais, comme de tels changements étaient longs à exécuter, les cylindres étaient surtout prévus pour commander des opérations standard répétitives. Par un jeu très complexe de tringlerie, les picots de chaque cylindre déclenchaient des opérations arithmétiques ou logiques dans une portion déterminée de la machine analytique.

Annexe 6 : Analyseur harmonique de Kelvin

Aujourd'hui exposé au *Science Museum* de Londres.

Photographié par l'auteur

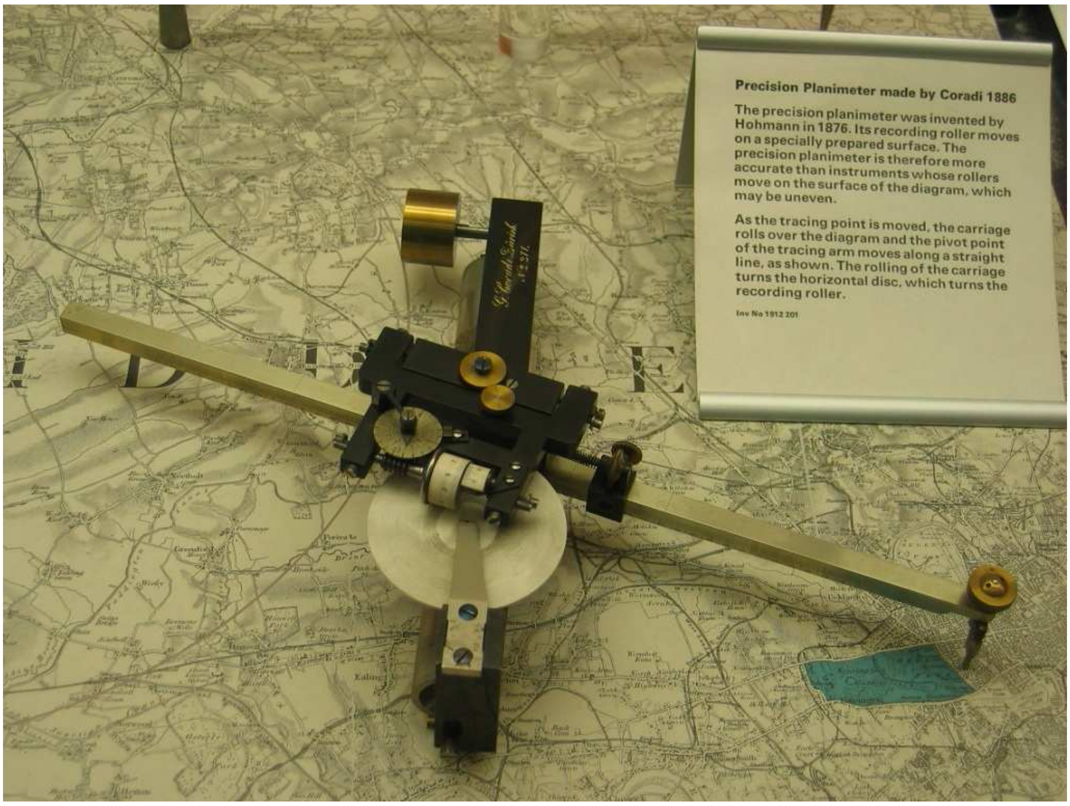
Annexe 7 : Prédicteur de marées de Kelvin
Aujourd'hui exposé au *Science Museum* de Londres

Photographié par l'auteur

Annexe 8 : Planimètre de Coradi

Aujourd'hui exposé au *Science Museum* de Londres

Photographié par l'auteur



Annexe 9 : Intégrateur disque-sphère-cylindre de l'analyseur harmonique de Kelvin
Aujourd'hui exposé au *Science Museum* de Londres

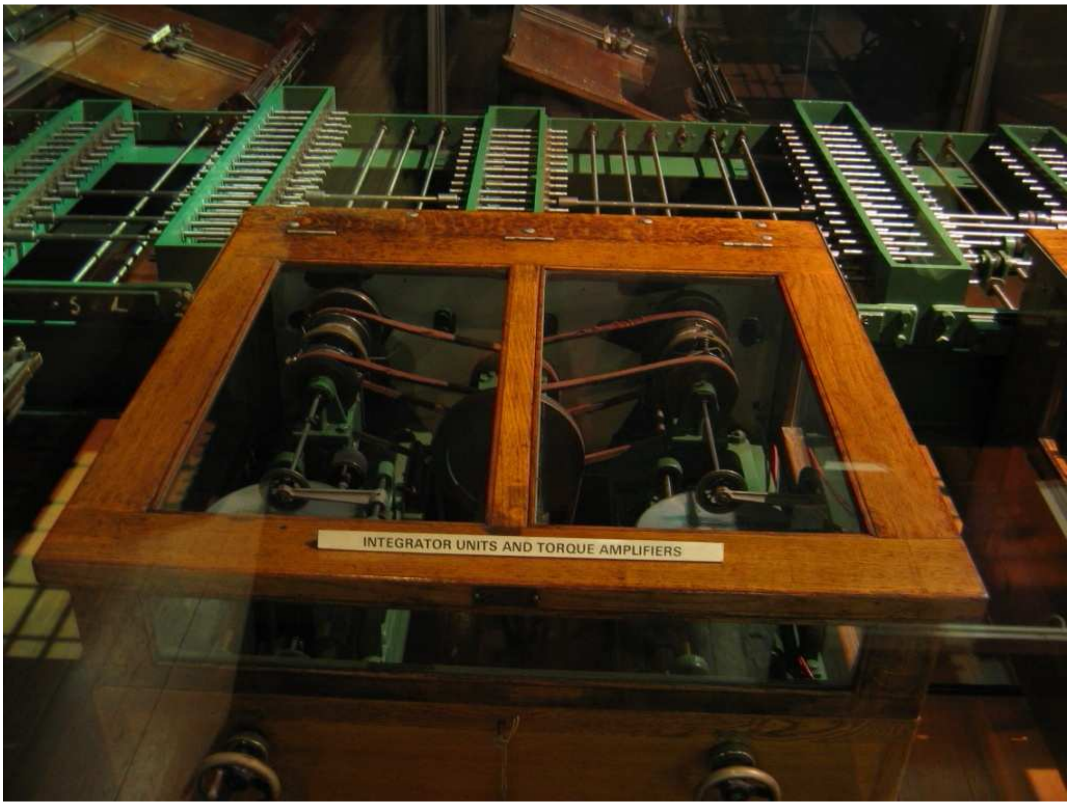
Photographié par l'auteur

Annexe 10 : Partie de l'analyseur différentiel de Hartree

Aujourd'hui exposé au *Science Museum* de Londres.

Une partie équivalente est également exposée au Musée des Sciences et des Techniques de Manchester

Photographié par l'auteur



Annexe 11 : Planche commentée de l’amplificateur de torsion
Planche I du texte de Hartree 1938

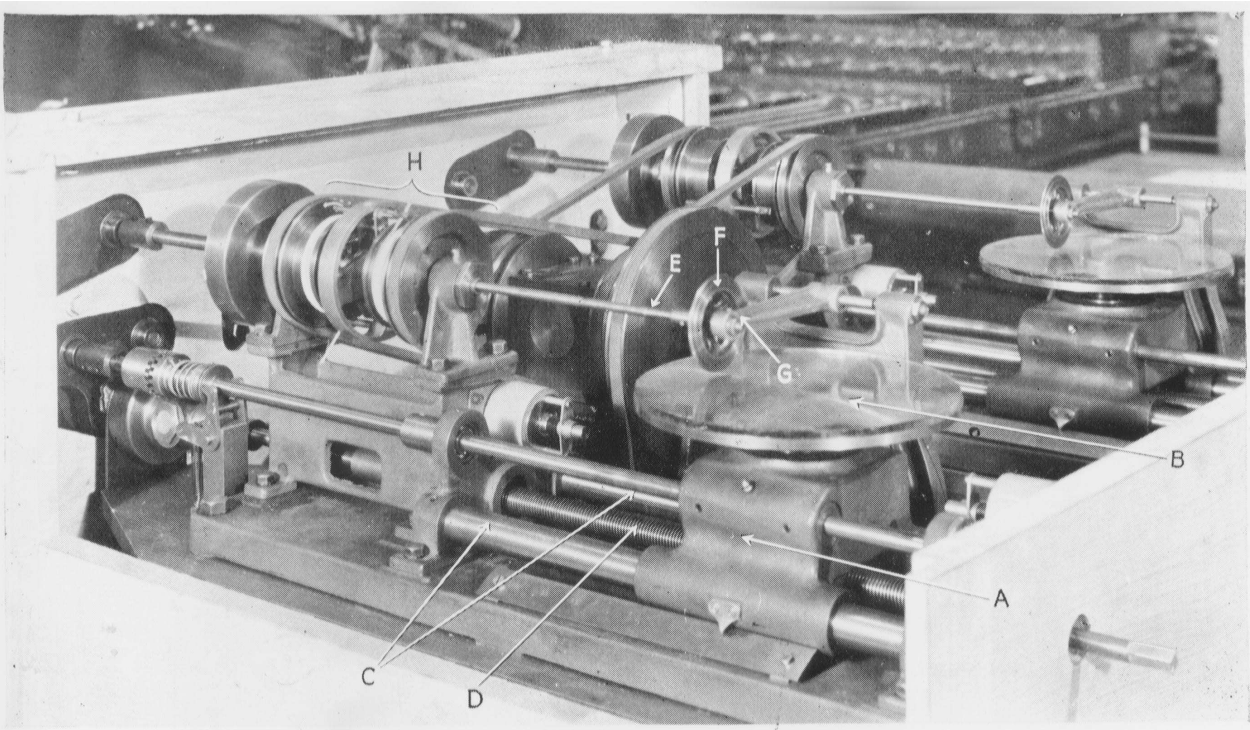
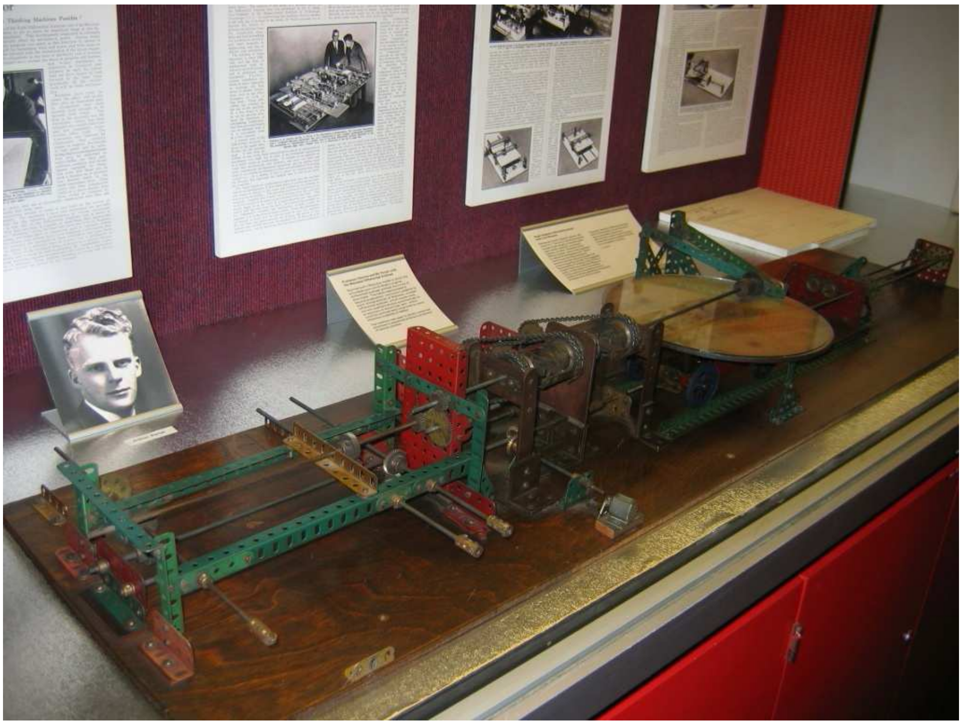


PLATE I. Integrator and torque amplifier.
(*Photo by Metropolitan-Vickers Electrical Co., Ltd.*)

Annexe 12 : Modèle en Meccano de l'analyseur différentiel construit par Hartree en 1935

Aujourd'hui exposé au *Science Museum* de Londres

Photographié par l'auteur



Annexe 13 : Notations correspondant aux différents organes de calcul de l'analyseur différentiel.

Hartree 1938

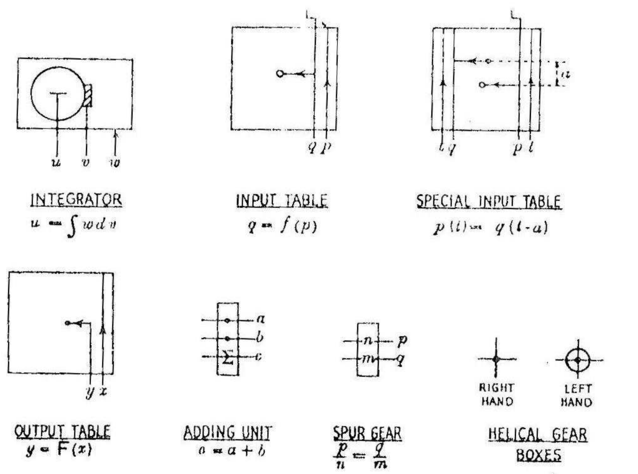


FIG. 5. Notation for units of machine in set-up diagram.

The letters p, q, r ... stand for the quantities whose values are measured by the rotations of the respective shafts. Under the symbol for each unit is given the formula showing the relation between these rotations which results from the operation of the unit.

On the input and output tables,

an open circle o represents a pointer for following a curve;

a black circle ● represents a pencil for drawing a curve.

Annexe 14 : Un exemple de plans de montage associés à la résolution mécanique d’équations différentielles spécifiques

Hartree 1938.

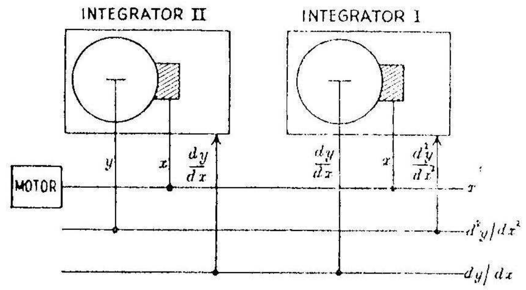


Fig. 6. Set-up diagram for equation $d^2y/dx^2 = -y$. First stage ; scale factor and signs disregarded.

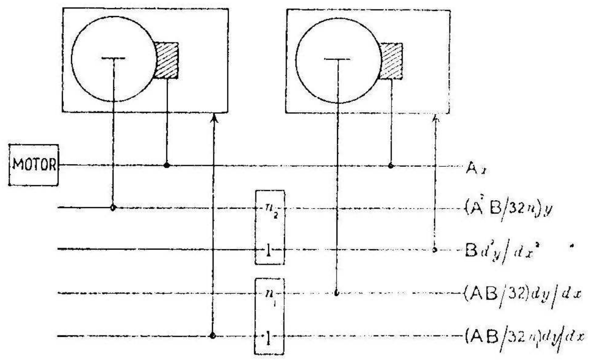


Fig. 7. Set-up diagram for equation $d^2y/dx^2 = -y$. Second stage ; scale factors and gear ratios introduced.

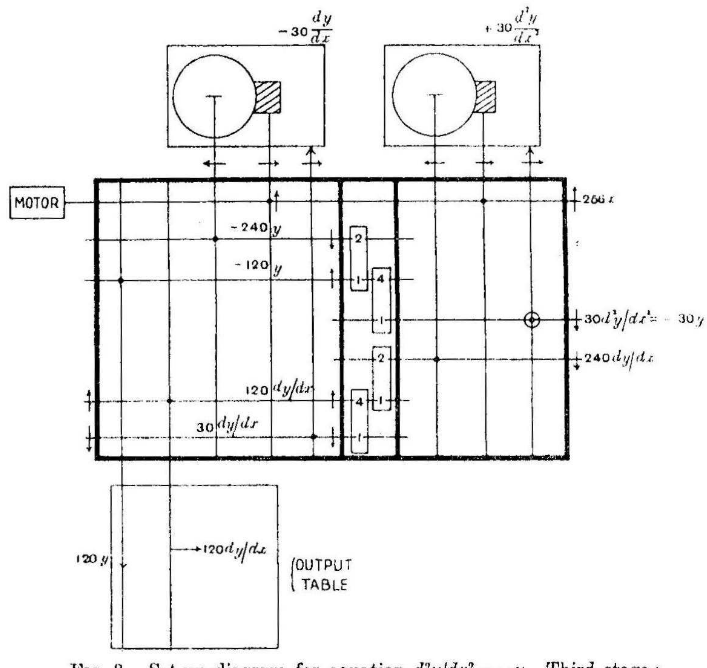


Fig. 8. Set-up diagram for equation $d^2y/dx^2 = -y$. Third stage ; detailed plan of layout on machine, including determination of signs. The heavy lines show the framework of the machine.