Jean-Henri Lambert

Notes et Additions
(1774)
à la
Perspective affranchie de l'embarras du plan géométral

« En guise de conclusion »

Traduction de Jeanne Peiffer
Notes de Roger Laurent et Jeanne Peiffer

Texte extrait de

Roger Laurent, *La place de J-H. Lambert (1728-1777) dans l'histoire de la perspective,* cedic, Paris, 1987, p. 262-274**.**

Cette conclusion de Jean-Henri Lambert est constituée des
15 problèmes de géométrie de la règle.

p. 161 En guise de conclusion [208]

J'ajouterai ici diverses notes et divers problèmes s'insérant en partie dans la dernière section et utiles pour mieux mettre en lumière les liens de parenté entre la géométrie et la perspective. Cette dernière est appelée perspective linéaire ou perspective de la règle [209], si on veut la distinguer de la perspective aérienne — ou chromatique. Cette désignation prend toute sa signification dans le sens que la perspective repose davantage sur l'usage de la règle que du compas. Elle traite de la grandeur et de la position apparentes des objets visibles et se limite à un seul état et à un seul point de vue. À partir d'un point de vue, on ne peut que mesurer des angles, tracer des lignes et au plus déterminer leurs rapports. Cela vaut peut-être la peine d'*examiner jusqu'où on peut aller en perspective et ensuite aussi en géométrie sans utiliser le compas, la règle seule étant admise,* dans le but donc de rendre lineraires au vrai sens du terme la perspective et la géométrie. Dans un second temps, on peut étudier la manière de réduire au maximum le
p. 162 nombre d'éléments exigeant l'emploi du compas dans la résolution des problèmes. Peu importe si ces solutions sont généralement plus longues. Il peut toujours exister des cas où c'est la seule possibilité. La solution la plus brève sur le papier présuppose souvent des mesures de lignes et d'angles sur le terrain qui peuvent ne pas être réalisables, parce qu'elles nécessitent trop de temps et d'efforts ou sont trop coûteuses. On comprend d'ailleurs aisément qu'une telle géométrie linéaire peut aussi servir dans les mesures à vue d'œil dont j'ai exposé quelques règles dans la première partie des *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik* [210].

Pour les constructions à la seule règle, la perspective a un avantage sur la géométrie ; en effet les parallèles en perspective peuvent être tracées sans difficulté. Elle présente un autre avantage encore : dans une figure donnée, on peut dessiner arbitrairement tous les éléments nécessaires à la détermination de l'horizon correspondant, du point de l'œil et de sa distance. Elle nécessite quatre données, auxquelles on ajoute la pente de la table et la ligne d'intersection, si l'on veut donner à la table une position oblique par rapport au géométral et la laisser indéterminée au départ. Ainsi il peut arriver qu'on puisse *construire* en perspective un
p. 163 problème, dont une ou plusieurs données manquent pour la construction géométrique. J'en ai déjà donné un exemple dans les notes et additions à la géométrie pratique § 158 des Contributions citées ci-dessus [210]. J'en ajouterai plusieurs autres.

---

(208) Cette partie est très importante et constitue une contribution à la géométrie projective. Les problèmes proposés par Lambert seront repris dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique* [56] en 1806-1807 par Poinsot et Brianchon. Voir *supra* chap. IV.3. Pour simplifier la lecture de cette partie importante, nous avons choisi une mise en page qui mette en valeur les différents problèmes.

(209) La règle se dit « Lineal » en allemand, d'où « Lineal-perspektive », perspective de la règle et « Linearperspektive », perspective linéaire. Aujourd'hui nous qualifierons le domaine dans lequel se situent les 15 problèmes de Lambert de « géométrie de la règle d'inspiration perspectiviste ».

(210) Contributions à l'usage des mathématiques, Berlin, 1765 [91].

Problème I

Déterminer à l'aide d'une seule règle plusieurs points situés, avec quatre points donnés, non alignés, mais dont chacun est situé en dehors du triangle formé par les trois autres, sur le tracé d'une ellipse.

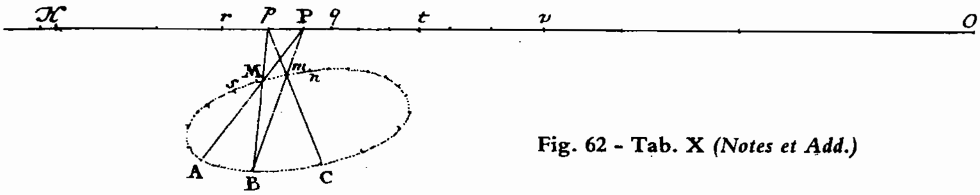

Fig. 62 - Tab. X *(Notes et Add.)*

Ce problème équivaut à mettre en perspective un cercle passant par quatre points donnés. Or trois points suffiraient en soi, si l'horizon était supposé construit et gradué. Mais comme nous en faisons abstraction, le quatrième point est nécessaire et il suffit qu'il soit situé en dehors du triangle formé par les trois autres. Voici la solution : soient A, B, C, M les quatre points donnés. On n'a qu'à tracer une ligne quelconque HO, qui ne coupe aucun d'eux et qui est censée représenter l'horizon ; les préparatifs sont déjà terminés. On trace maintenant la ligne AM issue de A, passant par M et coupant l'horizon en P, ainsi que BM coupant l'horizon **p. 164**
en *p*. Or, si l'on trace BP, C*p*, ces lignes auront un point d'intersection *m* qui sera situé sur l'ellipse cherchée. On procède de la même façon avec *m* qu'avec M, en traçant successivement et dans l'ordre A*mq* [211], B*q*, CP ; *n* sera le point d'intersection de B*q* et de CP et il sera lui aussi situé sur l'ellipse cherchée. De cette manière on s'approche de O en déterminant plusieurs points de l'horizon aussi bien que de l'ellipse. De l'autre côté, on trace ensuite CM*r* [212], B*r* et A*p*. Les droites B*r* et A*p* auront pour intersection le point *s*, qui se trouve également sur l'ellipse. On procède de la même manière en allant vers H et en déterminant plusieurs points de l'horizon et de l'ellipse.

Ce procédé repose sur le fait que AB, BC sont considérés comme des arcs égaux du cercle censé être mis en perspective. Comme AP et BP sont perspectivement parallèles, M*m* représente un arc égal du cercle et tous les angles AMB, MB*m*, BMC, etc. sont des images d'angles égaux ; par conséquent l'horizon est perspectivement divisé en parts égales représentant chacune autant de degrés qu'en comportent ces angles.

Si l'on voulait trouver le point de l'œil et la distance de l'œil à la base de cette perspective, on devrait chercher un point dans lequel les lignes issues de *r*, *p*, P, *q* se couperaient suivant des angles égaux. On peut également choisir des points *q*, *t*, *v*, O plus distants, découpant sur l'horizon des parts trois fois plus longues. Ce problème peut être résolu à l'aide de deux **p. 165**
cercles qui se coupent au point cherché [213].

---

(211) On ne lit pas cette ligne dans la figure 62. Voir *supra* chap. IV.3, Pb. I, p. 186.

(212) Cette ligne ne figure pas non plus dans la figure 62.

(213) Ce problème est traité dans la *(Pers. aff.)*, voir *supra* l'étude chap. III.9.2, pb. 21 relative à la restitution et chap. IV.3, pb. I des *(Notes et Add.)*, p. 186.

En outre, on voit sans peine que l'emplacement de l'horizon n'aurait plus été arbitraire si l'on avait ajouté un point *m* aux quatre points A, B, C, M. Car les lignes AMP, BM*p*, B*m*P, C*m*P suffisent pour déterminer les deux points *p*, P par lesquels on aurait dû faire passer l'horizon, au cas où AB, BC et M*m* représentent des images d'arcs égaux d'un cercle. On comprend aussi aisément qu'avec cinq points donnés, la ligne AM*m*CB ne sera pas toujours une ellipse, mais pourra aussi bien être une parabole, une hyperbole ou un cercle selon la position des cinq points. Voici donc résolu, à l'aide d'une règle seulement, le problème très difficile en soi de *tracer par cinq points une courbe du second ordre* dans la mesure où, avec la méthode indiquée, on peut trouver de nombreux points par lesquels doit passer cette courbe. On peut même trouver une infinité de points si les arcs AB, BC, M*m* sont les images
p. 166 perspectives d'arcs égaux de cercle n'ayant pas un rapport entier à la circonférence du cercle.

Problème II
Diviser l'horizon de 30 degrés en 30 degrés au moyen de la règle.

On dessine arbitrairement un triangle ABC et dans celui-ci un point quelconque *c*; le triangle peut être interprété comme image d'un triangle équilatéral et *c* comme l'image de son centre[214]. On joint le point *c* par des droites aux sommets A, B, C et on les prolonge éventuellement dans les deux sens. Ces droites coupent les côtés du triangle en D, E, F. Par ces points, on fait passer des droites DF, DE, EF, et finalement on les prolonge dans les deux sens, jusqu'à ce que CB et DF, ainsi que BA et EF et aussi AC et DE, se coupent aux points G, L, J. Ces points sont alignés et la ligne LJ représente l'horizon sur lequel LK, KG, GH, HJ, représentent des angles de 30 degrés; en effet, les angles LKB, KBG, GCH = DCB, HCJ = DCA, JAM sont les images des angles de même nom dans le triangle équilatéral dont ABC est la perspective et mesurent donc 30 degrés[215].

Si l'on veut reporter l'échelle de 30 degrés en 30 degrés en partant d'un autre point de
p. 167 l'horizon, *f* par exemple, on tracera une ligne *fd* quelconque issue de *f*. On regardera en quels points elle coupera deux des lignes passant par *c* et formant des angles de 30 degrés, soit en *d* et en *e* par exemple. Au moyen des points L, G, J, on tracera par *d* et par *e* les deux hexagones en pointillés, images de deux hexagones réguliers, parallèles et concentriques ; les points *h*, *d* et *g* seront situés aux sommets de l'hexagone extérieur ; *k*, *e* et *i* se trouveront sur les milieux des côtés de l'hexagone intérieur et *khd*, *edg* et *igl* représenteront des angles égaux. On n'a qu'à prolonger *kh* et *gi* jusqu'à l'horizon, qu'ils couperont en des points distants de 60 et de 120 degrés du point donné *f*. Pour trouver les autres points dont la distance de *f* est de 30, 90, 150 degrés, on tracera 2 autres hexagones tels que *m* et *d* se trouvent sur les milieux des côtés. On peut même laisser de côté l'hexagone passant par *m* car on n'en utilisera que les points *k*, *e*, *i*, qu'on a déjà trouvés ; il n'est pas nécessaire non plus de tracer plus que les trois côtés *pq*, *qr*, *rs* de l'hexagone passant par *d*. Car si l'on trace *pt*, *qm* et *rn*[216] jusqu'à l'horizon, on y aura trouvé les points cherchés. Les points *w*, *v*, *t*, *f*, sont marqués dans le figure. Les deux autres se trouvent au-delà de la figure.

---

(214) C'est le concept de plan de spécialisation affine qu'utilise Lambert. (*Notes et Add.*, tb. X, fig. 63). Voir *supra* chap. III.8.

(215) La fig. 63 comprend 2 fois la lettre *g*. J doit remplacer celui situé à l'extrémité droite de LGK. Voir L. Cremona, *Geometria projettiva*, Turin, 1873, p. 57 et l'étude sur le transporteur ou échelle des angles, *supra* chap. III.2.

(216) Ces trois droites ne sont pas dessinées sur la figure.

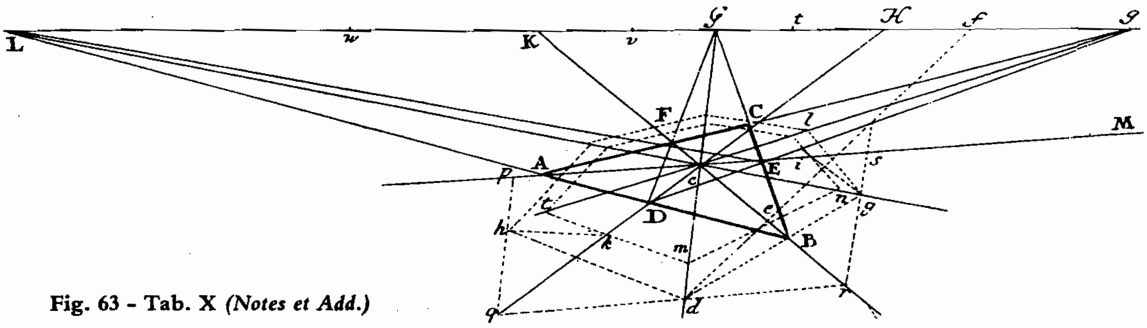

Fig. 63 - Tab. X *(Notes et Add.)*

On ne peut guère aller plus loin à l'aide de la règle seulement, sauf qu'on peut *par approximation partager tout angle en deux ;* mais je ne m'y arrêterai guère. Il existe une autre méthode n'utilisant que la règle pour diviser l'horizon de 30 degrés en 30 degrés, et elle peut trouver sa place ici. On trace l'horizon AB, sur celui-ci on choisit les deux points A et B et on suppose que AB mesure 90 degrés. On choisit arbitrairement un point C, on trace AC et BC, puis deux autres lignes AD et BE issues de A et de B ; AC et AD seront parallèles ainsi que BC et BE et se couperont sous des angles qui sont des images d'angles droits[217]. Dans le rectangle CEFD, on trace CF jusqu'à l'horizon, puis M*f*D, A*f*J, MGJ, CGN, et aussi MEK, A*hk* et M*h*L jusqu'à ce que cette dernière coupe la ligne BCL prolongée en un point, que nous désignerons par L, puisqu'il est au-delà du dessin ; AL coupe la ligne BE en un point H situé lui aussi en dehors du dessin. On trace MH issue de H, jusqu'à ce qu'elle coupe la ligne CB prolongée. Finalement on trace une ligne issue de ce point d'intersection, passant par A et rejoignant la ligne BE prolongée. On trace enfin la ligne TO issue de ce nouveau point d'intersection et passant par C, et ainsi ECF, FCG, GCJ, JCO, OCP, PCQ, QCR, RCS, SCK, KCT, TC*h*, *h*CE représentent les 12 angles de 30 degrés et les lignes CP, CO, CJ, CG, CF, CE divisent l'horizon de 30 degrés en 30 degrés.

p. 168

p. 169

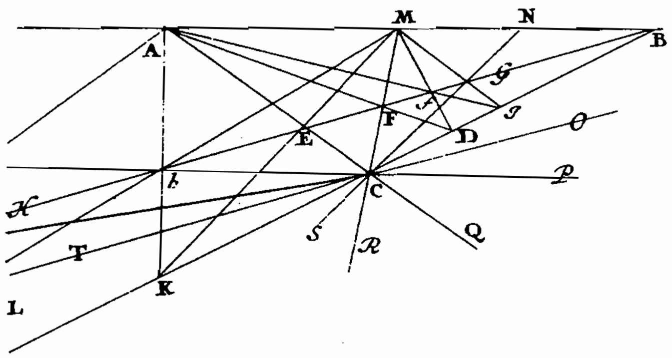

Fig. 64 - Tab. X *(Notes et Add.)*

(217) Lambert fait l'hypothèse que la donnée d'une figure dessinée en perspective permet de définir la transformation « projection centrale ». Il utilise ensuite les propriétés des figures et du transporteur, où la ligne d'horizon est divisée en degrés, pour faire ses constructions. Voir *supra* chap. III.2.

Ce procédé repose sur l'hypothèse que ECF est l'image d'un angle de 30 degrés. Si CE est un diamètre, EF sera la tangente de 30 degrés. Or la tangente de 60 degrés est 3 fois plus grande et c'est pourquoi FG doit être le double de EF pour que EG puisse représenter la tangente de 60° et ECG un angle de 60 degrés. De l'autre côté, on a de même l'égalité E*h* = EF, que l'on a reportée deux fois, afin que EC*h*, ECT représentent des angles de 30 et de 60 degrés.

Problème III

Un parallélogramme ABCD étant donné, construire à l'aide d'une règle seulement, par un point P donné, une ligne parallèle à une ligne IE donnée (218).

On prolonge les côtés du parallélogramme ainsi qu'une diagonale jusqu'à ce qu'ils coupent la ligne donnée en E, F, G, H, I. On trace arbitrairement GR issue de G et ensuite FP et EP. Par les points d'intersection *a, c,* on fait passer des lignes droites issues de H, I. Celles-ci se couperont en un point Q et PQ sera la ligne cherchée (219).

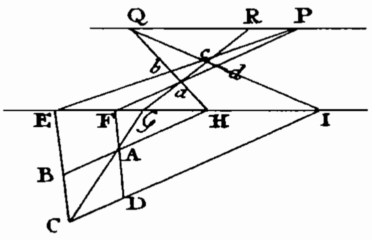

Fig. 65 - Tab. X *(Notes et Add.)*

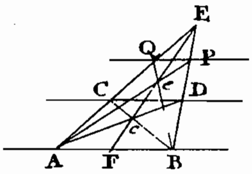

Fig. 66 - Tab. X *(Notes et Add.)*

p. 170 L'image perspective de ABCD est *abcd*, EI est la ligne de terre et QP l'horizon. Si, par hasard, la droite EI est parallèle à deux côtés du parallélogramme, alors elle sera superflue car on pourra immédiatement indiquer que PQ est parallèle à deux côtés du parallélogramme ; il s'agirait alors de *construire à l'aide de la règle seulement une droite parallèle à deux autres parallèles données et passant par un point donné.* La construction est alors la suivante : soient AB et CD les deux parallèles (220). On trace par P une ligne droite BE, issue de B et dépassant P, la ligne AE issue de A, puis AD, BC et E*c*F. Finalement PA, B*e*Q (221) et PQ ; PQ sera la ligne cherchée.

E est alors un point de l'horizon, AB la ligne de terre, CD une parallèle à celle-ci, ABCD l'image d'un rectangle et *c* son centre ; AE, FE et BE sont perspectivement parallèles et par

(218) Lire ici fig. 65, tab. X *(Notes et Add.)* et voir *supra* chap. IV.3 pour l'étude d'un problème extrait de la *Correspondance sur l'École Polytechnique,* article de Hachette reproduit p. 184, relatif à ces questions de construction à l'aide de la règle. On verra qu'en 1805-1806, elles étaient objet d'études dans le cadre de la théorie des transversales.

(219) Lambert donne les règles de construction d'une perspective sans justification, mais sa méthode est tout à fait semblable à celle présentée *supra* chap. III.4.2 et III.4.3 au sujet des méthodes de Brook Taylor.

(220) Lire fig. 66.

(221) Dans l'original, on lit D*e*Q par erreur.

conséquent AF = FB. Le point *e* représente de même le centre du rectangle AQPB[222], AP et QB ses diagonales, QP le côté parallèle à la ligne de terre ; par conséquent ce parallélisme n'est pas seulement perspectif mais aussi géométrique[223].

On voit dans la construction que AD et BC ont été tracés dans le seul but de construire, à l'aide du point *c* et de la ligne E*c*F, le point F, qui partage AB en deux. On peut donc considérer la réciproque du problème : AF = FB *étant donnés, tracer à l'aide d'une seule règle une ligne parallèle à AB et passant par un point P donné*[224]. On trace BP jusqu'en un point quelconque E, ensuite dans l'ordre EF, EA, AP, B*e*Q et PQ. **p. 171**

La figure 65 illustre également *le problème du partage, à l'aide d'une seule règle, d'une ligne FH dans le rapport de deux lignes EF et HI données, une ligne PQ, parallèle à FH, étant donnée*[225]. On trace successivement PE, PF, QH, QI et *ca*G ; EF est à HI comme FG est à GH.

Or, si EF : FG = GH : HI *est donné, on peut construire à la seule règle une ligne parallèle à EI et passant par un point donné P.* On trace GR quelconque et ensuite PE, PF, H*a*Q, I*e*Q et finalement PQ.

Problème IV

Un cercle étant donné avec son centre, abaisser une perpendiculaire sur une ligne donnée à l'aide d'une seule règle[226].

On trace deux diamètres AC et BD du cercle ; A, B, D, E sont les quatre sommets d'un rectangle, dont on prolonge les côtés jusqu'à ce qu'ils coupent la ligne donnée en F, G, H, I. Sur la circonférence du cercle, on choisit un point quelconque K et on le joint par des droites à H et à I. Ces droites coupent le diamètre AC en *a* et en *b*. On joint G et *a*, F et *b* par des droites. Ces dernières se coupent en *c* et, K*c*, prolongé jusqu'en L, sera parallèle à IF. On trace finalement le diamètre K*d*, puis on trace L*d* jusqu'au point M ; LM sera perpendiculaire à FI. **p. 172**

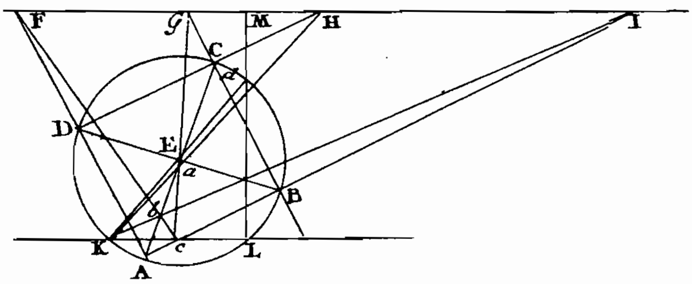

Fig. 67 - Tab. X ***(Notes et Add.)***

---

(222) Dans l'original, on lit AQBD.

(223) Le lecteur pourra constater qu'il s'agit de l'étude de la conservation des propriétés géométriques des figures par projection conique centrale, systématisée dans le *Traité des propriétés projectives des figures*... de J.-V. Poncelet, 1822 [144].

(224) Cf. J. Steiner (1796-1863), *Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittels der geraden Linie und Eines festen Kreises*, Berlin, 1833, chap. I, 1er probl.

(225) Cf. J. Steiner, *op. cit.*, chap. 3, 2e problème.

(226) Cf. J. Steiner, *ibid.* chap. 3, 3e problème.

La parallèle KL a été construite selon les mêmes principes que dans la figure 65. KL*d* est nécessairement un angle droit puisqu'il repose sur le diamètre K*d*. Par conséquent les angles en M doivent également être droits, car KL est parallèle à FM.

À l'aide du rectangle ABCD, on peut tracer des parallèles à ML par des points quelconques et, par conséquent, on peut aussi tracer avec la règle seulement (227) des perpendiculaires à FI passant par des points quelconques.

Problème V

AC, BD sont des lignes qui se coupent en un point en dehors de la table, tracer à l'aide d'une règle seulement et sans prolonger ces lignes, une ligne passant par un point E donné et coupant BD, AC au
p. 173 *même point d'intersection* (228).

On trace deux lignes AH et GB passant par E, puis on trace AB et GH jusqu'à ce qu'elles se coupent en K. On trace KC issue de K, puis HC et GD, EF sera la ligne cherchée.

ABHG, GHDC sont les images de rectangles, dont les côtés convergent vers deux points de l'horizon. E et F sont leurs centres respectifs et, par conséquent, EF est parallèle à BD et à AC, et fuit vers le même point de l'horizon.

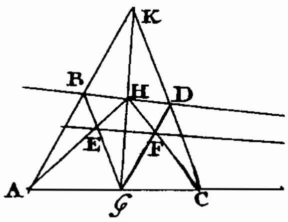

Fig. 68 - Tab. X ***(Notes et Add.)***

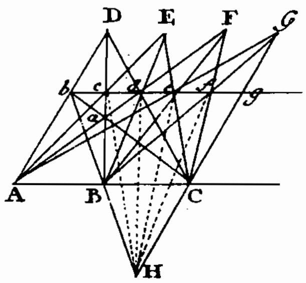

Fig. 69 - Tab. X ***(Notes et Add.)***

Le problème suivant est encore une addition à la note du § 33.

(227) Voir L. Cremona, *Geometria projettiva*, Turin 1873, p. 58.

(228) Suivre fig. 68. Il s'agit exactement du problème de la *Correspondance sur l'École Polytechnique, op. cit.* p. 266, note (218). Il est intéressant à double titre : ses origines se trouvent dans la préoccupation des peintres de tracer des parallèles en perspective sans sortir du tableau ; il s'inscrit dans les recherches relatives à la théorie des transversales, pôles et polaires, voir *supra* chap. IV. p. 183. En fait, le théorème de Desargues de 1648 sur les triangles perspectifs permet de résoudre ce problème. Cf. *supra* chap. III.1.12 à III.1.15, note 18). Ici ABE et CDF peuvent être considérés comme les deux triangles homologues dont les côtés homologues AB et CD, BE et DF, AE et HF se coupent respectivement en 3 points alignés R, G et H. Alors BD, EF et AC sont concourants au centre d'homologie.

Problème VI

Partager une ligne en deux parties égales, partager celles-ci à l'aide de la règle en un nombre quelconque de parties égales(229).

Soit AB = BC la ligne. On trace BD quelconque, puis DA et DC. Sur BD on choisit un point quelconque *a* et on trace A*ad*, C*ab* et *bd* qu'on prolonge si nécessaire. On trace successivement:

A*c*E, B*d*E et on obtiendra C*e*E
A*d*F, B*e*F et on obtiendra C*f*F
A*e*G, B*f*G et on obtiendra C*g*G

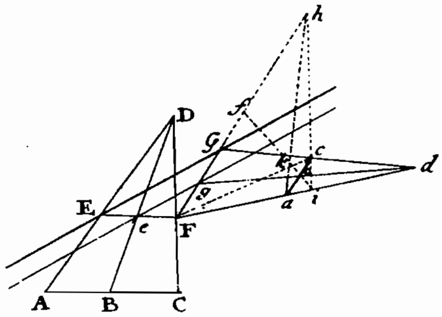

Fig. 70 - Tab. X *(Notes et Add.)*

On peut continuer de la sorte, prolonger éventuellement la ligne *gb* au-delà de *b*, et déterminer sur *bg* autant de points que AC doit avoir de parties. Si AC doit être divisé en 10 parties par exemple, BC en comptera 5 et elles seront déterminées par les lignes en pointillés, après avoir tracé *b*H passant par B, et *g*H passant par C. **p. 174**

Suivant la légende de la figure 66, *bg* est parallèle à AC et les points D, E, F, G, etc. sont sur une droite parallèle à AC et *bg*(230).

Problème VII

Deux lignes obliques sont données, chacune étant divisée en deux parties égales ; construire une parallèle à une ligne donnée(231).

Soient AB = BC et *ab* = *bc* les lignes données ; on demande de construire une parallèle à EG. On trace une ligne quelconque AD, qui coupe la ligne EG en E. On trace DB et DC issues de D ; la ligne joignant C à E coupera la ligne DB en un point appartenant également à la ligne qui joint A à F ; EF sera parallèle à AC, de sorte qu'on ait également E*e* = *e*F. On trace en outre F*a*(232), on la prolonge jusqu'en *d* et on y choisit un point *i*. On joint ce point aux points *b* et *c* par des lignes prolongées tant que nécessaire. On trace ensuite *c*F qui coupe la ligne *ib* en *k*. On trace en plus *ak* et on la prolonge jusqu'à ce qu'elle coupe en *h* la ligne *ic* elle-même prolongée ; F*h* sera parallèle à *ac*. F*h* coupe EG en G. On prolonge G*c* jusqu'à ce **p. 175**
qu'elle coupe F*a* en *d*. Finalement on prolonge *db* jusqu'en *g*, son point d'intersection avec FG, et F*g* = *g*G. Comme E*e* = *e*F, *eg* sera parallèle à EG et sera donc la ligne cherchée.

---

(229) Suivre fig. 69.

(230) La conception projective de Lambert apparaît très nettement dans la résolution de ce problème, car cette construction — encore en usage aujourd'hui — repose sur les propriétés harmoniques du quadrilatère. Voir *supra* chap. III.1.

(231) Lambert a pour objectif de construire la droite des milieux du triangle FEG, *eg*, parallèle à EG. Il utilise les propriétés de perspective pour construire séparément le milieu *e* de EF et le milieu *g* de GF; suivre fig. 70.

(232) Dans l'original, on lit *fa* par erreur.

On peut constater que tracer des lignes géométriques parallèles à l'aide d'une règle seulement est d'autant plus compliqué que les données sont plus éparses. La construction perspective ne pose aucun problème sauf que les lignes tracées sont souvent de grande dimension.

Problème VIII
À l'aide d'une règle seulement représenter le théorème de PYTHAGORE en perspective (233).

On suppose que la partie AB de l'horizon mesure 90 degrés et AC 45 degrés; CB mesurera donc également 45 degrés. Si l'on choisit un point *b* arbitraire, A*b*B ou *abc* sera l'image d'un angle droit. Soient *ab* et *bc* les côtés d'un triangle rectangle *abc*, on trace alors *a*C, *c*C, *a*A, A*fg*, B*ed* et *c*B; *adeb* et *cgf*b seront leurs carrés, *ae* et *cf* leurs diagonales et les angles A*a*C, C*a*B, A*c*C et C*e*B compteront 45 degrés. Les lignes *d*B et *g*A se coupent en *p*; par *p* on fait passer la ligne P*k* contenant *pb* et elle coupera l'hypoténuse *ac* sous angle droit. On trace en outre les droites P*ah* et P*ci*, on marque leurs points d'intersection *n*, resp. *m*, avec *d*B, resp. *c*A,
p. 176 et *anmc* sera l'image du carré de l'hypoténuse, *am* prolongée jusqu'en R et *cn* prolongée jusqu'en Q seront les diagonales et par conséquent QP et PR mesureront 45 degrés. Si l'on trace donc Q*ai*, R*ch* et *hi*, alors *acih* sera également l'image du carré de l'hypoténuse, située à l'extérieur du triangle.

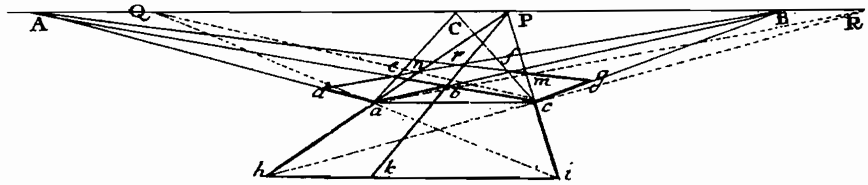

Fig. 71 - Tab. X ***(Notes et Add.)***

On pourrait se servir de cette construction pour trouver à la règle seulement, pour tout point R, les points P, resp. Q, distants de 45, resp. 90, degrés, AC et CB étant supposés mesurer 45 degrés. Cette façon de procéder n'est certes pas des plus courtes.

Problème IX
Un cercle et son centre étant donnés; partager un arc quelconque en deux parties égales (234).

Soit AB l'arc. On trace les deux diamètres AC et BD et on complète le rectangle ABCD. On prolonge le côté AD jusqu'en un point E quelconque. Puis on trace successivement E*a*B, *ab*A, E*bd* et *cd; cd* divise l'arc AB en deux parties égales. DC étant parallèle à AB, *d* partage AB en deux parties égales et le diamètre passant par le milieu d'une corde, passe aussi par le milieu de l'arc.

---

(233) Lambert utilise dans cette construction les propriétés de l'échelle d'angles ou transporteur décrites *supra* au chap. III.2.; suivre fig. 71.
(234) Voir Steiner, *op. cit.*, chap. 3, probl. 5, partie *a*; suivre fig. 72.

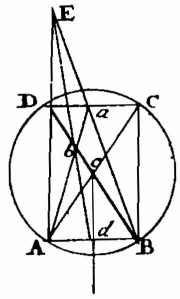

Fig. 72 - Tab. X ***(Notes et Add.)***

On peut généraliser ce problème. L'angle à partager en deux peut être quelconque, le rectangle ABCD obtenu en traçant deux diamètres quelconques pourra servir à tracer des parallèles aux côtés de l'angle donné passant par *c*. Ces parallèles découpent sur le cercle un arc p. 177
qu'on peut partager en deux selon la première méthode. On trace un diamètre passant par le point de partage de l'arc et on peut en dessiner une parallèle passant par le sommet de l'angle donné et partageant l'angle en deux parties égales. Le problème général s'énonce donc comme suit : *Un angle et un cercle avec son centre étant donnés dans un même plan, partager l'angle en deux parties égales en n'utilisant qu'une règle.*

Problème X

On a $ae = ec$, $be = \frac{1}{2} ed$ *ou* $ed = 2\,be$ *sur deux droites concourantes et on demande de décrire un parallélogramme à l'aide d'une règle seulement.*

On trace les lignes *da, dc, ab* et *cb,* on les prolonge jusqu'à ce qu'elles se coupent en *f* et en *h* (235). On trace ensuite *db* jusqu'à ce qu'elle coupe la ligne *fh* en *g* et on obtient $db = bg$. Or, comme on a $ae = ec$ ou $fg = gh$, on peut, en suivant les indications de la figure 70, tracer une parallèle à toute ligne donnée et par conséquent autant de parallélogrammes que l'on voudra.

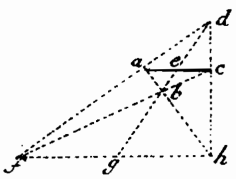

Fig. 73 - Tab. X

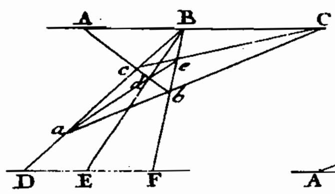

Fig. 74 - Tab X

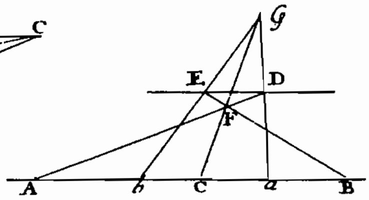

Fig. 75 - Tab. X ***(Notes et Add.)***

---

(235) Dans l'original, on lit *g* par erreur.

p. 178 Si l'on trace une parallèle à *ac* passant par *d* [(236)] et si l'on prolonge *bc*, on trouvera sans peine que $df = 3\,ad$ et que par conséquent $dg = 3\,ed$. Or $db = \frac{3}{2}\,de$ et $de\,\frac{1}{3}\,dg$, par conséquent $db = \left\{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\right\}\,dg = \frac{1}{2}dg$.

Problème XI

Trois lignes DB, EB et FB ayant un point commun en B, construire à la règle seulement une parallèle à DF passant par B, DE devant être égal à EF [(237)].

On trace arbitrairement une ligne *ab*, ensuite une ligne *bc* quelconque, mais issue de *b*. Par le point d'intersection *d* [(238)], on trace *ad* jusqu'en *e*, ensuite *ce* jusqu'à ce qu'elle rencontre *ab* prolongée en C; CB sera la ligne cherchée.

BC est l'horizon; DB, EB et FB sont perspectivement parallèles, *aceb* est l'image d'un parallélogramme; par conséquent EB [(239)] est situé entre DB et FB et partage toute ligne parallèle à l'horizon, comme DF, en deux parties égales.

Problème XII

Tracer à l'aide d'une règle seulement une parallèle à AB passant par un point donné D si Aa est à AC comme Bb à BC [(240)].

On trace la ligne *a*D et on la prolonge jusqu'en G, puis on trace CG, *b*G et AD. Par le point d'intersection F de AD et de CG, on trace BF jusqu'à ce qu'elle coupe la ligne *b*G [(241)] en E et ED sera la ligne cherchée.

p. 179 **Problème XIII**

Aa étant à AC comme Bb est à BC, tracer une parallèle par un point quelconque D à l'aide d'une règle seulement [(242)].

On trace comme ci-dessus *b*G, CG, *a*G, BDF et FA; ED sera la parallèle cherchée.

Problème XIV

L'angle aBE étant égal à l'angle EBF, élever en B une perpendiculaire à EB à l'aide d'une règle seulement [(243)].

---

(236) Lire fig. 73.

(237) Lire fig. 74. Les diagonales *ae* et *cb* du parallélogramme perspectif *abec* se coupant en leur milieu, la fuyante *d*B, parallèle aux côtés *ac et be* du parallélogramme, coupe le segment DF de la ligne de terre en son milieu.

(238) De *bc* et de BE.

(239) Dans l'original, on lit ED par erreur.

(240) Lire fig. 75. Voir démonstration chap. IV, pb. XII, p. 189. Ce problème est bien représentatif des questions qui seront traitées dans la géométrie de position.

(241) Dans l'original, on lit *a*G par erreur.

(242) Lire fig. 76.

(243) Lire dans la figure 76.

La construction est identique à celle de la figure 74. En effet on trace *ab* quelconque, ensuite *bc*, issue de *b*, quelconque, jusqu'à son point d'intersection avec *a*B. En outre on prolonge *ad* jusqu'en *e*, finalement on trace *ce* jusqu'à ce qu'elle coupe *ab* en C et CB sera perpendiculaire à BE.

Car, d'après le problème XI, toute ligne parallèle à BC sera partagée en deux parties égales par les lignes *a*B, EB et FB [(244)], éventuellement prolongées. Comme les angles *a*BE et EBF sont égaux, les parallèles à BC et BC elle-même doivent couper la ligne BE sous angle droit.

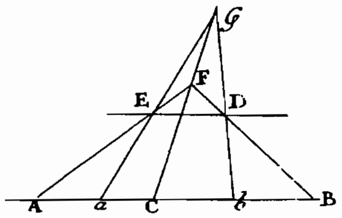

Fig. 76 - Tab. X ***(Notes et Add.)***

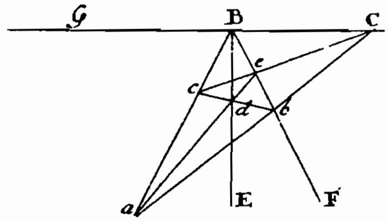

Fig. 77 - Tab. X ***(Notes et Add.)***

Problème XV

Élever encore une perpendiculaire en B à l'aide d'une règle seulement si les angles a*BG, FBC adjacents à une droite GC sont égaux ou ce qui revient au même, partager l'angle* a*BF en deux.*

On trace deux lignes arbitraires C*c*, C*a* issues d'un point quelconque, C par exemple, de **p. 180**
la ligne BC, jusqu'à ce qu'elles coupent *a*B et on marque leurs points d'intersection *e* et *b* avec FB. On trace ensuite les deux diagonales *cb* et *ae* et la perpendiculaire B*dE* cherchée passera par leur point d'intersection *d*.

Si par contre l'angle droit EBC et l'angle EBF sont donnés, on pourra encore tracer C*e* [(245)] et C*b* quelconques et les prolonger. Comme le point *d* est entièrement indéterminé, on peut, pour le trouver, procéder par tâtonnements. S'il n'est pas correctement choisi, les points *c* et *d* ne seront pas sur la même droite que *b* [(246)], mais *cd* passera à gauche ou à droite de *b* et on pourra l'interpréter comme une tangente à une courbe ; on tracera autant de tangentes qu'il y a de choix possibles pour le point *d* sur BE ; *a*B sera alors également tangente à cette courbe et pourra par conséquent être tracée avec toute la précision requise.

Les problèmes cités en exemples suffiront pour illustrer les constructions à la règle seulement. Il résulte de ces solutions que de très nombreux points peuvent être choisis arbitrairement et que de très nombreuses lignes peuvent être tracées arbitrairement [(247)]. C'est

---

(244) Dans l'original, on lit FC par erreur.
(245) Dans l'original, on lit Cℓ par erreur.
(246) Dans l'original, on lit B par erreur.
(247) Lambert souligne l'intérêt de cette nouvelle géométrie appelée aussi « de position » par Carnot et qui sera constituée plus tard en corps de doctrine par J.-V. Poncelet. Voir *supra* chap. IV.

p. 181 une conséquence nécessaire de la restriction à l'emploi de la seule règle ; si l'on admettait l'usage du compas avec celui de la règle, on pourrait inclure une condition supplémentaire dans l'énoncé des problèmes.

Dans les premiers problèmes, j'ai utilisé le compas uniquement pour les constructions géométriques des *Datis* ; l'usage de la règle seule a été réservé aux solutions apportées. Parmi ces *Datis*, la configuration la plus simple est justement celle de deux lignes partagées en deux parties égales. Cette dernière permet de tracer des parallèles uniquement à la règle ; réciproquement la donnée des droites parallèles permet de retrouver la configuration précédente. La question principale reste de savoir si l'on *peut partager les lignes en parties égales ou tracer une parallèle à celles-ci à l'aide de la règle seulement, sans construction annexe* ? Ce dernier problème serait résolu si l'on voulait admettre une règle infiniment longue. Une telle règle n'est cependant pas à notre disposition. Peut être faut-il lier les deux problèmes, c'est-à-dire déterminer par approximation la parallèle et le partage de la ligne en deux, de sorte qu'on puisse vérifier une construction à l'aide de l'autre. La figure 74 suggère une indication supplémentaire, car la ligne DF ne peut être partagée en deux par BE sans être simultanément parallèle à CB. L'une des deux propriétés n'a pas lieu sans l'autre et on peut donc se servir de l'une pour vérifier l'autre.