

LA FORMULE DE STIRLING

Denis LANIER
Didier TROTOUX
IREM de Basse-Normandie

I. Introduction.

La formule dite de Stirling, qui donne une évaluation de $n!$ pour les grandes valeurs de n , est au centre des travaux menés au début du 18^{ème} siècle sur les problèmes probabilistes de passage à la limite et d'approximations. Cet article peut se présenter comme un complément à l'atelier sur le théorème de de Moivre-Laplace que nous avons présenté à l'université d'été de Besançon [5]. La découverte des évaluations de $n!$ par de Moivre et Stirling a donné lieu à des travaux concomitants de ces deux mathématiciens avec des échanges de correspondance, des corrections mutuelles d'erreurs. Ces travaux, qui sont tous situés autour de 1730, nous semblent illustrer remarquablement le thème général du colloque. Ils se situent à un moment que l'on peut qualifier de paradoxal dans l'histoire des mathématiques. En effet les méthodes infinitésimales se développent alors de plus en plus ; elles permettent d'aborder et de résoudre des questions nouvelles. Mais la véracité des résultats obtenus ne peut plus être légitimée par une synthèse démonstrative à la grecque. Il faut donc innover, expérimenter, confronter les résultats obtenus par différentes méthodes ou différents auteurs, avant de pouvoir être sûr de la scientificité d'un énoncé. Nous savons de plus aujourd'hui que certains outils étaient employés sans la rigueur (au sens moderne du terme) nécessaire.

Ce sont donc les tours et détours des démarches analytiques du début du 18^{ème} siècle que nous voudrions montrer dans cette communication. Nous n'étudierons que des textes de Stirling et de Moivre, mais il faut savoir que ces questions font aussi l'objet de correspondances - toujours autour de ce moment crucial qu'est l'année 1730 - par exemple entre Daniel Bernoulli, Euler et Goldbach.

Les textes que nous allons présenter le seront en essayant de respecter l'ordre chronologique d'écriture et non de publication. Ils sont tirés de deux ouvrages. Le premier est le *Miscellanea Analytica de seriebus et quadraturis* (Miscellanées analytiques sur les suites et les quadratures) d'Abraham de Moivre publié, ainsi qu'un Supplément, en 1730 à Londres. Certains des textes qui y figurent datent sûrement des années 1720. On y trouve aussi une lettre de Stirling, dont nous ferons état, de 1729. Abraham de Moivre est né en 1667 à Vitry-le-François, d'une famille protestante. Exilé en Angleterre après la révocation de l'Edit de Nantes en 1685, il passe le reste de sa vie à Londres, en donnant des leçons particulières et en publiant divers travaux mathématiques. Elu en 1697 à la Royal Society, c'est un ami estimé de Newton. De Moivre meurt à Londres en 1754. La première édition de son ouvrage le plus célèbre *The Doctrine of Chances* date de 1718, elle est dédiée à Newton. La seconde est de 1738, la troisième de 1756 (deux ans après la mort de l'auteur). Ces deux dernières versions sont considérablement augmentées, entre autres à la suite du débat qui oppose de Moivre à Pierre de Montmort. De Moivre se place dans la lignée de Huygens et de Jacques Bernoulli,

mais en fait il suit des méthodes différentes. Son originalité consiste à investir dans le Calcul des Probabilités les idées du Calcul Infinitésimal, de Newton, Leibniz et des frères Bernoulli, qui obtient alors ses premiers succès. On pourra trouver des renseignements biographiques plus approfondis sur Abraham de Moivre dans le travail très documenté de Gilbert Maheut [6].

Le second ouvrage est le *Methodus differentialis sive Tractatus de Summatione et Interpolatione Serierum Infinitarum* (Méthode des différences ou Traité de la sommation et de l'interpolation des suites infinies) de James Stirling, publié aussi à Londres en 1730. James Stirling est né en 1692 à Garden en Ecosse. Il fait ses études à Oxford au Balliol College à partir de 1710. Il en est écarté, vers 1717, pour des raisons politiques. Stirling soutient en effet les partisans des Stuarts, les Jacobites. Il prend en 1719 une chaire de mathématiques à Venise, après avoir publié en 1717 son premier écrit sur la classification des courbes du troisième ordre, *Lineae Tertii Ordinis Newtonianae*, qui complète le travail de Newton sur la question [4]. Mais il est mal ou pas payé à Venise et après un détour en 1721 à l'université de Padoue, il retourne à Glasgow en 1722, puis s'installe à Londres en 1725. Membre de la Royal Society en 1726, il publie son principal ouvrage en 1730. Alors qu'il semble sur les rails d'une carrière de notable savant londonien, Stirling change d'orientation. Il retourne en 1735 en Ecosse pour y diriger une compagnie minière. Il publie d'ailleurs en 1745 un article sur la ventilation des galeries de mines. Il est élu membre de l'Académie Royale de Berlin en 1746, mais refuse la même année d'occuper la chaire de mathématiques laissée vacante à Edimbourg par la mort de MacLaurin. La fin de sa vie est un peu étrange puisqu'en 1753 il démissionne de la Royal Society pour des raisons financières. Ne pouvant plus payer la cotisation annuelle, il est malgré tout obligé de déboursier vingt livres pour démissionner. Il meurt à Edimbourg en 1770.

Aucun de ces deux ouvrages n'a été à notre connaissance traduit du latin en français, à quelques extraits près. Les traductions que nous présentons ci-dessous ont été réalisées avec l'aide de Marie-Anne Duron. Enfin, signalons que nous nous sommes beaucoup inspiré dans les commentaires de ces textes, ainsi que pour la reconstitution historique de l'article très documenté de J. Dutka [3]. On trouvera à la fin de l'article un formulaire qui résume les résultats et les techniques mathématiques utilisées écrits sous forme moderne. On trouvera aussi en annexe l'intégralité des textes cités.

II. Comment le problème s'est-il posé ?

La première avancée dans la direction de l'évaluation de $n!$ est due à Wallis. *L'Arithmetica Infinitorum* (1655) et le *Traité d'Algèbre* (1685) de John Wallis ont eu une influence considérable sur ses successeurs comme Newton, Stirling ou Euler. Wallis y publie des résultats importants obtenus par des méthodes remarquablement ingénieuses, mais peu rigoureuses d'un point de vue moderne. Il étudie ainsi l'intégrale $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ ou plus généralement $\int_0^1 (1-x^{1/p})^q dx$.

Il rencontre ainsi le produit infini : $\frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times \dots}{2 \times 4 \times 4 \times 4 \times 6 \times \dots}$, dont il montre, à l'aide d'encadrements,

l'égalité avec $\frac{4}{\pi}$.

La deuxième étape vient du calcul des probabilités sur la lancée des travaux de Jacques Bernoulli à propos de ce qu'on appelle la loi des grands nombres. On y trouve l'étude d'expressions algébriques comportant des factorielles ou des rapports de factorielles. La situation la plus simple est celle de l'évaluation du rapport du plus grand terme du développement du binôme $(1+1)^{2n}$ à la somme de tous les termes. Avec des notations

modernes, ce rapport s'écrit $\frac{C_{2n}^n}{2^n}$, ou encore $\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$. Ce rapport donne le mode de la loi

binomiale $B(2n, 1/2)$, il est donc très intéressant de démontrer d'une part que ce rapport tend vers zéro quand n tend vers l'infini - ce dont personne ne doute -, et d'autre part de savoir comment il tend vers zéro - de façon moderne : en trouver un équivalent simple. Cela permettra d'évaluer des probabilités pour des très grandes valeurs de n .

Cette première situation conduit alors à la généralisation à la loi binomiale $B(n, p)$ et aussi à l'évaluation de sommes de probabilités autour de la moyenne qui sont au coeur des démonstrations de la loi des grands nombres.

Ce contexte est celui des deux premiers textes, étudiés ci-dessous, d'Abraham de Moivre qui datent vraisemblablement de 1721 dans les *Miscellanea*.

La troisième étape est celle de Stirling qui, dans la tradition de Wallis et Newton, étudie la suite de terme général $u_n = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}$ du point de vue de la récurrence très simple qui lie deux

termes consécutifs : $u_{n+1} = u_n \times \frac{2n+1}{2n+2}$. Le problème que se pose Stirling est celui de l'interpolation d'une telle suite sous forme d'un développement en série, ce qui permettra non seulement de trouver un équivalent de u_n mais une approximation plus précise du point de vue calculatoire. Ces travaux de Stirling datent au moins de 1729 et figurent à la fois dans une lettre à de Moivre que ce dernier publie dans les *Miscellanea* en 1730 et dans le traité de Stirling lui-même. Ce sera le troisième texte étudié.

L'étape suivante consiste à ramener le problème précédent - sous ces deux aspects - à l'évaluation directe de $n!$ pour n très grand. En fait il s'agit d'exprimer $\log(n!)$ comme somme d'une série. C'est l'objet des deux derniers textes étudiés, l'un de Stirling dans son *Methodus Differentialis*, l'autre de de Moivre dans le Supplément aux *Miscellanea*.

Il ne faut pas espérer trouver dans ces textes d'expressions du type : $n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ qui est l'une des formes de ce qu'on appelle aujourd'hui la formule de Stirling. En effet il s'agira de développements en séries de $\log(n!)$ et, des deux formules que nous allons rencontrer, celle qu'on appelle de Stirling est en fait celle trouvée par de Moivre !

III. DE MOIVRE : MISCELLANEA LIVRE V.

En 1730, de Moivre publie les *Miscellanea Analytica de seriebus et quadraturis* (Miscellanées analytiques sur les suites et les quadratures). Dans cet ouvrage figurent les démonstrations de nombreux résultats employés sans justifications détaillées dans ses publications précédentes. L'intérêt de cet ouvrage est son contenu mathématique varié de haut niveau ainsi que les commentaires sur l'enjeu des problèmes abordés et les témoignages sur les rapports que de Moivre entretenait avec les autres mathématiciens. De Moivre y aborde la trigonométrie (le premier énoncé du livre est ce que nous appelons aujourd'hui formule de de Moivre), la géométrie avec l'étude des trajectoires des corps célestes, l'étude des séries récurrentes et la détermination de leur somme, il traite de dénombrements pour résoudre des problèmes rencontrés dans le domaine des probabilités.

L'extrait étudié se trouve dans le Livre V, entièrement consacré à l'étude du binôme élevé à une puissance infini. Les questions traitées dans le chapitre II ont pour origine un problème proposé en 1721 par Alexander Cuming. Deux joueurs ayant la même probabilité de gagner une partie jouent successivement n parties. Il s'agit d'évaluer la probabilité qu'un des joueurs obtienne $n/2$ succès, et d'étudier en particulier ce qui se passe quand n devient très grand.

De Moivre énonce le problème III suivant :

Trouver le Coefficient du Terme médian pour une très grande puissance paire, ou trouver le rapport qu'a le Coefficient du terme médian avec la somme de tous les Coefficients.

Dont il donne comme solution :

Soit n l'Exposant de la puissance à laquelle est élevée le Binôme $a+b$, alors, en posant a et b chacun = 1, le rapport du Terme médian à la Puissance $(a+b)^n$ soit 2^n , sera environ comme $\frac{2(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^n}$ à 1.

Mais la Question pouvait être déterminée plus exactement avec certaines Suites, qui furent négligées par manque de temps ; ayant ensuite repris le calcul, j'ai tenu compte des quantités les plus importantes d'abord négligées, ce qui m'a permis de

conclure que le rapport cherché est proche de $\frac{2^{\frac{21}{125}}(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^n}$, soit $\frac{2^{\frac{21}{125}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\sqrt{n-1}}$ à 1.

Ce qui peut s'écrire en termes modernes :

$$\frac{C_n^{n/2}}{2^n} \approx \frac{2^{\frac{21}{125}}(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^n}$$

Il énonce ensuite un problème généralisant le précédent :

Pour une très grande Puissance paire, trouver le rapport du Coefficient du Terme médian au Coefficient du Terme distant du médian, d'un Intervalle donné p .

et fournit la solution :

$$\frac{(m+p-1)^{m+p-\frac{1}{2}} \times (m-p+1)^{m-p+\frac{1}{2}} \times \frac{m+p}{m}}{m^{2m}}$$

où $n = 2m$, ce qui correspond à $\frac{C_{2m}^m}{C_{2m}^{m+p}} \approx \frac{(m+p-1)^{m+p-\frac{1}{2}} \times (m-p+1)^{m-p+\frac{1}{2}} \times \frac{m+p}{m}}{m^{2m}}$.

Pour pouvoir utiliser ces approximations, il fournit à la suite une table à 14 décimales des sommes des logarithmes des nombres entiers de dix en dix jusqu'à 900, en précisant que cela lui permet d'obtenir une approximation au moins au centième près des rapports du terme médian à n'importe quel terme du binôme. De Moivre avait besoin de ces approximations pour évaluer la somme des probabilités autour de la moyenne d'un jeu à pile ou face équiprobable répété n fois et étudier ce qui se passait quand n tendait vers l'infini. Il montre ensuite sur un exemple, $n = 900$, la validité de son approximation.

Il obtient $\log\left(\frac{C_{900}^{450}}{2^{900}}\right) = \bar{8},4246886444$ (soit $\bar{1},4246886444$ avec nos notations), ce qui donne

$$\frac{C_{900}^{450}}{2^{900}} \approx 0,026588. \text{ Avec la formule énoncée, on a } \log\left(\frac{2 \frac{21}{125} (n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^n}\right) = \bar{8},4246435020 \text{ qui}$$

est le logarithme décimal de 0,026585.

Sur cet exemple, l'approximation est très bonne mais on se demande quelles sont les séries qui ont permis à de Moivre d'obtenir ce coefficient $2 \frac{21}{125} = 2,168$. En effet, en utilisant

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}, \text{ nous avons } \frac{C_n^{n/2}}{2^n} \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \text{ et comme } \frac{(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^n} = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\sqrt{n-1}} \approx \frac{1}{e\sqrt{n}}, \text{ le}$$

coefficient correct est $\frac{2e}{\sqrt{2\pi}} \approx 2,16887\dots$

L'étude de l'extrait suivant va permettre de répondre à cette interrogation.

IV. DE MOIVRE : *MISCELLANEA* LIVRE VI.

Le livre VI est consacré à l'étude des séries dont la somme peut être déterminée à l'aide d'une intégration, en utilisant les idées du Calcul Infinitésimal de Newton et Leibniz.

Dans le passage étudié, de Moivre va justifier les résultats énoncés précédemment.

Il s'agit d'évaluer, pour des grandes valeurs de n , le coefficient médian du binôme. Partant de

$$C_n^l = \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5} \dots \times \frac{n-l+1}{l}$$

ou, ce qui revient au même, en changeant l'ordre des termes

$$\frac{n-l+1}{l} \times \frac{n-l+2}{l-1} \times \frac{n-l+3}{l-2} \times \dots \times \frac{n}{1}.$$

On obtient le terme médian dans le cas où n est pair (n = 2m) en remplaçant l par m,

$$C_{2m}^m = \frac{m+1}{m} \times \frac{m+2}{m-1} \times \frac{m+3}{m-2} \times \dots \times \frac{2m}{1}.$$

ce qui peut s'écrire en décalant les dénominateurs

$$C_{2m}^m = \frac{m+1}{m-1} \times \frac{m+2}{m-2} \times \frac{m+3}{m-3} \times \dots \times \frac{2m}{m} = \prod_{k=1}^{m-1} \frac{m+k}{m-k} \times 2$$

D'où il déduit

$$\log(C_{2m}^m) = \sum_{k=1}^{m-1} \log\left(\frac{m+k}{m-k}\right) + \log(2) = \sum_{k=1}^{m-1} \log\left(\frac{1+\frac{k}{m}}{1-\frac{k}{m}}\right) + \log(2)$$

En utilisant le développement en série

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \log(1+x) - \log(1-x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i (x^{i+1} - (-x)^{i+1})}{i+1} = 2 \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$$

de Moivre obtient finalement :

$$\log(C_{2m}^m) = \sum_{k=1}^{m-1} 2 \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2j+1} \times \frac{k^{2j+1}}{m^{2j+1}} + \log(2).$$

Ayant écrit ces (m-1) séries infinies les unes sous les autres, il les somme en colonnes (ce qui revient à intervertir l'ordre des sommations) pour obtenir

$$\log(2) + \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{(2j+1)m^{2j+1}} \sum_{k=1}^{m-1} k^{2j+1} \right)$$

Et reconnaissant les sommes des puissances $(2j+1)^{\text{ièmes}}$ des (m-1) premiers entiers naturels, il utilise les sommes de J. Bernoulli

$$\sum_{k=1}^{m-1} k^{2j+1} = \frac{(m-1)^{2j+2}}{2j+2} + \frac{1}{2} (m-1)^{2j+1} + \frac{1}{2j+2} \sum_{i=2}^{2j+1} C_{2j+2}^i b_i (m-1)^{2j+2-i}$$

où les nombres b_i (que de Moivre nommera *nombres de Bernoulli*) sont déterminés par la

relation de récurrence $b_0 = 1$ et l'égalité $\sum_{i=0}^n C_{n+1}^i b_i = 0$ pour $n \geq 1$.

En substituant ces quantités dans l'expression précédente et en notant $s = m - 1$, il obtient

$$\log(C_{2m}^m) = \log(2) + \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{(2j+1)m^{2j+1}} \left[\frac{s^{2j+2}}{2j+2} + \frac{1}{2} s^{2j+1} + \frac{1}{2j+2} \sum_{i=2}^{2j+1} C_{2j+2}^i b_i s^{2j+2-i} \right] \right)$$

qui est la somme de la constante $\log(2)$ et de séries en s dont de Moivre va rechercher la somme à partir de leur développement. De nouveau, cela revient à intervertir les sommations, en sommant d'abord sur i, puis sur j.

La première série qui intervient dans le membre de droite est

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{2s^{2j+2}}{(2j+1)(2j+2)m^{2j+1}} = 2s \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)(2j+2)} x^{2j+1} \text{ en posant } \frac{s}{m} = x.$$

Pour obtenir la somme de cette série, il intègre le développement en série de $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ et en déduit l'égalité

$$x \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \log\left(\frac{1}{1-x^2}\right) = 2 \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+2}}{(2j+1)(2j+2)}$$

La première série a donc pour somme

$$m \left(x \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \log\left(\frac{1}{1-x^2}\right) \right) = (2m-1) \log(2m-1) - 2m \log(m)$$

La deuxième série qui intervient est $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{s^{2j+1}}{(2j+1)m^{2j+1}} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)}$ série déjà

rencontrée dont la somme est $\frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2} \log(2m-1)$

De Moivre en déduit que l'on a

$$\log\left(\mathbf{C}_{2m}^m\right) = \log(2) + (2m - \frac{1}{2}) \log(2m-1) - 2m \log(m) + \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{(2j+1)(2j+2)m^{2j+1}} \sum_{i=2}^{2j+1} \mathbf{C}_{2j+2}^i b_i s^{2j+2-i} \right)$$

puis, il retranche à chaque membre $2m \log(2)$ et obtient

$$\log\left(\frac{\mathbf{C}_{2m}^m}{2^{2m}}\right) = \log\left(\frac{2(2m-1)^{2m-\frac{1}{2}}}{(2m)^{2m}}\right) + \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{(2j+2)(2j+1)m^{2j+1}} \sum_{i=2}^{2j+1} \mathbf{C}_{2j+2}^i b_i s^{2j+2-i} \right)$$

On voit que si l'on remplace $2m$ par n , la première approximation donnée dans le problème III

$$\frac{\mathbf{C}_n^{n/2}}{2^n} \approx \frac{2(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^n}$$

a été obtenue en ne tenant compte que des deux premières séries.

Ensuite, de Moivre s'occupe des séries suivantes.

La troisième série ($i=2$) est $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{2 \mathbf{C}_{2j+2}^2 b_2 s^{2j}}{(2j+1)(2j+2)m^{2j+1}} = \frac{b_2}{m} \sum_{j=1}^{+\infty} x^{2j}$

Elle a pour somme $\frac{b_2}{m} \times \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{6m} \times \frac{(m-1)^2}{2m-1}$.

La quatrième série (i=4) est

$$\sum_{j=2}^{+\infty} \frac{2 C_{2j+2}^4 b_4 s^{2j-2}}{(2j+1)(2j+2)m^{2j+1}} = \frac{b_4}{12m^3} \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{2j(2j-1)s^{2j-2}}{m^{2j-2}}$$

comme $b_4 = -1/30$, cette série vaut

$$-\frac{1}{360m^3} \sum_{j=2}^{+\infty} 2j(2j-1)x^{2j-2} \text{ ou bien } -\frac{x^2}{360m^3} \sum_{j=0}^{+\infty} (2j+4)(2j+3)x^{2j}$$

de Moivre qui est très familier de ce type de séries, reconnaît à l'allure des premiers termes de

la série $\sum_{j=0}^{+\infty} (2j+4)(2j+3)x^{2j}$ une série *d'échelle de relation* $3 - 3 + 1$.

Cela signifie que c'est une série récurrente de la forme $\sum a_n x^n$ avec des coefficients a_n vérifiant la relation $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$ et il a prouvé dans le chapitre I du livre IV

que la somme d'une telle série vaut
$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 - 3(a_0 x + a_1 x^2) + 3(a_0 x^2)}{1 - 3x + 3x^2 - x^3}$$
.

En effet les coefficients vérifient la relation de récurrence précédente

$$3(2j+8)(2j+7) - 3(2j+6)(2j+5) + (2j+4)(2j+3) = 4j^2 + 38j + 90 = (2j+10)(2j+9)$$

Donc cette série a pour somme

$$\frac{12 + 30x^2 + 56x^4 - 3(12x^2 + 30x^4) + 3(12x^4)}{1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6} = \frac{12 - 6x^2 + 2x^4}{(1 - x^2)^3}$$

Ce qui compte tenu de $\frac{s}{m} = x$ et $s = m-1$ donne
$$\frac{m^2(8m^4 + 4m^3 + 6m^2 - 8m + 2)}{(2m-1)^3}$$

et la quatrième série a pour somme le résultat énoncé, soit

$$-\frac{(m-1)^2(4m^4 + 2m^3 + 3m^2 - 4m + 1)}{180m^3(2m-1)^3}$$

Comme on le voit, les calculs deviennent assez rapidement compliqués. De Moivre décide d'une part de remplacer chacune de ces séries par sa limite quand m tend vers l'infini et d'autre part de ne conserver que les quatre premiers termes de la série numérique alternée obtenue en poussant les calculs jusqu'à la sixième série !

Il obtient

$$\log\left(\frac{C_n^{n/2}}{2^n}\right) \approx \log\left(\frac{2(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^n}\right) + \frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680}$$

En utilisant les tables de logarithmes, il peut écrire

$$\log\left(\frac{C_n^{n/2}}{2^n}\right) \approx \log\left(\frac{2,1682(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^n}\right)$$

Il décide alors de prendre comme constante 2,168 soit $2 + \frac{21}{125}$ valeur qui lui suffit amplement pour les approximations dont il a besoin. C'est la deuxième approximation donnée comme réponse au problème III du paragraphe précédent.

La série dont de Moivre prend les quatre premiers termes est la série $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b_{2i}}{2i(2i-1)}$.

Il pensait que cette série alternée était convergente et qu'il pouvait n'en garder que quelques termes. Hélas c'est une série divergente, ce dont il se serait rendu compte s'il avait poussé les calculs davantage mais il a eu la bonne idée de s'arrêter au quatrième terme ce qui lui permet d'obtenir une excellente approximation. Il s'était sans doute rendu compte qu'au-delà, la convergence était moins "bonne". C'est Stirling qui lui signalera son erreur.

V. STIRLING : LETTRE À DE MOIVRE.

Le *Methodus Differentialis* de Stirling se situe directement dans la lignée de l'école anglaise de Wallis et Newton, poursuivie par Taylor ou Gregory. Il s'agit de travaux consacrés à la sommation des suites et aux problèmes d'accélération de convergence et d'approximations numériques. Stirling est lui aussi un très bon calculateur et il contrôle souvent ses résultats à l'aide d'exemples numériques menés avec un très grand nombre de décimales. Il s'intéresse aussi à l'interpolation des suites. Il évalue ainsi $(1/2)!$ conçu comme le terme qui doit se situer entre les deux premiers 1 de la suite des $n!$, en suivant la même relation de récurrence. En fait il travaille sur la suite $\log(n!)$ qui croît moins vite et évalue, avec dix décimales, $\log(10,5!)$ comme 7,075525... La méthode consiste à calculer les différences finies jusqu'à l'ordre dix de la suite $\log(5!), \log(6!), \dots, \log(16!)$. Cela revient à remplacer $n!$ par un polynôme de degré dix. Ceci étant réalisé, il remonte, à l'aide de la récurrence, jusqu'à $0,5!$ qui est évalué comme 0,8862269..., dont il affirme sans démonstration qu'il s'agit de $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Stirling revient, à la proposition XXIV, sur cette évaluation de $0,5!$ En généralisant une formule obtenue pour des exposants entiers, il trouve que :

$$\frac{\int_0^1 (x-x^2)^{-1/2} dx}{\int_0^1 (1-x^2)^{-1/2} dx} = \frac{1}{2(\frac{1}{2}!)^2}.$$
 Or

ces intégrales se calculent facilement et on trouve que le rapport est $\frac{\pi}{2}$. On en déduit

immédiatement que $\frac{1}{2}! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

C'est dans cet esprit que Stirling aborde l'étude des suites $\frac{C_n^{n/2}}{2^n}$ et $\frac{2^n}{C_n^{n/2}}$. Cette étude

se trouve dans une lettre envoyée à de Moivre en 1729, publiée en 1730 dans les *Miscellanea*, et dont nous donnons de larges extraits ci-dessous, et aussi, presque sous la même forme, à la proposition XXIII du *Methodus Differentialis*.

La lettre commence par une explication de Stirling sur les raisons qui l'ont poussé à ce travail.

Il y a environ quatre ans, j'avais laissé entendre au très illustre D' Alex. Cuming que certains Problèmes d'Interpolation et de Sommation de Suites ou problèmes du même genre, que l'analyse ne solutionnait pas communément, pouvaient être résolus par la Méthode Différentielle de Newton ; cet homme très éminent répondit qu'il mettait en doute que Tu puisses résoudre avant un certain nombre d'années, le Problème de la détermination du Terme médian d'un Binôme élevé à une puissance quelconque, à l'aide des Différences. Poussé ensuite par la curiosité, et assuré d'obliger un homme reconnu légitimement par ses travaux de recherche, j'abordai moi-même avec intérêt cette question : et j'avoue que des difficultés surgirent qui m'empêchèrent de pouvoir atteindre aussitôt la conclusion souhaitée, mais ceci ne contraria pas vraiment ce travail, puisque en fin de compte j'arrivai à cette solution que je t'adresse afin que tu veuilles bien l'approuver en la confrontant à tes propres écrits.

Stirling énonce ensuite son résultat.

Appelons n l'exposant du binôme si celui-ci est pair et $(n - 1)$ s'il est impair ; le Terme médian sera à la Somme de tous les Termes de même puissance comme l'Unité est à la moyenne proportionnelle entre la demi-circonférence du Cercle et la suite suivante

$$n + \frac{A}{2(n+2)} + \frac{9B}{4(n+4)} + \frac{25C}{6(n+6)} + \frac{49D}{8(n+8)} + \frac{81E}{10(n+10)} + \dots$$

Quelques remarques de forme : quand Stirling parle d'un Cercle, il faut sous-entendre un cercle dont le diamètre est l'unité. La *demi-circonférence du Cercle* est donc pour nous $\frac{\pi}{2}$. D'autre part, pour les sommes de séries, Stirling utilise une notation initiée par Newton qui consiste à écrire toujours la somme sous la forme $A + B + C + D + \dots$. L'écriture de la somme à la quatrième ligne signifie donc que

$$A = n, B = \frac{A}{2(n+2)} = \frac{n}{2(n+2)}, C = \frac{9B}{4(n+4)} = \frac{9n}{8(n+2)(n+4)} \dots$$

En termes modernes, l'énoncé de Stirling peut donc s'écrire : $\frac{C_n^{n/2}}{2^n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \times S}$ où S est la

somme de la suite v dont le premier terme $v_0 = n$ et qui satisfait la relation de récurrence :

$$v_{p+1} = v_p \times \frac{(2p+1)^2}{2p(n+2p)}$$

Stirling donne ensuite un exemple d'application numérique de ce résultat.

À titre d'exemple, si l'on cherche le rapport du terme médian à la somme de tous les termes d'un binôme élevé à la puissance 100 ou 99, on posera $n = 100$, qui multiplié par la demi-circonférence du Cercle, donne le premier Terme $A = 157,079632679$; ensuite soit $B = \frac{A}{204}$, $C = \frac{9B}{416}$ $D = \frac{25C}{636}$ etc..., et en effectuant le calcul comme dans la marge, on trouve une somme de termes égale à 157,866984459, dont la racine carrée 12,5645129018 est à l'unité comme la somme de tous les termes est au terme médian d'un binôme élevé à la puissance 100 ou 99.

157,079632679	157,079632679
769998199	769998199
16658615	16658615
654820	654820
37137	37137
2734	2734
246	246
26	26
3	3
157,866984459	157,866984459

Il y trouve en prenant les dix premiers termes de la somme S, une approximation avec neuf décimales de $\frac{2^{100}}{C_{100}^{50}}$ ou de $\frac{2^{99}}{C_{99}^{50}}$.

Vient ensuite un deuxième énoncé qui consiste à évaluer d'une manière analogue $\frac{2^n}{C_n^{n/2}}$, puis une application numérique au cas $n = 100$.

Stirling indique ensuite que, dans la pratique, on n'a pas besoin d'une approximation aussi précise.

D'ailleurs, en pratique, il n'est pas nécessaire d'avoir recours aux Suites : en fait, il suffit de prendre la moyenne proportionnelle entre la demi-circonférence du Cercle et $n + \frac{1}{2}$; celle-ci constituera souvent une meilleure approximation que les deux premiers Termes de la Suite, dont le seul premier suffit la plupart du temps.

Cela revient à prendre $\frac{2^n}{C_n^{n/2}} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2} \left(n + \frac{1}{2}\right)}$.

Stirling donne ensuite une autre formule reprenant la précédente avec un facteur correctif, puis énonce enfin une dernière approximation.

Mais voici une approximation facile à calculer et aussi plus précise ; on divise la différence des logarithmes des nombres $n + 2$ et $n - 2$ par 16, auquel on ajoute la moitié du logarithme de l'Exposant n ; ensuite on ajoute à cette somme le logarithme constant 0,0980599385151 qui est la moitié du logarithme de la demi-circonférence d'un Cercle, et cette nouvelle somme est le logarithme du nombre qui est à l'unité comme la somme de tous les Termes au terme Médian. Si $n = 900$, le calcul sera le suivant :

$\frac{1}{2} \log 900$	1,4771212547
Diff. log 902 & 898 / 16	0,0001206376
Log constant	0,0980599385
Somme	<hr/> 1,5753018308

Cette fois, Stirling approche $\log\left(\frac{2^n}{C_n}\right)$ par :

$$\frac{1}{16} \left(\log(n+2) - \log(n-2) + \frac{1}{2} \log(n) + \frac{1}{2} \log\left(\frac{\pi}{2}\right) \right).$$

Cette formule est testée dans le cas $n = 900$, avec une précision de $2 \cdot 10^{-10}$ par excès.

Enfin, Stirling conclut sa lettre en donnant une simple référence à titre de démonstration.

Ces Solutions ont été obtenues à l'aide de la Méthode Différentielle de Newton ; je ne joins pas leurs démonstrations, car j'ai l'intention de rendre public dans peu de temps un Ouvrage que j'ai rédigé sur l'Interpolation et la Sommation des Suites.

Dans son *Methodus Differentialis*, Stirling donne en fait deux démonstrations, qui retracent sans doute deux étapes de sa réflexion. Nous essaierons d'en donner les principaux éléments.

La première démonstration consiste d'abord à ramener le problème de la recherche d'un terme d'une suite éloigné du premier à une interpolation d'une autre suite. Dans une proposition précédente (prop. XVIII) il a montré que, si la suite u vérifie une récurrence du type : $u_{n+1} = u_n \times \frac{r+n}{p+n}$ et si la suite v vérifie $v_{n+1} = v_n \times \frac{r+n}{q+n}$, alors : $u_{q-r} = v_{p-r}$. En prenant $r = 1$ et $p = \frac{1}{2}$, on a pour u la suite $\frac{2^n}{C_n}$. En prenant donc une suite v telle que

$$v_{n+1} = v_n \times \frac{1+n}{q+n} \text{ et en utilisant la relation ci-dessus, on a : } u_{q-1} = v_{-1/2}.$$

Le problème de l'évaluation du terme général de la suite u s'est donc transformé en celui de l'interpolation des termes de la suite v .

Stirling écrit ensuite : $v_n = \frac{p_n}{q_n}$, d'où on a : $p_n = n!$.

Or $p_{-1/2}$ peut être calculé comme plus haut à partir de $0,5!$, à savoir $p_{-1/2} = \left(-\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi}$.

Il ne reste plus qu'à évaluer q_n par une somme à l'aide des différences finies, ce qui donne le résultat énoncé.

La deuxième démonstration, plus tardive sans doute, consiste à supposer le problème résolu - ce qui suppose de connaître au moins la forme de l'énoncé - et à chercher les

coefficients indéterminés de la somme. Cela revient à écrire $\left(\frac{2^n}{C_n^{n/2}}\right)^2$ comme la somme d'une

suite de terme général du type $\frac{a_p n}{(n+2)\dots(n+2p)}$ et à chercher les a_p pour qu'on ait la bonne récurrence. On obtient alors $a_{p+1} = a_p \times \frac{(2p+1)^2}{2p}$, ce qui donne le résultat cherché à la constante a_0 près.

La détermination de cette constante est d'ailleurs, de l'avis même de de Moivre, la contribution principale de Stirling. Stirling procède ainsi : à l'infini, $\left(\frac{2^n}{C_n^{n/2}}\right)^2 \approx a_0 \cdot n$, donc

$$a_0 = 2 \times \left(\frac{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times \dots}{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times \dots}\right).$$

Avec l'aide du résultat énoncé par Wallis, on trouve facilement que $a_0 = \frac{\pi}{2}$, ce qui conclut la démonstration.

VI. STIRLING METHODUS DIFFERENTIALIS PROPOSITION XXVIII.

C'est à la fin de son traité que Stirling aborde le problème de l'évaluation de $\log(n!)$. Il s'agit de la proposition XXVIII dont voici l'énoncé et la démonstration.

PROPOSITION XXVIII.

Trouver une somme quelconque de Logarithmes, dont les nombres sont en progression Arithmétique.

Que les nombres $x+n, x+3n, x+5n, x+7n, \dots z-n$ désignent des nombres quelconques en progression Arithmétique, dont le premier est $x+n$, le dernier $z-n$, et leur différence commune $2n$. En outre, on note l,z et l,x les Logarithmes Tabulaires des nombres z et x ; et $a = 0,434294481903252$, à savoir le Logarithme réciproque du naturel Dix. Alors la somme des Logarithmes proposés sera égale à la différence entre les deux Suites suivantes

$$\begin{aligned} \frac{zl,z}{2n} - \frac{az}{2n} - \frac{an}{12z} + \frac{7an^3}{360z^3} - \frac{31an^5}{1260z^5} + \frac{127an^7}{1680z^7} - \frac{511an^9}{1188z^9} + \dots \\ \frac{xl,x}{2n} - \frac{ax}{2n} - \frac{an}{12x} + \frac{7an^3}{360x^3} - \frac{31an^5}{1260x^5} + \frac{127an^7}{1680x^7} - \frac{511an^9}{1188x^9} + \dots \end{aligned}$$

Ces suites se continuant à l'infini ; on pose

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{3.4} &= A \\
-\frac{1}{5.8} &= A + 3B \\
-\frac{1}{7.12} &= A + 10B + 5C \\
-\frac{1}{9.16} &= A + 21B + 35C + 7D \\
-\frac{1}{11.20} &= A + 36B + 126C + 84D + 9[E] \\
&\dots
\end{aligned}$$

où les nombres qui multiplient $A, B, C, D \dots$ dans les différentes valeurs sont les Coefficients alternés des binômes impairs convenables. De ces préliminaires il vient que le Coefficient du troisième Terme sera $-\frac{1}{12} = A$, celui du quatrième $+\frac{7}{360} = B$, du cinquième $-\frac{31}{1260} = C$, et ainsi de suite.

DÉMONSTRATION

On diminue la variable z de $2n$; ou ce qui revient au même, on remplace z par $z-2n$ dans la Suite $\frac{z}{2n} - \frac{az}{2n} - \frac{an}{12z} + \frac{7an^3}{360z^3} - \frac{31an^5}{1260z^5} + \frac{127an^7}{1680z^7} - \frac{511an^9}{1188z^9} + \dots$ et il viendra la valeur suivante

$$\frac{(z-2n)l, (z-2n)}{2n} - \frac{a}{2n} \times (z-2n) - \frac{an}{12(z-2n)} + \frac{7an^3}{360(z-2n)^3} - \frac{31an^5}{1260(z-2n)^5} + \dots$$

Qui retranchée de la première valeur, les Termes étant d'abord réduits à la même forme par Division, et il restera $l, z - \frac{an}{z} - \frac{an^2}{2z^2} - \frac{an^3}{3z^3} - \frac{an^4}{4z^4} - \dots$ c'est-à-dire le Logarithme du nombre $z-n$. D'où, dans tous les cas, la différence de deux valeurs successives de la Suite est égale au Logarithme de $z-n$; qui exprime la forme générale des Logarithmes à sommer. Donc la Suite sera la somme des Logarithmes proposés, si on lui retranche l'autre Suite. En fait ces sommes sont quelquefois rectifiées comme des Aires, pour devenir vraies.

Cela revient à dire que : $\log(x+n) + \dots + \log(z-n) = F(z) - F(x)$.

F est définie par : $F(z) = \frac{z \log z}{2n} - \frac{az}{2n} + aS$, où S est la somme des termes de la suite de terme

général $\frac{a_k n^{2k+1}}{z^{2k+1}}$, les a_k vérifiant $\sum_{k=0}^{p-1} C_{2p-1}^{2k} a_k = -\frac{1}{2(2p)(2p+1)}$.

La démonstration fournie par Stirling est remarquablement concise. Avec les notations précédentes, cela revient à calculer $F(z-2n)$, puis $F(z-2n) - F(z)$, où l'on trouve (?) $\log(z-n)$. Il n'y a plus qu'à sommer ce résultat pour avoir la formule finale.

Une démonstration plus explicite peut être décrite ainsi en suivant J. DUTKA [3], en utilisant des logarithmes népériens pour éviter la constante a .

On pose que la somme des logarithmes du type $\ln(x+(2k+1)n)$ est du type $F(z) - F(x)$. Cela revient à écrire : $\ln(t) = F(t+n) - F(t-n)$, puis à sommer pour t allant de $x+n$ à $z-n$ par pas de $2n$. A partir de la primitive usuelle de \ln on peut écrire : $F(t) = \frac{1}{2n}(t \ln t - t) + G(t)$.

En reportant dans l'équation précédente et en posant $x = \frac{n}{t}$, on a :

$$G(t+n) - G(t-n) = 1 - \frac{1}{2}(\ln(1+x) + \ln(1-x)) - \frac{1}{2x}(\ln(1+x) - \ln(1-x)).$$

En développant en séries entières $\ln(1+x)$ et $\ln(1-x)$, il vient :

$$G(t+n) - G(t-n) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^{2p}}{2p(2p+1)}.$$

On pose ensuite : $G(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_p}{x^{2p+1}}$ et l'on cherche les coefficients a_p pour obtenir la formule précédente.

Il vient : $G(t+n) - G(t-n) = -2 \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{p-1} a_k C_{2p-1}^{2k} \right) x^{2p}$ et par identification, on a :

$$\sum_{k=0}^{p-1} C_{2p-1}^{2k} a_k = -\frac{1}{2(2p)(2p+1)}.$$

Stirling donne ensuite un premier exemple numérique qui permet d'évaluer la somme des logarithmes des dix nombres 101, 103, 105, ..., 119.

Vient ensuite l'exemple II, où se trouve la formule de Stirling.

On cherche maintenant la Somme des Logarithmes des nombres 11, 12, 13, ... 1000, dont le premier est 11, et le dernier 1000, et la différence commune l'unité. Alors, on a $n = \frac{1}{2}$, $x + \frac{1}{2} = 11$, $z - \frac{1}{2} = 1000$; d'où $x = \frac{21}{2}$, $z = \frac{2001}{2}$; qui étant écrits, ainsi que les Logarithmes des mêmes $\frac{21}{2}$ et $\frac{2001}{2}$ à la place de l, x et l, z ; donnent pour valeurs des Suites 2567,2055542879 et 6,160673097, dont la différence donne 2561,0448811892 pour la Somme des Logarithmes demandée.

D'ailleurs si on veut une somme quelconque de Logarithmes des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, ... en posant que $z-n$ est le dernier nombre, d'où $n = \frac{1}{2}$; et trois ou quatre Termes de cette Suite $z l, z - a z - \frac{a}{24z} + \frac{7a}{2880z^3} - \dots$, additionnés avec le [demi-]logarithme de la circonférence du Cercle dont le Rayon est l'Unité, c'est-à-dire 0,399089934179, donneront la somme demandée, ce qui donne moins de travail quand il faut sommer de nombreux logarithmes. Ainsi si on pose $z - \frac{1}{2} = 1000$, ou $z = \frac{2001}{2}$ la valeur de la Suite sera 2567,2055542879 comme avant ; qui ajouté au Logarithme constant donne 2567,6046442221 comme somme des Logarithmes des mille premiers nombres de la Suite 1, 2, 3, 4, 5,...

En termes modernes, pour obtenir $\ln(m!)$, on prend dans la formule :

$$n = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}, z = m + \frac{1}{2}.$$

D'où $\ln(m!) = F(m+1/2) - F(1/2)$.

Stirling affirme sans démonstration que : $F(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi)$.

Ce résultat peut être obtenu sans grande difficulté, comme on le verra faire par de Moivre, à partir du résultat de la proposition XXIII sur l'équivalent de $\frac{2^n}{C_n^{n/2}}$.

On peut alors écrire la formule de Stirling :

$$\ln(m!) = (m + \frac{1}{2}) \ln(m + \frac{1}{2}) - (m + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{(2m+1)^{2k+1}}$$

où les coefficients a_k vérifient : $\sum_{k=0}^{p-1} C_{2p-1}^{2k} a_k = -\frac{1}{2(2p)(2p+1)}$.

Soit :

$$\ln(m!) = (m + \frac{1}{2}) \ln(m + \frac{1}{2}) - (m + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{12} \frac{1}{2m+1} + \frac{7}{360} \frac{1}{(2m+1)^3} - \frac{31}{1260} \frac{1}{(2m+1)^5} \dots$$

VII. DE MOIVRE MISCELLANEA ANALYTICA SUPPLEMENTUM.

Peu de temps après la publication des *Miscellanea Analytica*, de Moivre reçut une lettre de Stirling qui lui indiquait que des erreurs figuraient dans ses tables de sommes de logarithmes et lui communiquait des formules permettant de les obtenir à l'aide de séries convergent rapidement. Il décida alors d'écrire un Supplément d'une vingtaine de pages, où il rappelait l'historique de ses recherches sur l'équivalent du terme médian du binôme et où il reprenait sous une forme légèrement différente son travail pour enfin aboutir à une série donnant une approximation de $\log(n!)$, série différente de celle que Stirling lui avait communiquée. C'est ce qu'il indique en introduction du Supplément

Quelques jours après la parution de mon ouvrage, Miscellanea Analytica, le très savant Stirling, par une lettre, me fit remarquer que la Table de sommes de Logarithmes qui y figurait, ne possédait pas un degré de précision suffisant pour appuyer une recherche, vu que cette Table comportait une erreur à la cinquième décimale de chacune de ses sommes : avec bienveillance, il indiquait dans sa lettre une suite convergent plus rapidement dont l'utilisation permet d'obtenir facilement la somme des logarithmes d'un nombre quelconque d'entiers naturels ; la chose avait été exposée ainsi.

.../...

À l'instant où je jetai les yeux sur cette suite qui comporte les nombres 12, 360, 1260, 1680, nombres que j'ai beaucoup utilisés, je ne doutai pas soit de démontrer ce résultat, soit de pouvoir me lancer dans une nouvelle recherche dans la même direction que celle qui m'avait permis de trouver le coefficient médian du binôme de Newton, calcul nécessaire pour déterminer les sommes de logarithmes.

C'est grâce à ce que j'avais déjà fait et en utilisant une argumentation semblable que ce fut rendu possible.

Dans le problème I, il s'agit de trouver un développement en série de $\log(n!)$

Soit à déterminer le Logarithme du produit $(m-1) \times (m-2) \times (m-3) \times (m-4) \times \dots$ où figurent $(m-1)$ facteurs ou, ce qui revient au même, la somme des logarithmes des nombres entiers 1, 2, 3, ... jusqu'à $m-1$.

Pour cela, il suffit de déterminer un développement de $\log\left(\frac{m^{m-1}}{(m-1)!}\right) = \sum_{k=1}^{m-1} \log\left(\frac{m}{m-k}\right)$.

En utilisant $\log\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x^i}{i}$, il obtient $\log\left(\frac{m^{m-1}}{(m-1)!}\right) = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i} \left(\frac{k}{m}\right)^i$.

De nouveau, en sommant en colonnes il change l'ordre des sommations pour aboutir à

$$\log\left(\frac{m^{m-1}}{(m-1)!}\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{i m^i} \sum_{k=1}^{m-1} k^i\right).$$

Il utilise alors les sommes de Bernoulli pour obtenir l'expression suivante où $l = m-1$

$$\log\left(\frac{m^{m-1}}{(m-1)!}\right) = \frac{1}{m} \times \frac{l^2 + 1}{2} + \sum_{i=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{i m^i} \left[\frac{l^{i+1}}{i+1} + \frac{1}{2} l^i + \frac{1}{i+1} \sum_{p=2}^i C_{i+1}^p b_p l^{i+1-p} \right]\right).$$

de Moivre somme ces séries écrites en ligne, colonne par colonne pour arriver à

$$m \times \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{l^{i+1}}{i(i+1)m^{i+1}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i} \left(\frac{l}{m}\right)^i + \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{b_{q+2}}{(q+2)(q+1)m^{q+1}} \sum_{n=1}^{+\infty} C_{n+q}^q \left(\frac{l}{m}\right)^n$$

Pour calculer la somme de la **première série**, il pose $\frac{l}{m} = x$, intègre le logarithme

hyperbolique de $\frac{1}{1-x}$ et obtient $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x^{i+1}}{i(i+1)} = x \log\left(\frac{1}{1-x}\right) + x - \log\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

La première série a donc pour somme $m \times \frac{m-1-\log(m)}{m} = m-1-\log(m)$.

La **deuxième série** s'écrit $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i} x^i$ et a pour somme $\frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{2} \log(m)$.

de Moivre en déduit que la somme des deux premières séries vaut

$$m-1-\frac{1}{2} \log(m)$$

La **troisième série** ($q=0$) est une série géométrique de somme $\frac{b_2}{2m} \times \frac{x}{1-x}$ soit $\frac{1}{12} - \frac{1}{12m}$

La **quatrième série** est obtenue pour $q=2$ car les nombres de Bernoulli d'indice impair sont nuls. C'est le produit de la constante $\frac{b_4}{3 \times 4m^3}$ par la série $\sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+2}^2 x^n - 1$, série obtenue en

ajoutant et en retranchant 1. La somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+2}^2 x^n$ peut s'obtenir en remarquant que c'est une série récurrente d'échelle de relation $3 - 3 + 1$, de somme

$$\frac{1 + 3x^2 + 6x^3 - 3(x^2 + 3x^3) + 3x^3}{1 - 3x + 3x^2 - x^3} = \frac{1}{(1-x)^3} = m^3$$

ou en dérivant deux fois de suite la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

La quatrième série a donc pour somme $-\frac{1}{3 \times 4 \times 30m^3} (m^3 - 1) = -\frac{1}{360} + \frac{1}{360m^3}$.

De manière analogue, la **cinquième série** s'écrit $\frac{b_4}{5 \times 6m^5} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+4}^4 x^n - 1 \right)$ (où figure une série récurrente d'échelle de relation $5-10+10-5+1$) et a pour somme

$$\frac{1}{5 \times 6 \times 42m^5} (m^5 - 1) = \frac{1}{1260} - \frac{1}{1260m^5}$$

et la **sixième série** $-\frac{1}{7 \times 8 \times 30m^7} (m^7 - 1) = -\frac{1}{1680} + \frac{1}{1680m^7}$.

De Moivre indique, sans le justifier, qu'on peut poursuivre ce développement aussi loin qu'on le souhaite pour obtenir le développement de $\log((m-1)!)$.

Il en déduit

$$\begin{aligned} \log((m-1)!) &= \log(m^{m-1}) - \log\left(\frac{m^{m-1}}{(m-1)!}\right) \\ &= (m-1)\log(m) - (m-1) - \frac{1}{2}\log(m) \\ &\quad - \frac{1}{12} + \frac{1}{12m} + \frac{1}{360} - \frac{1}{360m^3} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1260m^5} + \frac{1}{1680} - \frac{1}{1680m^7} \dots \end{aligned}$$

Il a donc obtenu le développement

$$\log((m-1)!) = (m - \frac{1}{2})\log(m) - m + 1 - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b_{2i}}{(2i-1)2i} \left(1 - \frac{1}{m^{2i-1}}\right).$$

Son raisonnement par induction est correct car la série $\sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+2i}^{2i} x^n = \frac{1}{(1-x)^{2i+1}}$ peut être obtenue soit comme somme d'une série récurrente d'échelle de relation

$C_{2i+1}^1 - C_{2i+1}^2 + C_{2i+1}^3 \dots + C_{2i+1}^{2i+1}$ soit par $2i$ dérivations successives de $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Pour de Moivre, la série $1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} \dots$ est convergente et il va s'efforcer d'en déterminer la somme

La suite $1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} \dots$ qui converge assez bien au début, converge moins bien après les cinq premiers termes, même si elle retrouve la convergence ensuite ;

Dans un premier temps (corollaire 1), il indique comment faire pour calculer numériquement une valeur approchée de cette somme. Il essaie de trouver une nouvelle série de même somme "convergeant" plus rapidement. Pour cela, il utilise le développement de $\log((m-1)!)$ qu'il vient d'établir en l'appliquant à $m=2$ puis $m=10$. Cela peut sembler suffisant si l'on fait les calculs à la main à l'aide de tables de logarithmes mais on peut voir à l'aide d'une calculatrice que l'astuce de calcul n'a comme seul effet que de retarder la divergence (au 15ème terme quand $m=2$, au 90ème terme quand $m=10$).

Dans un deuxième temps, il prend en compte les remarques que Stirling lui a fait dans leur correspondance et compare les équivalents du rapport du terme médian du binôme à la somme de tous les termes pour n très grand que chacun d'eux avait trouvé par des méthodes différentes.

De Moivre reprend sa formule :

$$\log\left(\frac{C_n^{n/2}}{2^n}\right) \approx \log\left(\frac{2(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^n}\right) + \frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680} \dots \text{et la compare à celle obtenue}$$

par Stirling : $\frac{C_n^{n/2}}{2^n} \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi n}}$ soit $\log\left(\frac{C_n^{n/2}}{2^n}\right) \approx \log\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2} \log(2\pi)$.

Utilisant $\log\left(\frac{2(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^n}\right) \approx \log\left(\frac{2}{e\sqrt{n}}\right) = \log\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) - 1$, il déduit que

$$1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} \dots = \frac{1}{2} \log(2\pi)$$

ce qui lui permet d'obtenir finalement le développement

$$\log((m-1)!) = (m - \frac{1}{2}) \log(m) - m + \frac{1}{2} \log(2\pi) + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b_{2i}}{(2i-1)2im^{2i-1}}$$

que nous avons l'habitude de nommer formule de Stirling.

VIII. CONCLUSION.

C'est à partir de motivations très différentes que de Moivre et Stirling ont abordé la question de l'évaluation de $n!$. De Moivre s'y intéresse pour l'appliquer au calcul des probabilités, plus précisément dans les investigations qu'il mène à la suite de Jacques Bernoulli sur la loi des grands nombres et qui vont le conduire en 1733 à la découverte de l'approximation normale de la loi binomiale [5]. Pour Stirling, il s'agit plus d'une démarche interne dans le contexte des sommes et interpolations de suites. Mais, comme le montre l'introduction de sa lettre à de Moivre, cette recherche est une réponse à des demandes émanant du milieu probabiliste. L'analyse progresse par l'étude de problèmes externes réputés jusqu'ici insolubles.

En dehors des motivations, les styles des deux protagonistes sont aussi bien différents. De Moivre se situe dans la lignée des mathématiques continentales, en particulier de Jacques Bernoulli, dont le livre s'ouvre sous ses yeux à la bonne page. Sa démarche s'intègre dans le cadre d'une analyse fonctionnelle sur des expressions continues. Il développe directement l'expression étudiée, il regroupe les sommes partielles par associativité et commutativité, il utilise des résultats de Bernoulli et Newton, comme un ensemble d'énoncés légitimes et de méthodes fiables. L'analyse y apparaît donc comme la collection des méthodes du calcul infinitésimal, dans un sens très moderne.

Le style de Stirling est plus proche de ce qu'on appelle l'école anglaise. Pragmatique et expérimental, il se situe dans le cadre d'une analyse séquentielle sur des expressions discrètes. Il utilise des relations de récurrence, quitte à faire des interpolations pour des valeurs non entières. Il suppose que toute expression est développable en série entière ; il n'y a plus alors qu'à trouver les coefficients. Une fois le résultat découvert, il ébauche une démonstration synthétique, mais on sent bien alors une baisse d'intensité. Ce qui l'intéresse vraiment, c'est la démarche analytique au sens de l'invention, de la découverte.

Dans les deux cas, on peut bien sûr critiquer le manque de rigueur, en particulier concernant la convergence des séries utilisées. Mais il faut replacer ces travaux dans le contexte de l'affirmation de méthodes révolutionnaires, dont la légitimité ne peut plus - ou pas encore - être assurée avec la rigueur de la géométrie grecque. C'est pourquoi on trouve un souci de contrôle des résultats par des applications numériques (quitte à le faire avec des données fausses, comme de Moivre). C'est aussi pourquoi on voit se multiplier les biais pour attaquer un problème : il s'agit de s'assurer de la cohérence des résultats obtenus par différentes méthodes, ou par différents auteurs. Les échanges entre savants en sont d'autant plus importants, puisqu'à ce moment c'est l'accord de la petite communauté des analystes qui peut fournir la légitimité manquante.

En attendant que l'ensemble de ces méthodes analytiques se stabilise, que l'analyse soit devenue "normale", il y a des moments, comme celui que nous avons cherché à décrire ici, de bonheur et de liberté, où tout est possible, même l'approximation de $n!$.

Bibliographie

A) Sources.

[1] DE MOIVRE, Abraham, 1730. *Miscellanea Analytica de seriebus et quadraturis*. Londres.

[2] STIRLING, James, 1730. *Methodus Differentialis sive Tractatus de Summatione et Interpolatione Serierum Infinitarum*. Londres.

B) Ouvrages de référence.

[3] DUTKA, Jacques, 1991. *The early history of the factorial function*. In *Archive for History of Exact Sciences*. Vol. 43, n°3.

[4] LANIER, Denis et LE GOFF, Jean-Pierre, 1993. *La classification des courbes du troisième ordre. Aspects algébriques et aspects projectifs : l'abbé de Gua de Malves et Patrick Murdoch*. In *Cahiers de la Perspective*, n°6, IREM de Basse-Normandie.

[5] LANIER, Denis et TROTOUX, Didier, 1996. *La loi des grands nombres, le théorème de de Moivre-Laplace*. In *Actes de l'Université d'Eté 95 : Epistémologie et Histoire des Mathématiques*. IREM de Besançon.

[6] MAHEUT, Gilbert, 1988. *Abraham de Moivre 1667-1754*. In *Mémoires de la Société des Sciences et Arts de Vitry-le-François*, tome XXXVII.

Pour des compléments sur les nombres de Bernoulli :

[7] GUINOT, Marc, 1994. *Ce diable d'homme d'Euler*. Editions Aléas.

FORMULAIRE

• On appelle *nombre de Bernoulli* et on note $b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$ les nombres permettant d'exprimer la somme des puissances $k^{\text{ièmes}}$ des n premiers entiers par la formule :

$$1^k + 2^k + \dots + n^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{2}n^k + \frac{1}{k+1} \sum_{i=2}^k C_{k+1}^i b_i n^{k+1-i} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \text{ et } k \geq 2.$$

• Les *nombre de Bernoulli* peuvent être déterminés par la relation de récurrence :

$$b_0 = 1 \text{ et pour } n \geq 1, \sum_{i=0}^n C_{n+1}^i b_i = 0.$$

Ainsi, on a :

$$b_0 = 1, b_1 = -\frac{1}{2}, b_2 = \frac{1}{6}, b_3 = 0, b_4 = -\frac{1}{30}, b_5 = 0, b_6 = \frac{1}{42} \text{ et } b_{2n+1} = 0 \text{ si } n \geq 1.$$

• On a les deux développements asymptotiques suivants :

$$1) \ln(n!) = (n + \frac{1}{2})\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} - \frac{1}{1680n^7} + \dots \text{ (de Moivre)}$$

$$2) \ln(n!) = (n + \frac{1}{2})\ln(n + \frac{1}{2}) - (n + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{12} \frac{1}{2n+1} + \frac{7}{360} \frac{1}{(2n+1)^3} - \frac{31}{1260} \frac{1}{(2n+1)^5} + \dots$$

(Stirling)

Résultats complémentaires.

• On peut obtenir aussi les *nombre de Bernoulli* comme coefficients de Taylor successifs de la série formelle $\frac{X}{e^X - 1}$ (c'est-à-dire $\frac{X}{e^X - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} X^n$).

• De manière analogue, on appelle *polynôme de Bernoulli* et on note $B_n(t)$ les coefficients de Taylor de la série formelle $\frac{Xe^{tX}}{e^X - 1}$ (c'est-à-dire $\frac{Xe^{tX}}{e^X - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(t)}{n!} X^n$).

• Le $n^{\text{ième}}$ *polynôme de Bernoulli* s'écrit : $B_n(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k b_k t^{n-k}$.

On a :

$$B_n(0) = b_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$B_n(0) = B_n(1) \text{ pour } n \neq 1.$$

$$B_n'(t) = n B_{n-1}(t) \text{ pour } n \geq 1.$$

$$1^k + 2^k + \dots + n^k = \frac{B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}(0)}{k+1}.$$

• Les développements asymptotiques précédents peuvent s'écrire :

$$\ln(n!) = (n + \frac{1}{2})\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b_{2i}}{(2i-1)2i} \cdot \frac{1}{n^{2i-1}}$$

$$\ln(n!) = (n + \frac{1}{2})\ln(n + \frac{1}{2}) - (n + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(2^{2i-1} - 1)b_{2i}}{(2i-1)2i} \cdot \frac{1}{(2n+1)^{2i-1}}$$

ANNEXE 1

A. de MOIVRE MISCELLANEA ANALYTICA

Livre V. Chapitre II, pp. 102-105

LIVRE V. Du binôme $a+b$ élevé à une très grande Puissance.

PROBLÈME III.

Trouver le Coefficient du Terme médian pour une très grande puissance paire, ou trouver le rapport qu'a le Coefficient du terme médian avec la somme de tous les Coefficients.

SOLUTION

Soit n l'Exposant de la puissance à laquelle est élevée le Binôme $a+b$, alors, en posant a et b chacun = 1, le rapport du Terme médian à la Puissance $(a+b)^n$ soit 2^n , sera environ comme $\frac{2(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^n}$ à 1.

Mais la Question pouvait être déterminée plus exactement avec certaines Suites, qui furent négligées par manque de temps ; ayant ensuite repris le calcul, j'ai tenu compte des quantités les plus importantes d'abord négligées, ce qui m'a permis de conclure que le rapport

cherché est proche de $\frac{2 \frac{21}{125} (n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^n}$, soit $\frac{2 \frac{21}{125} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{\sqrt{n-1}}$ à 1.

PROBLEME IV.

Pour une très grande Puissance paire, trouver le rapport du Coefficient du Terme médian au Coefficient du Terme distant du médian, d'un Intervalle donné p .

SOLUTION

Soit M le Coefficient du Terme médian, Q le Coefficient du Terme distant du médian d'un intervalle donné p , soit n l'exposant de la puissance ; en posant $n = 2m$, alors on aura :

$$\frac{M}{Q} = \frac{(m+p-1)^{m+p-\frac{1}{2}} \times (m-p+1)^{m-p+\frac{1}{2}} \times \frac{m+p}{m}}{m^{2m}}.$$

Je dressais alors une Table donnant de dix en dix les sommes des Logarithmes jusqu'à neuf cents, calculée avec quatorze décimales, d'où je pouvais clairement trouver, pour n'importe quelle grande puissance, par une Règle supérieure, le rapport du Terme médian, à un Terme quelconque distant du médian d'un intervalle pas trop grand, avec six ou sept Décimales, et le rapport du terme médian à un terme distant de lui d'un intervalle aussi grand qu'on voudra, avec trois ou au moins deux Décimales.

Table des Sommes de Logarithmes.

10	6,559773032876678	230	444,88979205416048
20	18,38613461687770	240	468,60937810834794
30	32,42367007492572	250	492,50959579816190
40	47,91165506815591	260	516,58323038531269
50	64,48308487247209	270	540,82362146345295
60	81,92018484939024	280	565,22460144971654
70	100,07841503568004	290	589,78044277179860
80	118,85473712249966	300	614,48581244647387
90	138,17194519001086	310	639,33573262820106
100	157,97001305471585	320	664,32554627685328
110	178,20092704487008	330	689,45088710873828
120	198,82540324721977	340	714,70765318735691
130	219,81070255614815	350	740,09198361893279
140	241,12911938869689	360	765,60023790941998
150	262,75690281092616	370	791,22897761354658
160	284,67346564068298	380	816,97494996633600
170	306,66079139482847	390	842,83307323640306
180	329,30298082389393	400	868,80642358042588
190	351,98589923663535	410	894,88622321121630
200	374,89689804274044	420	921,07182971935465
210	398,02459201763624	430	947,36072641107526
220	421,35867894483259	440	973,75051354434285
450	1000,23890036109930	680	763,79479638119554
460	1026,82369782727267	690	792,15483284830559
470	1053,50281200366230	700	820,57776715588503
480	1080,27423798062506	710	849,06270134357546
490	1107,13605431786673	720	877,60876273040337
500	1134,08641793783508	730	906,21510286206569
* 510	292,31713584693335	740	934,88089651586875
520	319,43935512714182	750	963,60534057942556
530	346,64501745623663	760	992,38765387953067
540	373,93254973375792	770	1021,22707525791203
550	401,30043707843343	780	1050,12286349081808
560	428,74721965475621	790	1079,07429634963075
570	456,27148972609533	800	1108,08066987990954
580	483,87188891447903	810	1137,14129771646564
590	511,54710564924395	820	1166,25551043224295
600	539,29587278855310	830	1195,42265491894594
610	567,11696539938536	840	1224,64209379750205
620	595,00919868301335	850	1253,91320485658439
630	622,97142603424363	860	1283,23538051754425
640	651,00253722380840	870	1312,60802732421889
650	679,10145669429300	880	1342,03056545618557
660	707,26714196086952	890	1371,50242826413045
670	735,49858210890182	900	1401,02306182608989

* NB. Pour les sommes qui concernent des nombres plus grands que 500, ajoutez toujours 868,80642358042588.

L'usage de cette Table permet ainsi, si on cherche le Coefficient médian pour une Puissance quelconque paire, ne dépassant pas 900, de l'obtenir plus facilement.

Ainsi en posant n l'exposant de la Puissance donnée, on prend la somme logarithmique concernant le nombre n , puis on en soustrait le double de la somme correspondant au nombre $\frac{1}{2}n$, la somme restante sera le logarithme du Coefficient du Terme médian. Par exemple, si $n = 900$.

La somme logarithmique correspondant au nombre n , sera :	1401,0230618260
si on lui ajoute comme il est dit	<u>868,8064235804</u>
La somme sera	2269,8294854064
si on lui soustrait le double de la somme correspondant au nombre $\frac{1}{2}n$ soit	<u>2000,4778007220</u>
il restera le logarithme du terme médian =	269,3516846844
et si de plus on soustrait le log. de la quantité $2^{900} =$	<u>270,9269960400</u>
ce qui reste alors exactement	<u>8,4246886444</u>

sera le logarithme du rapport du Terme médian à la somme de tous les termes, qui sera donc environ 0,026588.

Maintenant il faut voir si cette Conclusion approchée peut être déduite de la Formule

$\frac{2 \frac{21}{125} (n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^n}$, de cette manière

Log. $n-1$	= 2,9537596917
qui multiplié par $n - 1/2$	= 900 - $\frac{1}{2}$
le logarithme produit sera	= 2658,3837225300 - 1,4768798458
donc le logarithme de $(n-1)^{n-\frac{1}{2}}$	= 2656,9068426842
mais le logarithme de $2 \frac{21}{125}$	= 0,3360592778
d'où le logarithme de $2 \frac{21}{125} (n-1)^{n-\frac{1}{2}}$	= 2657,2429019620
mais log. n^n	= 2658,8282584600
d'où log. $\frac{2 \frac{21}{125} (n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^n}$	= <u>8,4246435020</u>

auquel correspond le nombre 0,026585 que la Table donnait pour 0,026588.

ANNEXE 2

A. de MOIVRE MISCELLANEA ANALYTICA

Livre VI. Chapitre II, pp. 124-128

Livre VI. Des Suites Hyperboliques, Circulaires, Mixtes et Déterminées.
Chapitre II. De la manière de revenir d'une Suite donnée à sa Somme.

C'est sur cette base que nous nous sommes appuyés pour trouver les Termes du Binôme $a+b$ élevé à une très grande puissance, à présent pour rendre ceci manifeste, il est nécessaire de mettre en avant ce qui est couramment remarqué, c'est-à-dire que le Coefficient du terme distant du premier d'un intervalle quelconque désigné par l , est le produit $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5} \dots$ continué avec autant de facteurs qu'il y a d'Unités dans l : maintenant si on change l'ordre des facteurs de manière que celui qui était avant le dernier soit maintenant le premier, il est clair que le Coefficient du terme désiré deviendra $\frac{n-l+1}{l} \times \frac{n-l+2}{l-1} \times \frac{n-l+3}{l-2} \times \frac{n-l+4}{l-3} \times \frac{n-l+5}{l-4} \dots$

De plus si n est un nombre pair, l'intervalle du Terme médian à chacun des extrêmes du Binôme sera $\frac{1}{2}n$, j'écris donc $\frac{1}{2}n$ à la place de l , le Coefficient du Terme médian sera

$$\frac{\frac{1}{2}n+1}{\frac{1}{2}n} \times \frac{\frac{1}{2}n+2}{\frac{1}{2}n-1} \times \frac{\frac{1}{2}n+3}{\frac{1}{2}n-2} \times \frac{\frac{1}{2}n+4}{\frac{1}{2}n-3} \times \frac{\frac{1}{2}n+5}{\frac{1}{2}n-4} \dots$$

Ou si on pose $n/2 = m$, le Coefficient du Terme médian sera

$$\frac{m+1}{m} \times \frac{m+2}{m-1} \times \frac{m+3}{m-2} \times \frac{m+4}{m-3} \times \frac{m+5}{m-4} \dots$$

avec autant de facteurs qu'il y a d'Unités dans m , c'est-à-dire de manière que le Numérateur du dernier facteur soit nécessairement $= 2m$.

C'est pourquoi si on écrit le Dénominateur de chaque facteur sous le Numérateur du facteur précédent, le Coefficient du Terme médian deviendra

$$\frac{m+1}{m-1} \times \frac{m+2}{m-2} \times \frac{m+3}{m-3} \times \frac{m+4}{m-4} \times \frac{m+5}{m-5} \dots \frac{2m}{m}$$

cette Suite étant continuée, en isolant son dernier terme, avec autant de facteurs qu'il y a d'Unités dans $m-1$. D'où il suit que les logarithmes des facteurs développés en Suites infinies donneront ainsi :

$$\left. \begin{aligned} &2 \times \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{3m^3} + \frac{1}{[5]m^5} + \frac{1}{7m^7} + \frac{1}{9m^9} + \dots \right) \\ &2 \times \left(\frac{2}{m} + \frac{8}{[3]m^3} + \frac{32}{5m^5} + \frac{128}{7m^7} + \frac{512}{9m^9} + \dots \right) \\ &2 \times \left(\frac{3}{m} + \frac{27}{3m^3} + \frac{243}{5m^5} + \frac{2187}{7m^7} + \frac{19683}{9m^9} + \dots \right) \end{aligned} \right\} + \log 2$$

Je distribue ces Suites en Colonnes perpendiculaires qui contiennent chacune autant de termes qu'il y a d'Unités dans $m - 1$.

$$\text{Colonne I} = \frac{2}{m} \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + \dots)$$

$$\text{Colonne II} = \frac{2}{3m^3} \times (1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + \dots)$$

$$\text{Colonne III} = \frac{2}{5m^5} \times (1 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 + 8^5 + \dots)$$

$$\text{Colonne IV} = \frac{2}{7m^7} \times (1 + 2^7 + 3^7 + 4^7 + 5^7 + 6^7 + 7^7 + 8^7 + \dots)$$

...

Quand j'ai fait ces premières investigations, j'avais, par hasard, sous la main, la Table du Célèbre *Jacques Bernoulli*, donnant les sommes des puissances des nombres naturels, ce qui eut pour effet d'alléger grandement la difficulté des Calculs. C'est pourquoi il ne faut prendre de cette Table que ce qui est nécessaire pour notre but ; je fais donc $m-1 = s$.

$$\begin{array}{l} \text{La somme de la Colonne I deviendra : } \frac{ss + s}{m} \\ \text{II} \quad \frac{\frac{1}{2}s^4 + s^3 + \frac{1}{2}ss}{3m^3} \\ \text{III} \quad \frac{\frac{1}{3}s^6 + s^5 + \frac{5}{6}s^4 * - \frac{1}{6}ss...}{5m^5} \\ \text{IV} \quad \frac{\frac{1}{4}s^8 + s^7 + \frac{7}{6}s^6 * - \frac{7}{12}s^4...}{7m^7} \\ \text{V} \quad \frac{\frac{1}{5}s^{10} + s^9 + \frac{3}{2}s^8 * - \frac{7}{5}s^6...}{9m^9} \end{array}$$

Mais pour pouvoir obtenir les sommes des sommes, je les distribue derechef en Colonnes perpendiculaires, dont la première, en posant $\frac{s}{m} = x$, sera :

$$s \times (x + \frac{1}{2 \times 3} x^3 + \frac{1}{3 \times 5} x^5 + \frac{1}{4 \times 7} x^7 + \frac{1}{5 \times 9} x^9 + \dots), \text{ soit } s \times (\frac{2}{1 \times 2} x + \frac{2}{3 \times 4} x^3 + \frac{2}{5 \times 6} x^5 + \frac{2}{7 \times 8} x^7 + \frac{2}{9 \times 10} x^9 + \dots).$$

On pose $\frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \frac{2x^9}{9} + \dots$ soit $\log \frac{1+x}{1-x} = v$; alors en multipliant par \dot{x} des

$$\text{deux côtés, il viendra } \frac{2x\dot{x}}{1} + \frac{2x^3\dot{x}}{3} + \frac{2x^5\dot{x}}{5} + \frac{2x^7\dot{x}}{7} + \frac{2x^9\dot{x}}{9} + \dots = v\dot{x}.$$

Ensuite, en prenant les Fluents des deux côtés, il viendra

$$\frac{2x^2}{1 \times 2} + \frac{2x^4}{3 \times 4} + \frac{2x^6}{5 \times 6} + \frac{2x^8}{7 \times 8} + \dots = x \log \frac{1+x}{1-x} - \log \frac{1}{1-xx}.$$

De plus en divisant des deux côtés par x , et en multipliant par s ; ou, ce qui revient au même, en multipliant des deux côtés par m , la Suite proposée s'écrira

$$\begin{aligned} \frac{ss}{m} + \frac{s^4}{2 \times 3m^3} + \frac{s^6}{3 \times 5 \times m^5} + \frac{s^8}{4 \times 7 \times m^7} + \dots &= mx \log \frac{1+x}{1-x} - m \log \frac{1}{1-xx} \\ &= (2m-1) \log(2m-1) - 2m \log(2m) \end{aligned}$$

La seconde Colonne est constituée de la Suite suivante

$$\frac{s}{m} + \frac{s^3}{3m^3} + \frac{s^5}{5m^5} + \frac{s^7}{7m^7} + \frac{s^9}{[9]m^9} \dots$$

dont la Somme, comme il est connu, $= \frac{1}{2} \log \frac{m+s}{m-s} = \frac{1}{2} \log(2m-1)$.

Alors la somme des deux Colonnes sera $(2m - \frac{1}{2}) \log(2m-1) - 2m \log m$, laquelle augmentée de $\log 2$ que nous avons mis de côté, donnera l'expression $(2m - \frac{1}{2}) \log(2m-1) - 2m \log m + \log 2$; si l'on soustrait de celle-ci $2m \log 2$, c'est-à-dire le logarithme de la puissance 2^{2m} , il restera, $(2m - \frac{1}{2}) \log(2m-1) - 2m \log(2m) + \log 2$, à quoi correspond, comme $2m = n$, le nombre $\frac{2(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^n}$, qui représente environ le rapport du terme médian à la somme de tous les termes pour une puissance dont l'exposant est n .

La troisième Colonne est constituée de la progression géométrique

$$\frac{ss}{6m^3} + \frac{s^4}{6m^5} + \frac{s^6}{6m^7} + \frac{s^8}{6m^9} + \frac{s^{10}}{6m^{11}} \dots \text{ ou } \frac{ss}{6m^3} \times \left(1 + \frac{ss}{mm} + \frac{s^4}{m^4} + \frac{s^6}{m^6} + \frac{s^8}{m^8} + \dots \right)$$

dont la somme est égale à la quantité $\frac{1}{6m} \times \frac{(m-1)^2}{2m-1}$.

La quatrième Colonne est constituée de la Suite

$$\frac{ss}{180m^5} \times \left(6 + \frac{15ss}{mm} + \frac{28s^4}{m^4} + \frac{45s^6}{m^6} + \frac{66s^8}{m^8} + \dots \right)$$

dont l'Echelle des relations est 3-3+1, et dont pour cette raison la somme deviendra $\frac{(4m^4 + 2m^3 + 3mm - 4m + 1) \times (m-1)^2}{180m^3 \times (2m-1)^3}$, que l'on doit affecter du signe négatif.

Comme je trouvais que ces Suites finissent par être très compliquées, bien que toutes parfaitement sommables; je ne fus conduit à rien d'autre que de les transférer au cas infini; en posant donc m infini, alors la somme de la première Suite se réduira au rapport $\frac{1}{12}$, la seconde somme à $\frac{1}{360}$; ainsi les sommes de toutes les Suites seront rassemblées en une Suite unique $\frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680} \dots$ dont on peut déterminer autant de termes que l'on voudra; mais je ne gardai que ces quatre termes, vu qu'ils étaient suffisants pour obtenir une approximation assez précise; alors comme cette Suite est convergente, et que ses termes sont affectés alternativement de signes positifs et négatifs, on peut conclure que le premier terme $\frac{1}{12}$ est plus grand que la somme de la Suite, ou que le premier terme est plus grand que la différence qui intervient entre tous les termes positifs et tous les termes négatifs; mais ce terme est obtenu comme logarithme Hyperbolique; de plus le nombre dont le logarithme convient est environ 1,0869, qui multiplié par 2, donne le nombre 2,1738, d'où pour une puissance infinie désignée

par n , la quantité $\frac{2,1738 \times (n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^n}$ sera plus grande que le rapport qu'a le terme médian de

cette puissance à la somme de tous les termes, et en continuant avec les autres termes, on calcule que le facteur 2,1676 est plus petit que la valeur exacte, de même que 2,1695 est plus grand que l'égalité, en revanche 2,1682 s'arrête très peu en-dessous de la vérité; de ces évaluations, je conclus que le facteur 2,168 ou $2 \frac{21}{125}$, pour une puissance non infinie elle-même, mais très grande, pouvait convenir, étant donné que pour une puissance de cinq cent, ce facteur introduit dans le rapport cherché une erreur, qui pourra se monter à peine à la soixantième partie de mille.

ANNEXE 3

Lettre de J. Stirling à A. de Moivre (19 juin 1729)

in

de MOIVRE

MISCELLANEA ANALYTICA

Livre VII. Chapitre II, pp. 170-172

Il y a environ quatre ans, j'avais laissé entendre au très illustre D^r Alex. Cuming que certains Problèmes d'Interpolation et de Sommation de Suites ou problèmes du même genre, que l'analyse ne solutionnait pas communément, pouvaient être résolus par la Méthode Différentielle de Newton ; cet homme très éminent répondit qu'il mettait en doute que Tu puisses résoudre avant un certain nombre d'années, le Problème de la détermination du Terme médian d'un Binôme élevé à une puissance quelconque, à l'aide des Différences. Poussé ensuite par la curiosité, et assuré d'obliger un homme reconnu légitimement par ses travaux de recherche, j'abordai moi-même avec intérêt cette question : et j'avoue que des difficultés surgirent qui m'empêchèrent de pouvoir atteindre aussitôt la conclusion souhaitée, mais ceci ne contraria pas vraiment ce travail, puisque en fin de compte j'arrivai à cette solution que je t'adresse afin que tu veuilles bien l'approuver en la confrontant à tes propres écrits. Et voici comment elle se présente.

Appelons n l'exposant du binôme si celui-ci est pair et $(n - 1)$ s'il est impair ; le Terme médian sera à la Somme de tous les Termes de même puissance comme l'Unité est à la moyenne proportionnelle entre la demi-circonférence du Cercle(*) et la suite suivante

$$n + \frac{A}{2(n+2)} + \frac{9B}{4(n+4)} + \frac{25C}{6(n+6)} + \frac{49D}{8(n+8)} + \frac{81E}{10(n+10)} + \dots$$

À titre d'exemple, si l'on cherche le rapport du terme médian à la somme de tous les termes d'un binôme élevé à la puissance 100 ou 99, on posera $n = 100$, qui multiplié par la demi-circonférence du Cercle, donne le premier Terme $A = 157,079632679$; ensuite soit $B = \frac{A}{204}$, $C = \frac{9B}{416}$, $D = \frac{25C}{636}$ etc..., et en effectuant le calcul comme dans la marge, on trouve une somme de termes égale à 157,866984459, dont la racine carrée 12,5645129018 est à l'unité comme la somme de tous les termes est au terme médian d'un binôme élevé à la puissance 100 ou 99.

157,079632679	157,079632679
769998199	769998199
16658615	16658615
654820	654820
37137	37137
2734	2734
246	246
26	26
3	3
157,866984459	157,866984459

Le problème peut se résoudre encore à l'aide de la Suite réciproque de celle-ci, et de fait, la somme de tous les Termes est au Terme médian comme le rapport de sous-duplication de la demi-circonférence du Cercle et de la Suite :

$$\frac{1}{n+1} + \frac{A}{2(n+3)} + \frac{9B}{4(n+5)} + \frac{25C}{6(n+7)} + \frac{49D}{8(n+9)} + \frac{81E}{10(n+11)} + \dots$$

(*) Cercle de diamètre unité

ou ce qui revient au même, que l'on pose $a = 0,6366197723676$, qui est évidemment le quotient de l'unité par la demi-circonférence du Cercle ; la moyenne proportionnelle entre le nombre a et cette suite sera à l'unité comme le Terme Médian est à la somme de tous les Termes.

De sorte que si $n = 100$, comme précédemment, dans le calcul comme tu le vois ci-contre, il apparaît que la somme des termes est égale à $0,00633444670787$, dont la racine carrée $0,0795892373872$ est à l'unité comme le Terme médian est à la Somme de tous les termes du Binôme élevé à la puissance 100 ou 99.

Et il y a d'autres suites Solutions de ce Problème, d'une simplicité comparable à celles utilisées jusqu'à présent, mais elles convergent un peu moins bien quand l'Exposant du Binôme est un petit nombre.

D'ailleurs, en pratique, il n'est pas nécessaire d'avoir recours aux Suites : en fait, il suffit de prendre la moyenne proportionnelle entre la demi-circonférence du Cercle et $n + \frac{1}{2}$; celle-ci constituera souvent une meilleure approximation que les deux premiers Termes de la Suite, dont le seul premier suffit la plupart du temps.

De plus, on peut énoncer la même approximation d'une autre manière plus commode d'un point de vue pratique. Poser $2a = c = 1,2732395447352$; la somme des Termes sera au terme médian comme l'unité est à $\sqrt{\frac{c}{2n+1}}$ de manière très approchée, avec une erreur par excès d'environ $\frac{1}{16nn} \sqrt{\frac{c}{2n+1}}$.

Si $n = 100$, on aura $\frac{c}{2n+1} = 0,006334525$ et sa racine carrée $0,07958973$ est une approximation exacte jusqu'à la sixième décimale : de plus celle-ci divisée par $16nn$, c'est-à-dire 160000 , donnera une correction de $0,00000050$; cette dernière étant retranchée de l'approximation, il restera le nombre cherché $0,07958923$, exact jusqu'à la dernière décimale.

De même, si $n = 900$, on aura $\frac{c}{2n+1} = 0,000706962545$, dont la racine carrée $0,026588767$ dépasse le résultat correct de 2 pour la neuvième décimale. Mais si la correction est calculée puis retranchée de l'Approximation, on obtient le nombre cherché, exact jusqu'à la treizième décimale.

Mais voici une approximation facile à calculer et aussi plus précise ; on divise la différence des logarithmes des nombres $n + 2$ et $n - 2$ par 16, auquel on ajoute la moitié du logarithme de l'Exposant n ; ensuite on ajoute à cette somme le logarithme constant $0,0980599385151$ qui est la moitié du logarithme de la demi-circonférence d'un Cercle, et cette nouvelle somme est le logarithme du nombre qui est à l'unité comme la somme de tous les Termes au terme Médian. Si $n = 900$, le calcul sera le suivant :

$\frac{1}{2} \log 900$	1,4771212547
Diff. log 902 & 898 / 16	0,0001206376
Log constant	0,0980599385
Somme	1,5753018308

Et cette somme dépasse la vraie valeur de deux unités dans la dernière décimale ; il en résulte que le logarithme du nombre $37,6098698$ est à l'unité comme la somme de tous les Termes au terme médian dans un binôme élevé à la puissance 900 ou 899.

0,00630316606304
3059789351
65566915
2553229
143473
10470
934
98
12
1
0,00633444670787

Et si tu veux l'inverse de ce nombre, prends le complément du logarithme, ce qui donne naturellement $-2,4246981692$, et tu obtiendras le nombre correspondant $0,0265887652$.

Ces Solutions ont été obtenues à l'aide de la Méthode Différentielle de *Newton* ; je ne joins pas leurs démonstrations, car j'ai l'intention de rendre public dans peu de temps un Ouvrage que j'ai rédigé sur l'Interpolation et la Sommation des Suites.

Le 19 juin 1729.

Ton très dévoué, Jac. Stirling.

ANNEXE 4

J. STIRLING METHODUS DIFFERENTIALIS

Deuxième partie, pp. 135-137

DEUXIÈME PARTIE : De l'Interpolation des Suites.

PROPOSITION XXVIII.

Trouver une somme quelconque de Logarithmes, dont les nombres sont en progression Arithmétique.

Que les nombres $x+n, x+3n, x+5n, x+7n, \dots, z-n$ désignent des nombres quelconques en progression Arithmétique, dont le premier est $x+n$, le dernier $z-n$, et leur différence commune $2n$. En outre, on note l_z et l_x les Logarithmes Tabulaires des nombres z et x ; et $a = 0,434294481903252$, à savoir le Logarithme réciproque du naturel Dix. Alors la somme des Logarithmes proposés sera égale à la différence entre les deux Suites suivantes

$$\begin{aligned} & \frac{zl_z}{2n} - \frac{az}{2n} - \frac{an}{12z} + \frac{7an^3}{360z^3} - \frac{31an^5}{1260z^5} + \frac{127an^7}{1680z^7} - \frac{511an^9}{1188z^9} + \dots \\ & \frac{xl_x}{2n} - \frac{ax}{2n} - \frac{an}{12x} + \frac{7an^3}{360x^3} - \frac{31an^5}{1260x^5} + \frac{127an^7}{1680x^7} - \frac{511an^9}{1188x^9} + \dots \end{aligned}$$

Ces suites se continuant à l'infini ; on pose

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3.4} &= A \\ -\frac{1}{5.8} &= A + 3B \\ -\frac{1}{7.12} &= A + 10B + 5C \\ -\frac{1}{9.16} &= A + 21B + 35C + 7D \\ -\frac{1}{11.20} &= A + 36B + 126C + 84D + 9[E] \\ &\dots \end{aligned}$$

où les nombres qui multiplient $A, B, C, D \dots$ dans les différentes valeurs sont les Coefficients alternés des binômes impairs convenables. De ces préliminaires il vient que le Coefficient du troisième Terme sera $-\frac{1}{12} = A$, celui du quatrième $+\frac{7}{360} = B$, du cinquième $-\frac{31}{1260} = C$, et ainsi de suite.

DÉMONSTRATION

On diminue la variable z de $2n$; ou ce qui revient au même, on remplace z par $z-2n$ dans la Suite $\frac{zl_z}{2n} - \frac{az}{2n} - \frac{an}{12z} + \frac{7an^3}{360z^3} - \frac{31an^5}{1260z^5} + \frac{127an^7}{1680z^7} - \frac{511an^9}{1188z^9} + \dots$ et il viendra la valeur suivante

$$\frac{(z-2n)l, (z-2n)}{2n} - \frac{a}{2n} \times (z-2n) - \frac{an}{12(z-2n)} + \frac{7an^3}{360(z-2n)^3} - \frac{31an^5}{1260(z-2n)^5} + \dots$$

Qui retranchée de la première valeur, les Termes étant d'abord réduits à la même forme par Division, et il restera $l, z - \frac{an}{z} - \frac{an^2}{2z^2} - \frac{an^3}{3z^3} - \frac{an^4}{4z^4} - \dots$ c'est-à-dire le Logarithme du nombre z-n.

D'où, dans tous les cas, la différence de deux valeurs successives de la Suite est égale au Logarithme de z-n ; qui exprime la forme générale des Logarithmes à sommer. Donc la Suite sera la somme des Logarithmes proposés, si on lui retranche l'autre Suite. En fait ces sommes sont quelquefois rectifiées comme des Aires, pour devenir vraies.

EXEMPLE I.

On propose de trouver la somme des Logarithmes des dix nombres 101, 103, 105, 107, 109, 111, 113, 115, 117, 119 ; comparés avec $x+n, x+3n, x+5n, \dots z-n$, ils donnent comme différence commune $2n = 2$, et $n=1$; et en outre d'abord $x+1 = 101$, ensuite $z-1 = 119$: d'où $x = 100$, $z = 120$. Or, en substituant 0,434294481903252 à la place de a, et les Logarithmes respectifs de 100 et 120 à la place de l,x et de l,z ; on trouvera que les valeurs des deux Suites sont 78,28491400121 et 98,69290426016, dont la différence donne 20,40799025895 pour la Somme des Logarithmes désirée.

EXEMPLE II.

On cherche maintenant la Somme des Logarithmes des nombres 11, 12, 13, ... 1000, dont le premier est 11, et le dernier 1000, et la différence commune l'unité. Alors, on a $n = \frac{1}{2}$, $x + \frac{1}{2} = 11$, $z - \frac{1}{2} = 1000$; d'où $x = \frac{21}{2}$, $z = \frac{2001}{2}$; qui étant écrits, ainsi que les Logarithmes des mêmes $\frac{21}{2}$ et $\frac{2001}{2}$ à la place de l,x et l,z ; donnent pour valeurs des Suites 2567,2055542879 et 6,160673097, dont la différence donne 2561,0448811892 pour la Somme des Logarithmes demandée.

D'ailleurs si on veut une somme quelconque de Logarithmes des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, ... en posant que z-n est le dernier nombre, d'où $n = \frac{1}{2}$; et trois ou quatre Termes de cette Suite $zl, z - az - \frac{a}{24z} + \frac{7a}{2880z^3} - \dots$, additionnés avec le [demi-]logarithme de la circonférence du Cercle dont le Rayon est l'Unité, c'est-à-dire 0,399089934179, donneront la somme demandée, ce qui donne moins de travail quand il faut sommer de nombreux logarithmes. Ainsi si on pose $z - \frac{1}{2} = 1000$, ou $z = \frac{2001}{2}$ la valeur de la Suite sera 2567,2055542879 comme avant ; qui ajouté au Logarithme constant donne 2567,6046442221 comme somme des Logarithmes des mille premiers nombres de la Suite 1, 2, 3, 4, 5,...

ANNEXE 5

A. de MOIVRE SUPPLEMENT AUX MISCELLANEA ANALYTICA

Quelques jours après la parution de mon ouvrage, *Miscellanea Analytica*, le très savant *Stirling*, par une lettre, me fit remarquer que la Table de sommes de Logarithmes qui y figurait, ne possédait pas un degré de précision suffisant pour appuyer une recherche, vu que cette Table comportait une erreur à la cinquième décimale de chacune de ses sommes : avec bienveillance, il indiquait dans sa lettre une suite convergeant plus rapidement dont l'utilisation permet d'obtenir facilement la somme des logarithmes d'un nombre quelconque d'entiers naturels ; la chose avait été exposée ainsi.

Soit à sommer un nombre quelconque d'entiers naturels dont le dernier est noté $z - \frac{1}{2}$; poser $a = 0,43429448190325$, c'est-à-dire a égal au quotient de l'unité par le logarithme hyperbolique de 10 ; ainsi la somme des logarithmes de ces nombres pourra s'obtenir par la suite : $z \log z - az - \frac{a}{2 \times 12z} + \frac{7a}{8 \times 360z^3} - \frac{31a}{32 \times 1260z^5} + \frac{127a}{128 \times 1680z^7} - \dots$ à laquelle il faut ajouter le nombre 0,399089934179... qui n'est autre que la moitié du logarithme de la circonférence d'un cercle dont le Rayon est l'unité.

À l'instant où je jetai les yeux sur cette suite qui comporte les nombres 12, 360, 1260, 1680, nombres que j'ai beaucoup utilisés, je ne doutai pas soit de démontrer ce résultat, soit de pouvoir me lancer dans une nouvelle recherche dans la même direction que celle qui m'avait permis de trouver le coefficient médian du binôme de *Newton*, calcul nécessaire pour déterminer les sommes de logarithmes.

C'est grâce à ce que j'avais déjà fait et en utilisant une argumentation semblable que ce fut rendu possible.

Le Coefficient médian d'un Binôme élevé à la puissance $2m$ est égal au produit des quantités $\frac{m+1}{m} \times \frac{m+2}{m-1} \times \frac{m+3}{m-2} \times \frac{m+4}{m-3} \times \frac{m+5}{m-4} \dots$ en continuant de manière à avoir m facteurs.

D'autre part, comme dans le cas des très grandes puissances, le nombre de multiplications nécessaires pour obtenir ce résultat était important, ce qui rendait le calcul difficile ; c'est pourquoi j'avais pensé que la meilleure façon d'y arriver était d'utiliser des approximations de sommes des logarithmes de nombres consécutifs, comme on le voit dans ce qui suit et c'est après une ou deux tentatives que je fus amené à tirer cette conclusion.

Le Logarithme du Coefficient médian dans le cas d'une très grande puissance peut s'obtenir sous la forme : $(2m - \frac{1}{2}) \log(2m) - 2m \log(m) + \log 2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680}$ auquel on retranche $\log(2^{2m})$, soit $2m \log 2$ ce qui donne

$$(2m - \frac{1}{2}) \log(2m) - 2m \log(2m) + \log 2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680},$$

qui est une approximation du logarithme du rapport du coefficient médian à la somme de tous les coefficients d'un binôme élevé à une très grande puissance.

En vérité, il ne me semble pas nécessaire de revenir maintenant sur tous les détails qui m'ont conduit à cette conclusion, il suffira de revenir sur certains d'entre eux.

Les quantités $(2m - \frac{1}{2}) \log(2m) - 2m \log(2m) + \log 2$ avaient été déduites de quadratures et les fractions $\frac{1}{12}, \frac{1}{360}, \frac{1}{1260}, \frac{1}{1680}$ avaient été générées de la manière suivante.

La première avait pour origine une progression géométrique $\frac{ss}{6m^3} \times \left(1 + \frac{ss}{mm} + \frac{s^4}{m^4} + \frac{s^6}{m^6} + \frac{s^8}{m^8} + \dots \right)$ en faisant $s = m - 1$, dont la somme est égale à la fraction $\frac{1}{6m} \times \frac{(m-1)^2}{2m-1}$, fraction qui se réduit à $\frac{1}{12}$ si m est très grand ou infini en puissance.

La seconde provenait de la suite $\frac{ss}{180m^5} \times \left(6 + \frac{15ss}{mm} + \frac{28s^4}{m^4} + \frac{45s^6}{m^6} + \frac{66s^8}{m^8} + \dots \right)$ dont la somme vaut $\frac{(4m^4 + 2m^3 + 3mm - 4m + 1) \times (m-1)^2}{180m^3 \times (2m-1)^3}$, qui se réduit, dans le cas infini, à $\frac{1}{360}$.

Comme, en vérité, la somme suivante me semblait embarrassée, je tentais de voir si je ne pouvais pas la traiter plus facilement que les autres sommes et en posant $r = \frac{m-1}{m}$ et $s = m - 1$,

la Troisième Somme se présentait ainsi : $\frac{ss}{630m^5} \times \frac{15 - 5r + 10rr - 5r^3 + r^4}{(1-r)^5}$, qui dans le cas infini se réduit à $\frac{1}{1260}$, suite dont nous montrons que la somme est inférieure.

La quatrième somme se ramène à la forme, $\frac{ss}{840m^3} \times \frac{28 + 14r + 42rr - 35r^3 + 21r^4 - 7r^5 + r^6}{(1-r)^7}$, qui dans le cas infini devient égal à $\frac{1}{1680}$.

J'en étais à ce point de ma recherche, quand j'eus l'espoir de pouvoir déterminer la loi de formation des termes suivants, en poursuivant le calculs des autres sommes ; redoutant de me lasser avec des calculs fastidieux, je m'en tenais là, d'autant plus volontiers que je pensais que ce Problème, dans lequel je m'étais investi quelques heures seulement, avait été résolu de manière correcte ; il faut ajouter que ce problème n'était pas apparu pour être résolu en tant que tel, mais pour servir à la résolution d'un autre Problème que j'avais trouvé très beau ; il m'avait semblé que je pouvais, à bon droit, avoir confiance en ce que j'avais fait.

Cependant, après la lettre de Stirling, comme je disposais de quelque temps libre, je me déterminais à examiner à nouveau tout ceci de près et à reprendre par le commencement ce Problème du calcul de la Somme des Logarithmes des nombres entiers à partir de l'unité ; mais voici les étapes par lesquelles je fus conduit à ma solution. Je les transmets parce que la méthode que j'utilise, est très différente de celle employée par Stirling, et aussi pour éloigner le soupçon d'avoir voulu m'attribuer le résultat de ce problème.

PROBLÈME I.

Soit à déterminer le Logarithme du produit $(m-1) \times (m-2) \times (m-3) \times (m-4) \times \dots$ où figurent $(m-1)$ facteurs ou, ce qui revient au même, la somme des logarithmes des nombres entiers 1, 2, 3, ... jusqu'à $m-1$.

SOLUTION.

À la place de $(m-1) \times (m-2) \times (m-3) \times (m-4) \times \dots$, écrire $\frac{m}{m-1} \times \frac{m}{m-2} \times \frac{m}{m-3} \times \frac{m}{m-4} \times \dots$

La détermination du logarithme de cette quantité, suivie de la soustraction du logarithme de m^{m-1} permettra d'obtenir ce qui est demandé.

TABLE I

Or,

$$\begin{aligned} \text{Log} \frac{m}{m-1} &= \frac{1}{m} + \frac{1}{2mm} + \frac{1}{3m^3} + \frac{1}{4m^4} + \frac{1}{5m^5} + \dots \\ \text{Log} \frac{m}{m-2} &= \frac{2}{m} + \frac{4}{2mm} + \frac{8}{3m^3} + \frac{16}{4m^4} + \frac{32}{5m^5} + \dots \\ \text{Log} \frac{m}{m-3} &= \frac{3}{m} + \frac{9}{2mm} + \frac{27}{3m^3} + \frac{81}{4m^4} + \frac{243}{5m^5} + \dots \\ \text{Log} \frac{m}{m-4} &= \frac{4}{m} + \frac{16}{2mm} + \frac{64}{3m^3} + \frac{256}{4m^4} + \frac{1024}{5m^5} + \dots \end{aligned}$$

Je réordonne ces suites en nombre fini, à savoir $m-1$, chacune ayant une infinité de termes en une somme infinie de suites dont le nombre de termes, égal à $m-1$, est fini, en les écrivant colonne par colonne.

TABLE II

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m} + \frac{2}{m} + \frac{3}{m} + \frac{4}{m} + \frac{5}{m} + \dots + \frac{m-1}{m} \\ &\frac{1}{2mm} + \frac{4}{2mm} + \frac{9}{2mm} + \frac{16}{2mm} + \frac{25}{2mm} + \dots + \frac{(m-1)^2}{2mm} \\ &\frac{1}{3m^3} + \frac{8}{3m^3} + \frac{27}{3m^3} + \frac{64}{3m^3} + \frac{125}{3m^3} + \dots + \frac{(m-1)^3}{[3m^3]} \\ &\frac{1}{4m^4} + \frac{16}{4m^4} + \frac{81}{4m^4} + \frac{256}{4m^4} + \frac{625}{4m^4} + \dots + \frac{(m-1)^4}{4m^4} \end{aligned}$$

À cet endroit, nous suivons les tables de J. Bernoulli, dont nous avons retiré auparavant autant qu'il convenait à notre propos pour obtenir plus facilement les sommes des puissances des nombres entiers, de manière à atteindre notre résultat.

Soit c l'exposant et l le nombre de termes à ajouter ; si l'on note \int, \int^c la somme des l premières puissances $c^{\text{ièmes}}$, on obtient les sommes suivantes.

SOMME DES PUISSANCES

TABLE III

$$\int, 1 = \frac{1}{2}11 + \frac{1}{2}1$$

$$\int, 1^2 = \frac{1}{3}1^3 + \frac{1}{2}11 + \frac{1}{6}1$$

$$\int, 1^3 = \frac{1}{4}1^4 + \frac{1}{2}1^3 + \frac{1}{4}11$$

$$\int, 1^4 = \frac{1}{5}1^5 + \frac{1}{2}1^4 + \frac{1}{3}1^3 * -\frac{1}{30}1$$

$$\int, 1^5 = \frac{1}{6}1^6 + \frac{1}{2}1^5 + \frac{5}{12}1^4 * -\frac{1}{12}11$$

$$\int, 1^6 = \frac{1}{7}1^7 + \frac{1}{2}1^6 + \frac{1}{2}1^5 * -\frac{1}{6}1^3 * +\frac{1}{42}1$$

$$\int, 1^7 = \frac{1}{8}1^8 + \frac{1}{2}1^7 + \frac{7}{12}1^6 * -\frac{7}{24}1^4 * +\frac{1}{12}11$$

$$\int, 1^8 = \frac{1}{9}1^9 + \frac{1}{2}1^8 + \frac{2}{3}1^7 * -\frac{7}{15}1^5 * +\frac{2}{9}1^3 * -\frac{1}{30}1$$

$$\int, 1^9 = \frac{1}{10}1^{10} + \frac{1}{2}1^9 + \frac{3}{4}1^8 * -\frac{7}{10}1^6 * +\frac{1}{2}1^4 * -\frac{3}{20}11$$

$$\int, 1^{10} = \frac{1}{11}1^{11} + \frac{1}{2}1^{10} + \frac{5}{6}1^9 * -11^7 * +11^5 * -\frac{1}{2}1^3 * +\frac{5}{6[6]}1$$

...

En vérité, pour obtenir cette Table, cet homme très savant utilisa une Formule qu'il écrivit à la suite.

"Soit c un exposant quelconque, la somme de tous les termes l^c notée ∫, l^c est égale à $\int, l^c = \frac{1}{c+1}l^{c+1} + \frac{1}{2}l^c + \frac{c}{6}Al^{c-1} + \frac{c(c-1)(c-2)}{2.3.4}Bl^{c-3} + \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{2.3.4.5.6}Cl^{c-5} + \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)(c-5)(c-6)}{2.3.4.5.6.7.8}Dl^{c-7} \dots$ et ainsi de suite, les exposants diminuant de 2 en 2 continûment jusqu'à arriver à l ou ll ; les Lettres Majuscules A, B, C, D désignent respectivement les coefficients des derniers termes des sommes ∫, ll, ∫, l⁴, ∫, l⁶, ∫, l⁸...Ainsi $A = \frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{30}$, $C = \frac{1}{42}$, $D = -\frac{1}{30}$. D'autre part ces coefficients peuvent être obtenus de proche en proche, de telle sorte qu'ajoutés ensemble ils doivent donner l'unité ; ainsi, nous disons que D est égal à $-\frac{1}{30}$ valeur qui vérifie :

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{7}{15} + [\frac{2}{9}] + D = 1."$$

J. Bernoulli indique de plus que l'on peut en déduire les quantités A, B, C, D, E ...les unes à partir des autres plus commodément de la façon suivante :

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$B = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{4}{2}A = -\frac{1}{30}$$

$$C = \frac{1}{2} - \frac{1}{7} - \frac{6}{2}A - \frac{6.5.4}{2.3.4}B = \frac{1}{42}$$

$$D = \frac{1}{2} - \frac{1}{9} - \frac{8}{2}A - \frac{8.7.6}{2.3.4}B - \frac{8.7.6.5.4}{2.3.4.5.6}C = -\frac{1}{30}$$

$$E = \frac{1}{2} - \frac{1}{11} - \frac{10}{2}A - \frac{10.9.8}{2.3.4}B - \frac{10.9.8.7.6}{2.3.4.5.6}C - \frac{10.9.8.7.6.5.4}{2.3.4.5.6.7.8}D = \frac{5}{66}$$

...

en vérité, il ne donne pas d'explications sur la génération de ces quantités comme si les lignes précédentes étaient suffisantes pour les calculs.

Par suite, notre seconde table se transforme en une autre que voici.

TABLE IV

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{1}{2}11}{m} + \frac{\frac{1}{2}1}{m} \\ & \frac{\frac{1}{3}1^3}{2mm} + \frac{\frac{1}{2}11}{2mm} + \frac{\frac{1}{6}1}{2mm} \\ & \frac{\frac{1}{4}1^4}{3m^3} + \frac{\frac{1}{2}1^3}{3m^3} + \frac{\frac{1}{4}11}{3m^3} \\ & \frac{\frac{1}{5}1^5}{4m^4} + \frac{\frac{1}{2}1^4}{4m^4} + \frac{\frac{1}{3}1^3}{4m^4} * - \frac{\frac{1}{30}1}{4m^4} \\ & \dots \end{aligned}$$

Il apparaît que cette table peut être transformée en une nouvelle table formée des suites qui ne sont autres que les colonnes de la table précédente dans lesquelles est mis en facteur pour chaque suite un facteur trouvé par induction sur les termes qui suivent les deux premiers.

TABLE V

$$\begin{aligned} & m \times \left[\frac{1}{2} \times \frac{11}{mm} + \frac{1}{6} \times \frac{1^3}{m^3} + \frac{1}{12} \times \frac{1^4}{m^4} + \frac{1}{20} \times \frac{1^5}{m^5} + \dots \right] \\ & \frac{\frac{1}{2}1}{m} + \frac{\frac{1}{4}11}{mm} + \frac{1}{6} \frac{1^3}{m^3} + \frac{1}{8} \frac{1^4}{m^4} + \frac{1}{10} \frac{1^5}{m^5} + \dots \\ & \frac{A}{2m} \times \left[\frac{1}{m} + \frac{11}{mm} + \frac{1^3}{m^3} + \frac{1^4}{m^4} + \frac{1^5}{m^5} + \dots \right] \\ & \frac{B}{3 \times 4m^3} \times \left[\frac{31}{m} + \frac{611}{mm} + \frac{101^3}{m^3} + \frac{151^4}{m^4} + \frac{211^5}{m^5} + \dots \right] \\ & \frac{C}{5 \times 6m^5} \times \left[\frac{51}{m} + \frac{1511}{mm} + \frac{351^3}{m^3} + \frac{701^4}{m^4} + \frac{1261^5}{m^5} + \dots \right] \\ & \frac{D}{7 \times 8m^7} \times \left[\frac{71}{m} + \frac{2811}{mm} + \frac{841^3}{m^3} + \frac{2101^4}{m^4} + \frac{4621^5}{m^5} + \dots \right] \end{aligned}$$

De ces Suites, les deux premières sont logarithmiques, toutes les autres peuvent être sommées à l'aide de quantités rationnelles.

Déjà si l'on pose $\frac{1}{m} = x$, la première suite s'écrit :

$m \times \left[\frac{1}{2} xx + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{20} x^5 + \dots \right]$ dont la somme a été déterminée dans notre livre p.110, ce qui peut être refait comme précédemment.

La Suite $x + \frac{1}{2} xx + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 + \dots$ a pour somme le Logarithme Hyperbolique de la quantité $\frac{1}{1-x}$; notons v cette suite, multiplions maintenant chacun des membres de l'équation

par \dot{x} , il viendra : $x\dot{x} + \frac{1}{2} x\dot{x}x + \frac{1}{3} x^3\dot{x} + \frac{1}{4} x^4\dot{x} + \dots = v\dot{x}$, et ainsi

$\frac{1}{2} xx + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{20} x^5 + \dots = F.v\dot{x}$; soit $F.v\dot{x} = vx - q$, ce qui donne donc

$\dot{q} = \frac{x\dot{x}}{1-x} = -\dot{x} + \dot{v}$, c'est pourquoi $F.v\dot{x} = vx + x - v$, où $x = \frac{1}{m}$ et en outre $l = m-1$. Il suit que

la quantité $vx + x - v$ se transforme en $\frac{m-1-\log m}{m}$, rapport qui multiplié par m donne la somme de la première Suite : $m-1-\log m$.

En notant $\frac{1}{m} = x$, la deuxième Suite devient

$$\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} xx + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{8} x^4 + \dots = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{2} \log m.$$

Ainsi, les deux premières suites réunies ont pour somme $m-1-\frac{1}{2} \log m$.

On obtiendra facilement la somme de la troisième Suite, qui est une progression géométrique, égale à $\frac{A}{2m} \times (m-1)$ et comme $A = \frac{1}{6}$, elle se réduit à $\frac{1}{12} - \frac{1}{12m}$.

Si l'on met de côté le facteur commun, qu'on lui ajoute une unité et que l'on pose $\frac{1}{m} = x$ la quatrième suite devient $1 + 3x + 6xx + [10x^3] + 15x^{[4]} + 21x^{[5]} + \dots$ qui aura pour somme $\frac{1}{(1-x)^3} = m^3$, c'est pourquoi si de cette somme on retranche 1 et que l'on restitue le facteur

commun $\frac{B}{3 \times 4m^3}$ soit $-\frac{1}{360m^3}$, on obtiendra la somme de la quatrième Suite égale à $-\frac{1}{360} + \frac{1}{360m^3}$.

De la même manière la somme de la cinquième Suite est égale à $\frac{1}{1260} - \frac{1}{1260m^5}$ et celle de la sixième à $-\frac{1}{1680} + \frac{1}{1680m^7}$.

De ce qui précède, il est clair que l'on peut obtenir autant de sommes des Suites suivantes que l'on voudra.

Donc, à partir de ce qui a été démontré ci-dessus, si toutes ces sommes sont retranchées du logarithme de m^{m-1} , soit $(m-1)\log m$, ce qui reste à savoir

$$\begin{aligned}
& (m - \frac{1}{2}) \log m \\
& + 1 - m \\
& - \frac{1}{12} + \frac{1}{12m} \\
& + \frac{1}{360} - \frac{1}{360m^3} \\
& - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1260m^5} \\
& + \frac{1}{1680} - \frac{1}{1680m^7} \\
& \dots
\end{aligned}$$

représente le logarithme Hyperbolique de la quantité $(m-1) \times (m-2) \times (m-3) \times (m-4) \times \dots \times 1$.

COROLLAIRE I

La suite $1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} \dots$ qui converge assez bien au début, converge moins bien après les cinq premiers termes, même si elle retrouve la convergence ensuite ; mais, comme pour déterminer une valeur assez précise, il serait nécessaire de poursuivre le développement de trop de termes, il sera préférable de déterminer cette valeur comme suit.

Faire comme pour le calcul du logarithme de l'unité, c'est-à-dire poser $m - 1 = 1$ soit $m = 2$. La suite double qui exprime la somme des logarithmes devient

$$\frac{3}{2} \log 2 - 2 + \frac{1}{12 \times 2} - \frac{1}{360 \times 8} + \frac{1}{1260 \times 32} - \frac{1}{1680 \times 128} \dots + 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} + \dots$$

Mais toute cette somme est nulle car $\log 1 = 0$, c'est pourquoi la suite :

$$1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} \dots \text{ pourra s'écrire sous l'autre forme suivante}$$

$2 - \frac{3}{2} \log 2 - \frac{1}{12 \times 2} + \frac{1}{360 \times 8} - \frac{1}{1260 \times 32} + \frac{1}{1680 \times 128} - \frac{1}{1188 \times 512} \dots$ qui converge de manière plus acceptable.

Et de même pour calculer la somme des neuf premiers logarithmes, poser $m - 1 = 9$, soit $m = 10$. On aboutit alors à la conclusion :

$$1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} \dots = \log 5040 \times 72 - 9 \frac{1}{2} \log 10 + 10 - \frac{1}{12 \times 10} + \frac{1}{360 \times 10^3} - \frac{1}{1260 \times 10^5} + \frac{1}{1680 \times 10^7} \dots,$$

la dernière suite convergeant très vite.

COROLLAIRE II

Le fait que les quantités $1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} \dots$ sommées jusqu'à l'infini donnent naissance au logarithme Hyperbolique de la circonférence d'un Cercle de Rayon Unité, ce qui m'occupait en premier dans les pages de mon ouvrage avant sa mise sous presse, ne se manifesta cependant pas à moi avant que Stirling m'ait adressé sa Solution à propos de la détermination du Coefficient médian du Binôme, solution dont il a accepté qu'elle figure dans ce Livre à ma demande, c'est pourquoi je reconnais de bon gré que ce fut en grande partie la Solution de Stirling qui me poussa à comprendre ce fait.

Stirling avait trouvé que le rapport médian dans une puissance très grande, notée n , était égal à $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2np+p}}$, en posant évidemment p égal à la circonférence d'un Cercle de Rayon 1,

quoiqu'en vérité cette quantité puisse être exprimée par $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2n+1}}$, l'une et l'autre expression étant obtenues après simplification de la première, c'est pourquoi si l'exposant de la puissance est rendu infini, le rapport médian peut être représenté par $\frac{2}{\sqrt{np}}$.

Mais j'avais moi-même trouvé que le Logarithme du rapport médian dans une puissance très grande, était à peu près égal au logarithme de la quantité $\frac{2(n-1)^n}{n^n \sqrt{n-1}}$ + les quantités

$\frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680} + \dots$ dont il doit être tenu compte comme le logarithme ; j'avais noté

en outre que la quantité $\frac{(n-1)^n}{n^n}$ soit $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ était presque la quantité donnée, vu qu'elle est

environ égale à la suite infinie $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \dots$ nombre dont le logarithme hyperbolique

vaut -1 , par conséquent dans une puissance infiniment grande, le logarithme du rapport médian sera $\frac{2}{\sqrt{n}} - 1 + \frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680} + \dots$ et à partir de l'expression de Stirling, le

logarithme de ce rapport médian est $\log \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2} \log p$, et ainsi donc la Suite infinie

$1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} + \dots$ est égale à la moitié du logarithme Hyperbolique de la Circonférence d'un Cercle de Rayon unité.

En conséquence, la somme des logarithmes des entiers naturels de 1 jusqu'à $m-1$ pourra s'exprimer de la manière suivante :

$$(m - \frac{1}{2}) \log m + \frac{1}{2} \log p - m + \frac{1}{12m} - \frac{1}{360m^3} + \frac{1}{1260m^5} - \frac{1}{1680m^7} + \dots$$

Il faut bien noter que ces logarithmes sont hyperboliques, car s'il s'était agi de logarithmes tabulaires employés pour les deux premiers termes, alors il aurait fallu multiplier les quantités restantes par le nombre 0,43429448190325...

Il sera commode de présenter ceci en désignant comme Newton les termes qui suivent les deux premiers par les lettres majuscules P, Q, R, S,... ceci, pour que la formule ci-dessus, une fois posé $0,43429 = r$, puisse se transformer en la suivante

$$(m - \frac{1}{2}) \log m + \frac{1}{2} \log p - rm + \frac{P}{12m} - \frac{Q}{360m^3} + \frac{2R}{1260m^5} - \frac{3[S]}{1680m^7} + \dots$$

Pour qu'il n'y ait pas place pour l'ambiguïté, je pense qu'il faut avertir que les signes des termes précédents ne sont pas inclus dans les valeurs des lettres majuscules ; en ce qui concerne la quantité $\frac{1}{2} \log p$, celle-ci sera ramenée à son logarithme tabulaire 0,3990899341775...

A partir de ce qui vient d'être exposé, on voit qu'il n'est pas difficile de déterminer une formule permettant de calculer la somme des logarithmes des nombres d'un intervalle d'amplitude quelconque que l'on aura voulu se donner.