Le calcul sexagésimal en Mésopotamie

Christine Proust,
Equipe REHSEIS

Texte provisoire

Introduction

Pour comprendre le calcul sexagésimal babylonien, la meilleure méthode est de suivre le programme et les méthodes d'enseignement des mathématiques dans les écoles de scribes de Mésopotamie. Comment les connaît-on ? Les élèves des écoles de scribes nous ont laissé une extraordinaire documentation, abondante, variée et complète, permettant de reconstituer avec précision quelques étapes de l'apprentissage. Cette documentation est constituée de milliers de « brouillons d'écoliers », c'est-à-dire des exercices écrits sur des tablettes d'argile destinées à être jetées ou recyclées. Des tablettes scolaires ont été retrouvées en grand nombre dans des fondations de maisons, des remblais, des sols, où elles étaient mélangées avec du matériau de construction. La documentation la plus importante provient de Nippur, la grande capitale culturelle de Mésopotamie, qui se trouve à la frontière entre le « Pays de Sumer », au sud, et le « Pays d'Akkad », au nord (à une centaine de km au sud de la Bagdad actuelle). On dispose ainsi d'une collection de presque un millier de tablettes ou fragments de tablettes d'exercices d'apprentissage des mathématiques. La majorité de ces tablettes ont été découvertes à la fin du 19ème siècle par une mission archéologique américaine, et se trouvent aujourd'hui conservées dans trois musées différents : Istanbul, Philadelphie et Jena. Elles forment un ensemble homogène : elles proviennent presque toutes du « quartier des scribes » de Nippur, et datent de la période paléo-babylonienne (début du deuxième millénaire avant notre ère). C'est sur cette collection que je vais m'appuyer pour exposer quelques unes des méthodes de calcul mésopotamiennes.
Cet article est accompagné de liens avec les sources cunéiformes mises en ligne par le CDLI (Cuneiform Digital Library Initiative, http://cdli.ucla.edu/). Merci de respecter scrupuleusement les droits de reproduction de ces images (http://cdli.mpiwg-berlin.mpg.de/CDLI/copyright.html).

Notations :
Cet article suit les règles de translittération des textes cunéiformes en vigueur :

[ ]	signe cassé ou effacé
⌜ ⌝	signe abîmé mais identifiable
!	sic (le signe identifié est fautif)

La translittération des idéogrammes sumériens est notée en caractères droits ; la translittération de l'akkadien est en italique.

a-ša$_3$ = champ en sumérien *eqlum* = champ en akkadien

Les signes cunéiformes sont transcrits en petits caractères quand la prononciation est connue, et en capitales quand la prononciation est incertaine dans le contexte considéré.

Exemples dans le contexte métrologique :

 ninda (unité de longueur d'environ 6 m)

 UŠ (unité de longueur d'environ 360 m)

Les numéros en indice permettent de distinguer les signes homophones, c'est-à-dire des signes de forme différente, mais de même prononciation.
Exemple :

 ra  ra_2

Chronologie

-2350	**Période d'Akkad**	Premiers textes mathématiques (calculs de surfaces)
-2110	**Période néo-sumérienne** **(Ur III)**	Tables numériques (inverses)
-2000	**Période paléo-babylonienne** **Dynasties d'Isin et de Larsa**	Développement des mathématiques dans les écoles de scribes
-1900	**Dynastie de Babylone** … Hammurabi (1792-1750) Samsu-Iluna (1749-1712) … Samsu-ditana (1625-1595)	Fin des écoles (-1739 à Nippur) Fin des archives cunéiformes (-1720 à Nippur)
-1600	**Période cassite**	
-900	**Période néo-babylonienne**	Réapparition des textes mathématiques astronomie
-300	**Période séleucide**	calcul numérique astronomie

Les mathématiques ont été enseignées dans les écoles de scribes au troisième millénaire avant notre ère, peut-être dès le règne de Sargon d'Akkad (2334-2279). Sous les dynasties sumériennes de la période dite d'Ur III, à la fin du troisième millénaire, les écoles se sont considérablement développées. Quelques textes mathématiques de cette période sont attestés (tables d'inverses notamment).
La majeure partie de notre documentation sur les mathématiques cunéiformes date de la période paléo-babylonienne, c'est-à-dire du début du deuxième millénaire. Elle est constituée de tablettes scolaires et d'un important *corpus* de textes érudits. Ces derniers se présentent en général sous la forme de suites de problèmes résolus, où dominent les problèmes du second degré, ou d'algorithmes de calcul numérique. Une bonne partie de ces tablettes ont été publiées dans la première moitié du XX° siècle par O. Neugebauer, F. Thureau-Dangin et A. Sachs. Contrairement aux tablettes scolaires élémentaires, les textes savants proviennent de fouilles clandestines et sont d'origine inconnue. Quelques collections découvertes après la deuxième Guerre Mondiale lors de fouilles officielles (Suse, Ešnunna, Tell Harmal) sont mieux documentées sur le plan archéologique.
La documentation cunéiforme en général et les textes mathématiques en particulier disparaissent presque totalement des sites de Mésopotamie du sud vers 1720 avant notre ère, avec l'effondrement brutal des grandes cités de l'ancien Pays de Sumer. Les causes de cette chute catastrophique ne sont pas connues avec certitude. Il s'agit probablement d'une

combinaison de facteurs politiques (invasions, conflit avec la tutelle de Babylone), écologiques (assèchement des canaux d'irrigation) et économiques (paupérisation).
On retrouve des textes mathématiques dans les grandes bibliothèques des époques tardives à Babylone, Uruk, Assur. Les textes de cette époque sont dominés par le calcul numérique. Cette nouvelle orientation accompagne un développement spectaculaire de l'astronomie mathématique.

Les textes scolaires de Nippur

Nippur

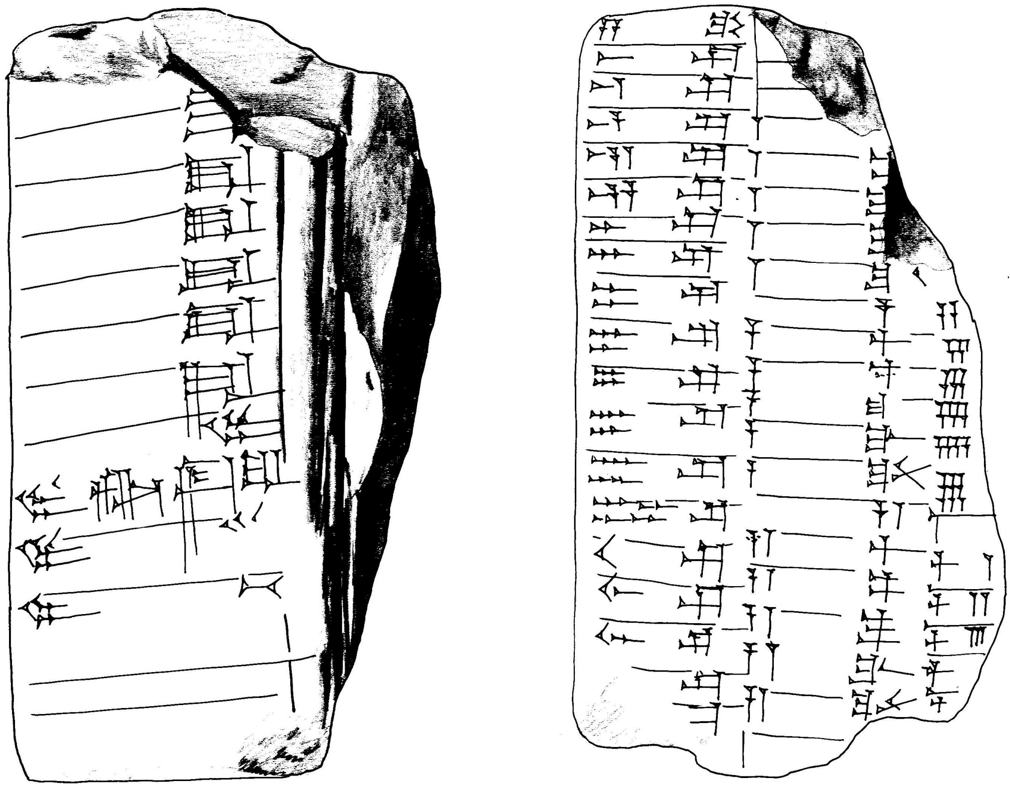
Nippur est la grande capitale religieuse et culturelle de la Mésopotamie antique. Son rôle politique est très important à la fin du troisième et au début du deuxième millénaire : ce sont les notables de Nippur qui accordent le titre de roi du « Pays de Sumer et d'Akkad ». Pourtant, cette cité n'a jamais été le siège de la royauté. Son gouvernement, où une « assemblée » semble avoir occupé une place centrale, est original et encore mal connu. Les activités judiciaires et scolaires constituent une part importante de la vie sociale de Nippur, réputée dans toute la Mésopotamie pour son tribunal et ses écoles. C'est le lieu par excellence de la transmission de l'héritage culturel sumérien. On y apprend le sumérien à une époque où il a disparu comme langue vivante au profit d'une langue sémitique venue du nord et de l'ouest, l'akkadien. Les tablettes découvertes dans le « quartier des scribes » de Nippur sont la principale source nous permettant aujourd'hui d'avoir accès à la littérature sumérienne.

Organisation de l'enseignement

L'enseignement se déroule en deux phases, qu'on distingue très nettement par l'aspect physique et le contenu des tablettes scolaires. Dans un premier niveau, appelé « élémentaire » par les assyriologues, les textes sont caractérisés par leur structure énumérative. Ce sont exclusivement des listes, aussi bien dans le domaine de l'écriture que des mathématiques. Le contenu de ces listes est assez uniforme dans toute la Mésopotamie, mais la typologie des tablettes peut varier notablement d'une école à l'autre. Dans un deuxième niveau dit « avancé », l'enseignement s'appuie sur des extraits de compositions littéraires, des calculs numériques et des calculs de surface.

La typologie des tablettes est un aspect extrêmement important de l'étude des textes scolaires. Elle donne des informations sur les méthodes d'enseignement, sur l'organisation du cursus, sur la structure des textes. Prenons un exemple. Les tablettes les plus utilisées au niveau élémentaire à Nippur sont de grandes tablettes à l'aspect caractéristique, dites de « type II » par les assyriologues. La face est partagée en 2 ou 3 colonnes. Sur la colonne de gauche se trouve un court extrait de liste lexicale ou mathématique, soigneusement écrit dans une graphie souvent archaïsante. Sur les autres colonnes, se trouvent des répliques plus maladroites. Il s'agit d'un modèle de maître et de copies d'élèves. L'extrait se termine parfois par une ligne d'appel, c'est-à-dire la première ligne de la liste suivante. Sur le revers, un texte assez long est écrit de façon plus cursive. Il s'agit de la restitution d'un texte appris dans les jours précédents et mémorisé. Ce type de tablette permet, par une étude statistique des textes de la face et du revers, de reconstituer l'ordre dans lequel les listes sont enseignées.

La tablette Ni 3913 ci-dessous, provenant d'une école de Nippur, est tout à fait typique. Sur la face, dans la colonne de gauche, la seule conservée, on voit un modèle de maître (liste de signes). La partie droite, sur laquelle l'élève s'est exercé à recopier la liste, a été effacée puis réécrite à plusieurs reprise. Il est fréquent que cette partie, amincie et fragilisée par ces copies successives, soit cassée net, comme elle l'est ici. Sur le revers, le scribe a inscrit une liste de mesures de capacité, qu'il avait apprise et mémorisée dans les jours ou mois précédents. Les colonnes du revers se succèdent de droite à gauche.



face revers

Figure 1 : Tablette scolaire de « type II », provenant de Nippur

Enseignement de l'écriture

Les listes destinées à l'enseignement de l'écriture et du sumérien sont constituées de plusieurs séries d'énumérations qui s'enchaînent les unes après les autres tout au long du parcours scolaire élémentaire, et sont probablement apprises par cœur. Ce sont, a peu près dans cet ordre :

- des syllabaires
- des vocabulaires classés selon des critères principalement thématiques
- des listes de signes élaborés, classés selon des combinaisons complexes de critères variés (graphiques, phoniques, thématiques)

Voir par exemple la tablette CBS 15401 (http://cdli.ucla.edu/dl/photo/P227835.jpg) de Nippur, contenant sur la face une liste de signes et sur le revers une liste thématique de noms d'animaux.

Ces listes constituent un ensemble de plusieurs milliers d'items, fortement structuré. Viennent ensuite les premières phrases sumériennes :

- proverbes
- modèles de contrats.

Enseignement élémentaire des mathématiques

Comme les textes d'apprentissage de l'écriture et du sumérien, les textes mathématiques sont constitués d'un ensemble de listes. A Nippur, les listes mathématiques sont les suivantes, dans l'ordre approximatif de leur enseignement :

- listes métrologiques (énumération de mesures de capacités, poids, surfaces, longueurs)
- tables métrologiques (énumération de mesures métrologiques avec conversions en nombre sexagésimal positionnel)
- tables numériques (inverses, multiplications, carrés)
- tables de racines (carrées et cubiques).

Après la phase élémentaire, consacrée à l'assimilation des systèmes métrologiques et des tables numériques, commence l'initiation au calcul. Celle-ci consiste pour l'essentiel à effectuer des multiplications, des divisions et des calculs de surface. La suite du cursus de Nippur est moins bien documentée.

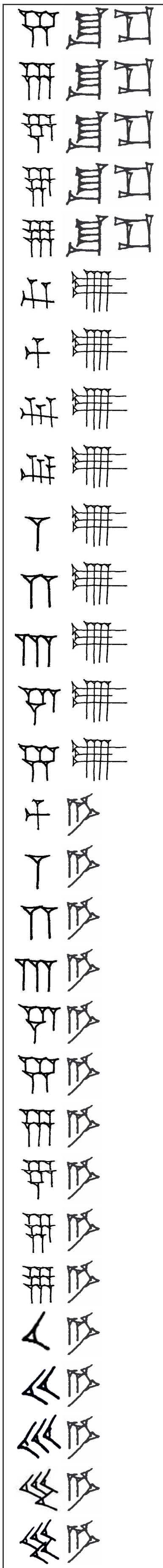
Systèmes métrologiques

Le système métrologique mésopotamien est, à l'époque paléo-babylonienne, remarquablement cohérent, homogène et stable. Ce système normalisé est le résultat d'une succession de réformes des poids et mesures qui a dû commencer avec Sargon d'Akkad (2334-2279) et s'est poursuivie pendant la $3^{\text{ème}}$ dynastie d'Ur (2112-2000). L'effort de normalisation est un trait caractéristique des politiques royales de la fin du troisième millénaire en Mésopotamie, et concerne aussi bien les lois et la métrologie que les autres instruments de pouvoir : écriture, comptabilité, calendriers. Dans le domaine de la métrologie, ces réformes s'efforcent de redéfinir de façon rationnelle un système unifié. Le rôle des écoles de scribes dans ce travail d'unification est fondamental. Le système métrologique normalisé issu des réformes de la fin du $3^{\text{ème}}$ millénaire, est constitué de plusieurs ensembles d'unités (sous-systèmes) pour les longueurs, les surfaces, les volumes, les capacités et les poids. L'ensemble de ces sous-systèmes est introduit dans l'enseignement de façon systématique par l'apprentissage des listes métrologiques. Ces listes permettent d'établir la terminologie et la structure de la métrologie scolaire : nom et écriture des unités de mesure, multiples et sous-multiples, articulation des systèmes numériques et métrologiques, principes de numération.

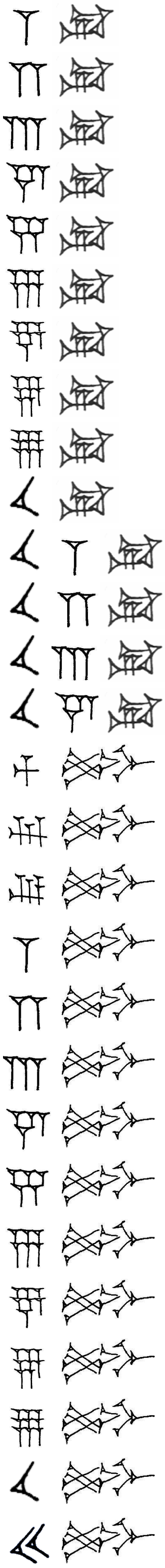
La liste métrologique des mesures de longueur se présente, par exemple, de la façon suivante.

Tableau 1 : liste métrologique de longueur

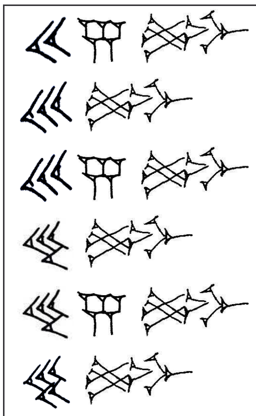
	1 šu-si	(≈ 17 mm)
	2 šu-si	
	3 šu-si	
	4 šu-si	



5 šu-si	
6 šu-si	
7 šu-si	
8 šu-si	
9 šu-si	
1/3 kuš$_3$	(1/3 kuš = 10 šu-si, donc 1 kuš = 30 šu-si ≈ 50 cm)
1/2 kuš$_3$	
2/3 kuš$_3$	
5/6 kuš$_3$	
1 kuš$_3$	
2 kuš$_3$	
3 kuš$_3$	
4 kuš$_3$	
5 kuš$_3$	
1/2 ninda	(1/2 ninda = 6 kuš, donc 1 ninda = 12 kuš ≈ 6 m)
1 ninda	
2 ninda	
3 ninda	
4 ninda	
5 ninda	
6 ninda	
7 ninda	
8 ninda	
9 ninda	
10 ninda	
20 ninda	
30 ninda	
40 ninda	
50 ninda	



1 UŠ (1 UŠ = 60 ninda ≈ 360 m)
2 UŠ
3 UŠ
4 UŠ
5 UŠ
6 UŠ
7 UŠ
8 UŠ
9 UŠ
10 UŠ
11 UŠ
12 UŠ
13 UŠ
14 UŠ
1/2 danna (1/2 danna = 15 UŠ, donc 1 danna = 30 UŠ ≈ 10,5 km)
2/3 danna
5/6 danna
1 danna
2 danna
3 danna
4 danna
5 danna
6 danna
7 danna
8 danna
9 danna
10 danna
20 danna



25 danna
30 danna
35 danna
40 danna
45 danna
50 danna

Cette liste, ainsi que les autres listes métrologiques, peuvent être considérées comme des descriptions extensives des unités de longueur, surface, poids, capacité. On peut les résumer de façon plus synthétique :

Longueurs

danna ←30— UŠ ←60— ninda ←12— kuš$_3$ ←30— šu-si

danna	UŠ	ninda	kuš$_3$	šu-si
10,5 km	360 m	6 m	50 cm	17 mm

Surfaces

GAN$_2$ ←100— sar ←60— gin$_2$ ←180— še

GAN$_2$	sar	gin$_2$	še
3600 m²	36 m²	0,6 m²	33 cm²

Poids

gu$_2$ ←60— ma-na ←60— gin$_2$ ←180— še

gu$_2$	ma-na	gin$_2$	še
30 kg	500 g	8 g	0,04 g

Capacités

gur ←5— bariga ←6— ban$_2$ ←10— sila$_3$ ←60— gin$_2$

gur	bariga	ban$_2$	sila$_3$	gin$_2$
300 l	60 l	10 l	1 l	17 ml

Remarques :
- Les équivalents en système métrique ne sont que des ordres de grandeur
- Certaines unités (gin et še) sont utilisées dans plusieurs systèmes. L'unité gin était à l'origine une unité de poids (1/60 de mine), mais elle a pris par la suite le sens plus général de « soixantième ».

Il existe plusieurs systèmes numériques associés aux différentes unités ; ces numérations sont toutes de principe additif. Leur présentation détaillée sera l'objet d'un prochain dossier. On peut dès maintenant se reporter à un article de J. Friberg, où ces systèmes sont présentés dans le cadre d'une intéressante controverse sur la date d'apparition de la numération positionnelle (Friberg, J.: 2005, 'On the Alleged Counting with Sexagesimal Place Value Numbers in

Mathematical Cuneiform Texts from the Third Millennium BC.' *CDLJ* 2005:2, http://cdli.ucla.edu/pubs/cdlj/2005/cdlj2005_002.html).

La série des listes métrologiques
Les listes métrologiques sont apprises les unes après les autres, et on les trouve partiellement reproduites sur des tablettes d'exercices. Mais il existe aussi de grandes tablettes récapitulatives, dites de « type I », où elles sont toutes entièrement écrites, toujours dans le même ordre :

- liste métrologique des capacités
- liste métrologique des poids
- liste métrologique des surfaces
- liste métrologique des longueurs

Tables numériques

Après l'étude des systèmes métrologiques, les apprentis scribes commencent l'initiation au calcul par l'apprentissage des tables numériques. De grandes tablettes récapitulatives de « type I » contiennent toutes les tables numériques usuelles, c'est-à-dire, dans cet ordre :

- la table d'inverses
- 38 tables de multiplication : 50, 45, 44.26.40, 40, 36, 30, 25, 24, 22.30, 20, 18, 16.40, 16, 15, 12.30, 12, 10, 9, 8.20, 8, 7.30, 7.12, 7, 6.40, 6, 5, 4.30, 4, 3.45, 3.20, 3, 2.30, 2.24, 2, 1.40, 1.30, 1.20, 1.15
- la table de carrés.

Il existe aussi des tables de racines carrées et de racines cubiques.

La tablette Ni 2733 (copie ci-dessous) est un exemple de table numérique exceptionnellement bien conservée.

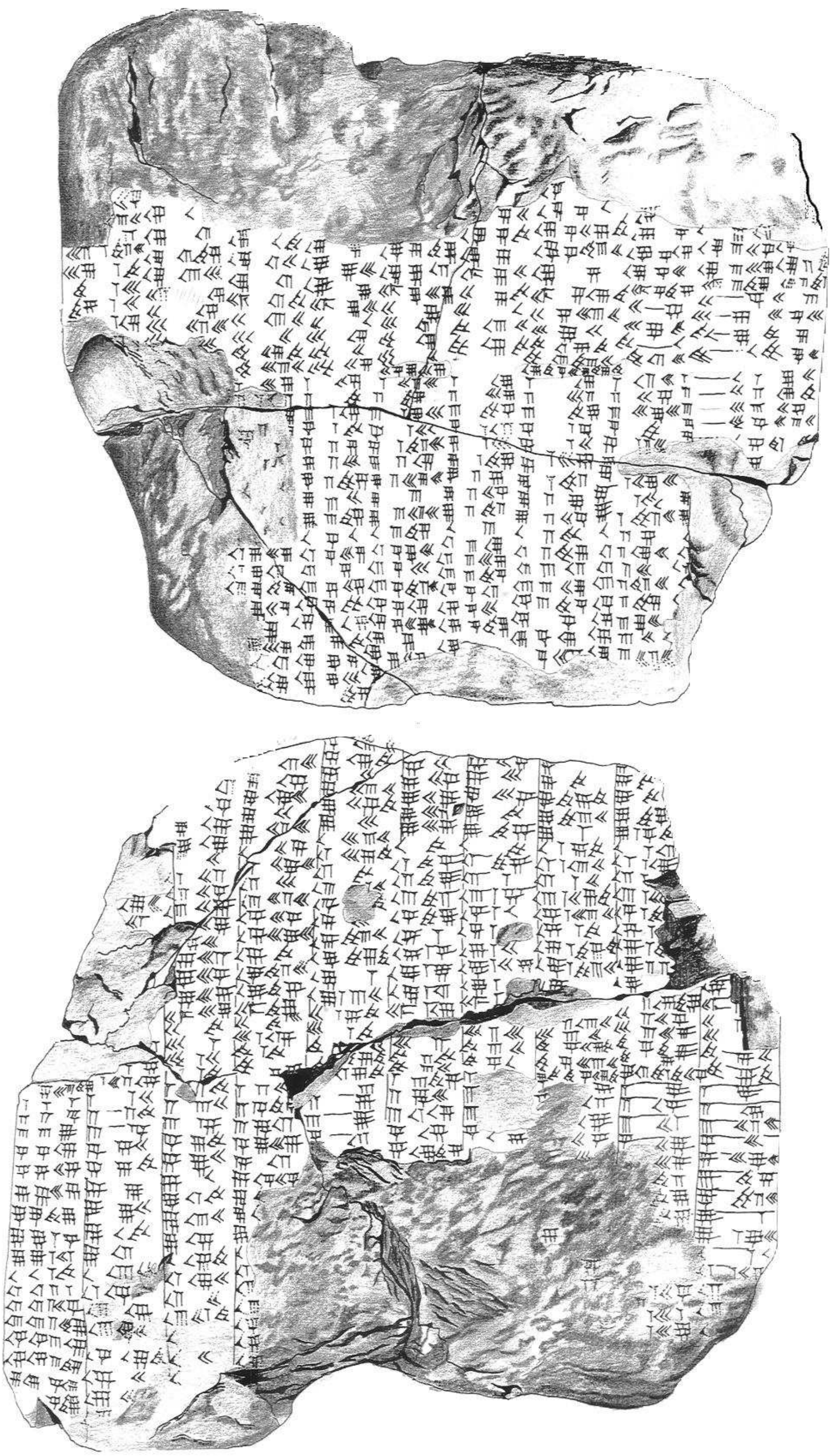


Figure 2 : Ni 2733, tablette de « type I » contenant toutes les tables usuelles, provenant de Nippur.

La numération sexagésimale positionnelle relative

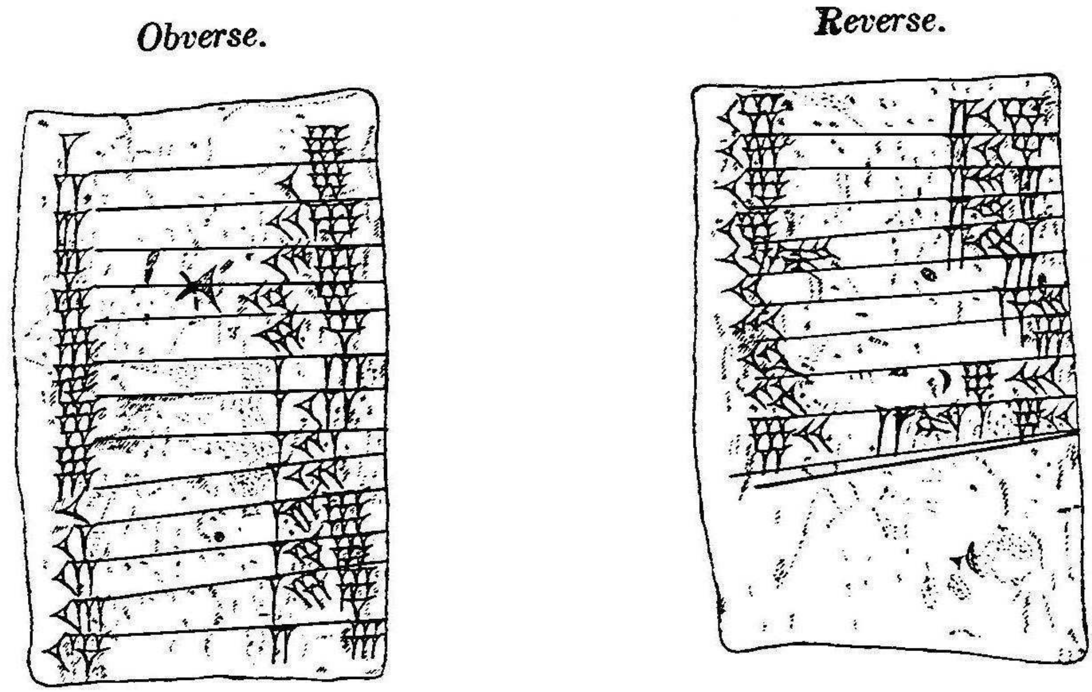
On voit apparaître dans ces tables un système numérique positionnel absent des listes métrologiques, exclusivement réservé aux textes mathématiques. Ces tables permettent donc aux élèves scribes d'assimiler à la fois les principes de la numération savante et les opérations de base. Voir par exemple quelques tables de multiplication : la tablette KM 89406, (http://cdli.ucla.edu/dl/photo/P235148.jpg), la tablette KM 89517 (http://cdli.ucla.edu/dl/photo/P235241.jpg), et la tablette HS 0217a, une petite table de multiplication par 9 provenant de Nippur et conservée à l'Université de Jena, dont la copie est reproduite ci-dessous.

Table de multiplication par 9

9 a-ra$_2$	1	9	( = a-ra$_2$ = fois)
a-ra$_2$	2	18	
a-ra$_2$	3	27	
a-ra$_2$	4	36	
a-ra$_2$	5	45	
a-ra$_2$	6	54	
a-ra$_2$	7	1.3	(base 60, principe de position)
a-ra$_2$	8	1.12	
a-ra$_2$	9	1.21	
a-ra$_2$	10	1.30	
a-ra$_2$	11	1.39	
a-ra$_2$	12	1.48	
a-ra$_2$	13	1.57	
a-ra$_2$	14	2.6	
a-ra$_2$	15	2.15	
a-ra$_2$	16	2.24	
a-ra$_2$	17	2.33	
a-ra$_2$	18	2.42	
a-ra$_2$	20-1	2.51	(à Nippur, 19 s'écrit 20-1)
a-ra$_2$	20	3	(l'ordre de grandeur est indéterminé)
a-ra$_2$	30	4.30	
a-ra$_2$	40	6	
a-ra$_2$	50	7.30	

Figure 3 : table de 9

Voici un exemple de table de 9 de type un peu différent. Dans la tablette HS 0217a, provenant de Nippur, la table de 9 est écrite en style abrégée (le terme « a-ra$_2$ » = « fois » n'est pas répété toutes les lignes, comme c'est le cas habituellement).



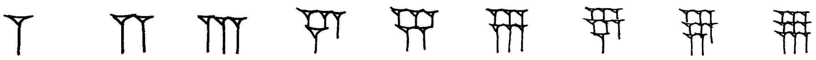
[Copie de H. Hilprecht, 1906, *Mathematical, Metrological and Chronological Tablets from the Temple Library of Nippur*, n°15, pl. 14].

Figure 4 : tablette HS 217a, Nippur

Cet exemple met en évidence les propriétés fondamentales de la numération sexagésimale positionnelle cunéiforme.

1) Il y a deux signes : 1 () et 10 ()

2) Il y a 59 « chiffres », écrits en répétant les 1 et les 10 autant que nécessaire (numération décimale additive)

unités : 

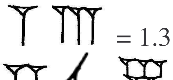
dizaines : 

Exemple :  = 59

3) La numération obéit à un principe de position à base 60 : une soixantaine s'écrit 1 en deuxième position.

Exemples :

 = 1.3 (1 soixantaine et 3 unités, soit 63 en numération décimale)

 = 2.15 (2 soixantaines et 15 unités, soit 135 en numération décimale)

4) Il n'y a pas de signe écrit pour indiquer l'ordre de grandeur, comme nous le faisons en écrivant des zéros en position finale ou une virgule, nous permettant par exemple de distinguer une unité (1), une dizaine (10), un dixième (0,1). Le signe  peut désigner le

nombre 1, ou 60, ou 1/60, ou toute puissance de 60 positive ou négative. Il en est de même pour tous les autres nombres :  peut désigner 2, ou 2×60, ou 2/60, etc.

Les nombres sont donc définis à un facteur 60^n près, n entier positif ou négatif. La numération mésopotamienne savante est donc **sexagésimale positionnelle relative**. Par exemple, le produit 9×20 de la table ci-dessus s'écrit 3, et non 3.0 comme nous le ferions dans une numération sexagésimale positionnelle absolue ; c'est un peu l'équivalent de ce que nous appelons aujourd'hui une écriture en « virgule flottante ». Cette propriété a été bien décrite par F. Thureau-Dangin, un des pionniers des mathématiques cunéiformes :

> *Ce système très abstrait, qui ne distinguait pas entre les entiers et les fractions, qui ignorait l'ordre de grandeur des nombres, servait aux opérations arithmétiques, notamment aux « igi-arê », c'est-à-dire aux « divisions et multiplications » qu'il facilitait grandement. La tablette dite de l'Esagil* [Ziggourat de Babylone ou "Tour de Babel"] *illustre parfaitement la méthode employée par les Babyloniens et montre comment, dans leurs calculs, ils passaient du concret à l'abstrait, puis revenaient de l'abstrait au concret.* [Thureau-Dangin, F.: 1932b, 'Nombres concrets et nombres abstraits dans la numération babylonienne.' *RA* 29, p. 116-119, p. 117].

A la suite de F. Thureau-Dangin, on retiendra le terme de « nombres abstraits » pour désigner ces nombres positionnels de valeur absolue non spécifiée, utilisés pour le calcul. Mais alors, que signifie l'égalité de deux expressions numériques dont l'ordre de grandeur est indéterminé ? En toute rigueur, les écritures suivantes peuvent paraître abusives :

$$2\times30 = 1$$
$$9\times20 = 3$$

Cependant, dans la mesure où le nombre 1 (ou le nombre 3), par exemple, est considéré non pas comme une quantité absolue, mais comme un ensemble de valeurs définies à un facteur 60^n près, cette écriture est acceptable. Elle simplifie considérablement la rédaction des commentaires sur les calculs cunéiformes, comme la suite de cet article le montrera. Ici, le signe « = » signifie : « s'écrit comme ». Mais dans une utilisation pédagogique des tablettes babyloniennes, il serait sans doute préférable de remplacer le signe « = » par un signe de congruence « ≡ ».

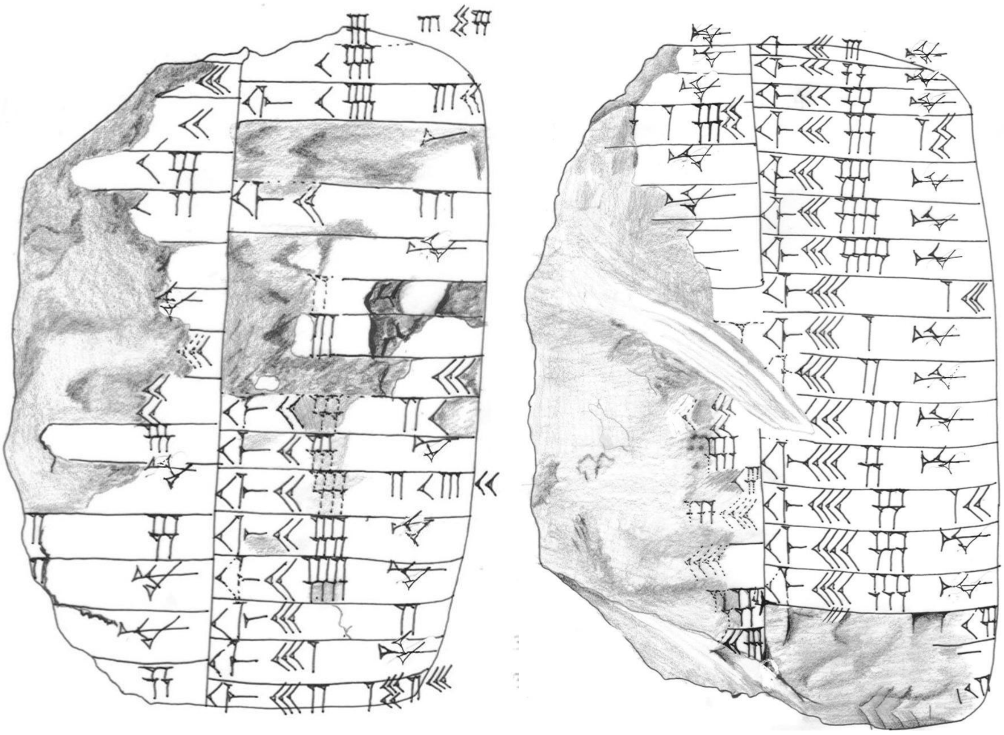
Ajoutons, et la remarque n'est peut-être pas tout à fait anodine, que cette conception « modulaire » des nombres est remarquablement adaptée à un traitement algorithmique des calculs (une calculette babylonienne, programmée avec le logiciel de calcul formel « Mathematica », sera prochainement mise en ligne).

Tables d'inverses

Reprenons le fil du déroulement de l'enseignement des mathématiques dans les écoles de scribes. La série des tables numériques commence par les tables d'inverses, qui jouent un rôle clé dans le calcul. Pour aborder cette question capitale, on observera d'abord un exemplaire de table d'inverses datant de la période néo-sumérienne (fin du troisième millénaire), puis un exemplaire de la période paléo-babylonienne (début du deuxième millénaire). Ces deux textes proviennent de Nippur, et l'évolution dont ils témoignent est révélatrice de la conception des nombres qui se met en place dans la tradition paléo-babylonienne.

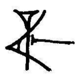
Une table d'inverses néo-sumérienne : Ist Ni 374

La copie ci-dessous est suivie de la translittération de la tablette. Les crochets signalent les parties détruites du texte, les demi-crochets signalent les signes abîmés.



face, colonne I			face, colonne II			revers, colonne III			revers, colonne IV		
[1-da igi 2 gal$_2$-bi]		30	[igi]	16	3.45	igi	33	nu	[igi	51]	nu
[igi	3]	20	igi	17	[nu]	igi	34	nu	[igi	52]	nu
[igi	4]	15	igi	18	3.20	igi	35	nu	[igi	53]	nu
[igi	5]	12	[igi	19]	⌜nu⌝	igi	36	1.40	[igi	54]	1.6.40
[igi	6]	10	igi	20	3	igi	37	nu	[igi	55]	nu
[igi	7]	nu	igi	21	nu	igi	38	nu	[igi	56]	nu
[igi	8	7].30	igi	⌜22⌝	[nu]	igi	39	nu	[igi	57]	⌜nu⌝
[igi	9	6].40	[igi]	⌜23⌝	[nu]	igi	40	1.30	[igi	58]	⌜nu⌝
[igi	10]	6	[igi	24	2].30	igi	41	nu	[igi	59	nu]
[igi	11]	nu	igi	25	⌜2.24⌝	igi	42	nu	[igi	1]	1
[igi	12]	5	igi	26	nu	igi	43	nu	[igi	1.4	56.15]
[igi	13]	nu	igi	27	2.13.20	igi	44	nu	[igi	1.12]	⌜50⌝
[igi	14]	nu	igi	28	nu	igi	45	1.20	[igi	1.15	4]8
[igi	15]	4	igi	29	nu	igi	46	nu	[igi	1.20]	⌜45⌝
			igi	30	2	igi	47	nu	[igi	1.21	44.2]6.40
			igi	31	nu	[igi	48	1].15	[igi	1.30]	40
			igi	32	1.52.30	[igi	49	nu]	[igi	1.36	3]7.30
						[igi	50	1].12	[igi	1.40]	36

Remarque : sur la tablette, les colonnes du revers se succèdent de droite à gauche ; sur la translittération, elles se succèdent dans l'ordre habituel de gauche à droite.



igi inverse

nu négation

Cette table contient deux types d'entrées. Premier type : igi 6 10 (inverse de 6 : 10) ; deuxième type : igi 7 nu (inverse de 7 : il n'y en a pas). Il existe donc deux sortes de nombres : ceux qui ont un inverse exact en base 60, et ceux qui n'en ont pas. Le sens mathématique de cette distinction est exposé ci-dessous. Les entrées de cette table incluent tous les nombres entiers à une position sexagésimale (2 à 59, puis 1), ainsi que quelques nombres particuliers à deux positions sexagésimales (les nombres qui ont des inverses, compris entre 60 et 100).

Tables d'inverses paléo-babyloniennes

Les tables d'inverses de Nippur (et du reste de la Mésopotamie) sont presque toutes identiques, et contiennent le texte suivant (ou une partie de ce texte lorsque la tablette est cassée).

1-da 2/3-bi	40-am_3 (de 1, ses 2/3 sont 40)
šu-ri-a-bi	30-am_3 (sa moitié est 30)
igi-2 gal_2-bi	30-am_3 (l'inverse de 2 est 30)

---

igi-3 gal_2-bi	20 (l'inverse de 3 est 20)
igi-4 gal_2-bi	15 (etc.)
igi-5 gal_2-bi	12
igi-6 gal_2-bi	10
igi-8 gal_2-bi	7.30
igi-9 gal_2-bi	6.40
igi-10 gal_2-bi	6
igi-12 gal_2-bi	5
igi-15 gal_2-bi	4
igi-16 gal_2-bi	3.45
igi-18 gal_2-bi	3.20
igi-20 gal_2-bi	3
igi-24 gal_2-bi	2.30
igi-25 gal_2-bi	2.24
igi-27 gal_2-bi	2.13.20
igi-30 gal_2-bi	2
igi-32 gal_2-bi	1.52.30
igi-36 gal_2-bi	1.40
igi-40 gal_2-bi	1.30
igi-45 gal_2-bi	1.20
igi-48 gal_2-bi	1.15
igi-50 gal_2-bi	1.12
igi-54 gal_2-bi	1.6.40

---

igi-1 gal_2-bi	1
igi-1.4 gal_2-bi	56.15
igi-1.21 gal_2-bi	44.26.40

Si on compare ce texte à celui de la table d'inverses néo-sumérienne précédente, on constate qu'il n'y a plus qu'un seul type de nombres : ceux qui « ont un inverse » (ou plus exactement, à développement sexagésimal fini). Cela reflète un phénomène général à Nippur : à l'époque paléo-babylonienne, le calcul se limite aux nombres inversibles. Cette préférence est due à une certaine conception de la division : diviser par un nombre, c'est multiplier par son inverse.

La notion d'inverse et la division

Définition des inverses :
Deux nombres forment une paire d'inverses si leur produit est 1 (ou toute autre puissance de 60, positive ou négative).
Exemples :
30 est l'inverse de 2 car 2×30 = 1 (on peut dire aussi : 1/2 heure, c'est 30 minutes)
15 est l'inverse de 4 car 4×15 = 1

7.30 est l'inverse de 8 car 8×7.30 = 1
44.26.40 est l'inverse de 1.21 car 1.21×44.26.40 = 1

Nombre régulier en base 60 :
Un nombre est régulier en base 60 s'il est inversible en base 60, c'est-à-dire si sa décomposition en facteurs premiers ne contient que des puissances de 2, de 3 et de 5.

La division :
Diviser un nombre *n* par un nombre *m* régulier en base 60, c'est multiplier *n* par l'inverse de *m*.
Exemple : 1.40 ÷ 7.30 = 1.40 × 8 = 13.20

Conversions

Quel est le rapport entre la métrologie et les tables numériques ? Les quantités mesurées (longueurs, surfaces, etc.) sont exprimées au moyen des nombres et unités de mesures énumérés dans les listes métrologiques. En revanche, les calculs (multiplications, divisions, puissances, racines) sont effectués exclusivement au moyen des nombres sexagésimaux positionnels utilisés dans les tables numériques. Pour réaliser les calculs de surface et de volumes, les scribes doivent convertir les grandeurs mesurées en nombres sexagésimaux positionnels, avec lesquels ils effectuent les opérations, puis convertir en sens inverses les résultats sexagésimaux positionnels en grandeurs mesurées. Ce va et vient entre mesure et calcul est assuré par une troisième série de textes, les tables métrologiques.

Pour la clarté de l'exposé, il a été fait ici une petite entorse à l'intention affichée en introduction : il est difficile de suivre pas à pas l'ordre pédagogique des écoles de scribes. En premier lieu, cet ordre n'est pas tout à fait clair : on ne sait pas exactement comment s'articulent l'apprentissage des listes métrologiques, des tables métrologiques et des tables numériques, ni si tous les scribes apprennent toutes ces listes et tables. La seule chose à peu près sûre est que la métrologie est enseignée avant la numération positionnelle et le calcul. En second lieu, il est pour nous plus facile d'introduire les systèmes de mesure, puis la numération savante, puis les mécanismes de passage de l'un à l'autre.

Les tables métrologiques sont constituées exactement des mêmes entrées que les listes, dans le même ordre. Mais, pour chaque mesure, un nombre sexagésimal positionnel est écrit en vis-à-vis. Les tables métrologiques sont donc des tables de conversion des mesures de capacité, poids, etc. en nombres positionnels. A quelle règle obéit cette correspondance ? Considérons par exemple la longueur de 1 ninda (6 m), une grandeur d'usage courant chez les scribes (la « canne » d'arpenteur standard mesure 1/2 ninda). Dans les tables, cette mesure correspond au nombre 1 :

1 ninda	1

Les autres valeurs numériques pour les longueurs s'en déduisent :

2 ninda	2
3 ninda	3

etc.

L'unité UŠ est égale à 60 ninda, donc la valeur numérique correspondante est soixante fois celle du ninda, soit 1. On lit dans les tables :

1 UŠ	1
2 UŠ	2

etc.

La table des surfaces se déduit de celle des longueurs. En effet, le sar, unité de surface, est un carré de côté 1 ninda. Le ninda correspond au nombre 1, donc le sar correspond à 1×1, c'est-à-dire à 1. Et le reste de la table des surfaces s'en déduit. Il en est de même pour les autres tables : l'ensemble forme un système cohérent. L'utilisation pratique de ce système dans les calculs de surface sera évoquée plus loin.

Exemples de tables métrologiques : poids, surfaces, longueurs

Table métrologique des poids

Remarque : cette section de la table des poids est aussi utilisée pour les surfaces (voir exercices de calcul des surfaces ci-dessous).

1 še	20
1 1/2 še	30
2 še	40
2 1/2 še	50
3 še	1
4 še	1.20
5 še	1.40
6 še	2
7 še	2.20
8 še	2.40
9 še	3
10 še	3.20
11 še	3.40
12 še	4
13 še	4.20
14 še	4.40
15 še	5
16 še	5.20
17 še	5.40
18 še	6
19 še	6.20
20 še	6.40
21 še	7
22 še	7.20
23 še	7.40
24 še	8
25 še	8.20
26 še	8.40
27 še	9
28 še	9.20
29 še	9.40
igi-6-gal$_2$ gin$_2$	10
igi-4-gal$_2$ gin$_2$	15
1/3 gin$_2$	20
1/2 gin$_2$	30
2/3 gin$_2$	40
5/6 gin$_2$	50
1 gin$_2$	1
1 1/3 gin$_2$	1.20
1 1/2 gin$_2$	1.30
1 2/3 gin$_2$	1.40
1 5/6 gin$_2$	1.50
2 gin$_2$	2
3 gin$_2$	3
4 gin$_2$	4
5 gin$_2$	5
6 gin$_2$	6

7 gin_2	7
8 gin_2	8
9 gin_2	9
10 gin_2	10
11 gin_2	11
12 gin_2	12
13 gin_2	13
14 gin_2	14
15 gin_2	15
16 gin_2	16
17 gin_2	17
18 gin_2	18
19 gin_2	19
etc.	

Table métrologique des surfaces

1/3 sar a-$ša_3$	20
1/2 sar	30
2/3 sar	40
5/6 sar	50
1 sar	1
2 sar	2
3 sar	3
4 sar	4
5 sar	5
6 sar	6
7 sar	7
8 sar	8
9 sar	9
10 sar	10
11 sar	11
12 sar	12
13 sar	13
14 sar	14
15 sar	15
16 sar	16
17 sar	17
18 sar	18
19 sar	19
20 sar	20
30 sar	30
40 sar	40
1 (ubu) GAN_2	50
1 GAN_2	1.40
etc.	

Table métrologique des longueurs

1 šu-si	10
2 šu-si	20
3 šu-si	30
4 šu-si	40
5 šu-si	50
6 šu-si	1
7 šu-si	1.10
8 šu-si	1.20
9 šu-si	1.30
1/3 $kuš_3$	1.40
1/2 $kuš_3$	2.30
2/3 $kuš_3$	3.20

5/6 kuš$_3$	4.10
1 kuš$_3$	5
2 kuš$_3$	10
3 kuš$_3$	15
4 kuš$_3$	20
5 kuš$_3$	25
1/2 ninda	30
1 ninda	1
2 ninda	2
3 ninda	3
4 ninda	4
5 ninda	5
6 ninda	6
7 ninda	7
8 ninda	8
9 ninda	9
10 ninda	10
20 ninda	20
30 ninda	30
40 ninda	40
50 ninda	50
1 UŠ	1
2 UŠ	2
3 UŠ	3
4 UŠ	4
5 UŠ	5
6 UŠ	6
7 UŠ	7
8 UŠ	8
9 UŠ	9
10 UŠ	10
etc.	

On peut donner une description synthétique des tables métrologiques, associant unités de mesures et nombre positionnel, analogue à celle qui a été proposée plus haut pour les listes métrologiques :

Longueurs

danna	←30—	UŠ	←60—	ninda	←12—	kuš$_3$	←30—	šu-si
30		1		1		5		10

Surfaces

GAN$_2$	←100—	sar	←60—	gin$_2$	←180—	še
1.40		1		1		20

Poids

gu$_2$	←60—	ma-na	←60—	gin$_2$	←180—	še
1		1		1		20

Capacités

gur	←5—	bariga	←6—	ban$_2$	←10—	sila$_3$	←60—	gin$_2$
5		1		10		1		1

Les tables métrologiques permettent de convertir des nombres mesurés en nombres positionnels, qu'on peut appeler « abstraits ». Dans le sens direct, la conversion est une simple « lecture » de la table (en fait, les tables étant très probablement mémorisées, il ne s'agit pas à proprement parler d'une lecture, mais plutôt d'une association mentale). Mais dans le sens inverse, c'est-à-dire du nombre abstrait au nombre mesuré, la correspondance n'est pas unique : le même nombre abstrait est associé à plusieurs mesures, qui diffèrent les unes des autres d'un ou plusieurs facteurs soixante. La conversion en nombre mesuré n'est donc praticable que si elle est accompagnée d'une évaluation mentale de l'ordre de grandeur du résultat attendu. Ce calcul mental est-il à la portée des scribes dans les diverses situations pratiques ou scolaires auxquelles ils sont confrontés ? Bien que l'exercice ne nous soit pas naturel, il n'est pas difficile de l'imaginer ni même de le pratiquer. En effet, des différences de l'ordre d'un facteur 60 sont suffisamment importantes pour limiter les risques de confusion. Dès lors qu'on associe des images mentales aux différentes mesures, cela ne pose en fait pas de problème. On trouve dans les sources scolaires des indices du fait que les apprentis scribes devaient être entraînés à ces évaluations. Les listes lexicales contiennent des sections composées d'énumérations de divers récipients, poids, cannes de roseau, cordes d'arpentage, champs, accompagnés de leur mesure. Ces séquences devaient contribuer à fixer quelques repères dans l'esprit des futurs calculateurs.

Initiation au calcul

Multiplication

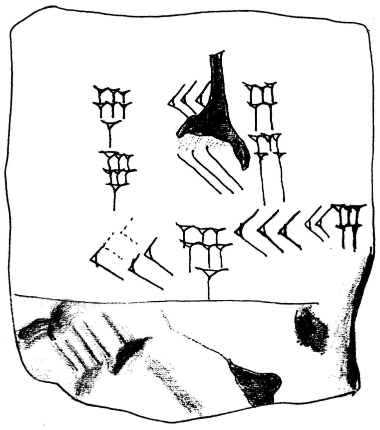
La technique de multiplication est la base de l'entraînement au calcul : à Nippur, les tables de multiplication représentent environ la moitié des textes mathématiques de niveau élémentaire ; parmi les exercices de niveau avancé, les multiplications représentent la moitié des exemplaires (18 sur 36).

Si on considère l'ensemble des documents scolaires où sont effectuées des multiplications (tables et exercices), on constate qu'ils sont tous purement numériques, qu'ils ne font intervenir que des nombres positionnels, et qu'ils ne mentionnent aucune unité de mesure : ils se situent en dehors de tout contexte métrologique. Dans un seul type d'exercice, examiné en détail au paragraphe suivant, le cadre numérique et le cadre métrologique sont juxtaposés sur une même tablette, mais soigneusement séparés par un large espace. Cette constatation donne une première indication sur la nature des multiplications dans les textes scolaires : celle-ci opère exclusivement sur des nombres positionnels. Les étapes du calcul proprement dit ne sont jamais inscrites sur les tablettes : seuls figurent les données initiales et le produit final. Or il existe de nombreux exemples où il est difficilement imaginable que le calcul mental puisse seul suffire à effectuer les nombreux produits et sommes intermédiaires nécessaires à la réalisation du calcul, même pour un scribe très entraîné.

Prenons un exemple : Ni 10246 est une tablette d'écolier de Nippur. Ce type d'exercice intervient dans le cursus juste après l'apprentissage des tables de multiplication : il s'appuie sur une bonne connaissance de ces tables, mais il s'adresse à des novices qui n'ont probablement pas les capacités de calcul mental suffisantes pour faire cette multiplication sans enregistrer les étapes intermédiaires. En effet, il faut décomposer le produit en 9 produits élémentaires appartenant au stock mémorisé (35x35 n'est pas dans les tables, donc 35 doit être lui-même décomposé en 30+5), mémoriser les 9 résultats ainsi que leur position, puis faire la somme.

		7	35
		7	35
		------	------
5×5			25
5×30		2	30
5×7		35	
30×5		2	30
30×30		15	
30×7	3	30	
7×5		35	
7×30	3	30	
7×7	49		
	------	------	
	57	30	25

Ni 10246, face (revers anépigraphe)



7.35
7.35
57.30.25

L'absence de calculs intermédiaires dans les multiplications a été remarquée souvent et c'est le principal argument qui a conduit certains auteurs à faire l'hypothèse de l'existence d'un instrument de calcul matériel. D'autres traces de cet « abaque » antique peuvent être repérés dans les erreurs de calcul, la terminologie des nombres, les listes lexicales.

Le exercices scolaires montrent donc que la multiplication opère exclusivement sur les nombres positionnels et qu'elle s'appuie sur les produits élémentaires donnés par les tables numériques et mémorisés.

Calcul de surface

Une série de petits exercices de Nippur montre comment le calcul des surfaces est enseigné. Deux exemples vont nous permettre de suivre les étapes de ce calcul. Ces tablettes carrées ont la forme typique des exercices de niveau avancé de Nippur, que les assyriologues désignent par « type IV ». Les deux tablettes analysées ici sont divisées en deux zones séparées par un espace vide. En bas à droite, on trouve un petit exercice sur le calcul de la surface d'un carré. Les données (côté du carré) ainsi que la réponse (surface du carré) sont exprimés au moyen des nombres mesurés, tels qu'ils apparaissent dans les listes métrologiques. Dans l'autre zone, en haut à gauche, on trouve les nombres sexagésimaux positionnels tells qu'ils sont donnés par les tables métrologiques, ainsi que la multiplication qui permet de trouver la réponse au problème.

CBS 11318

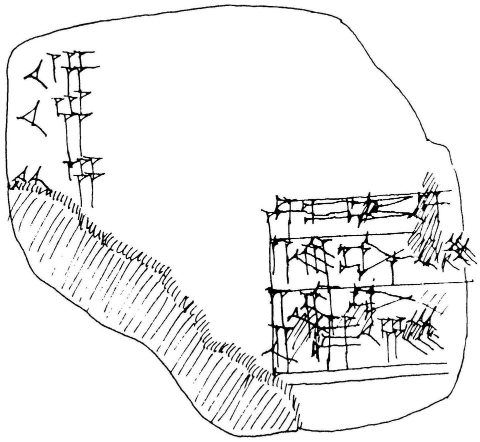


Figure 5 : CBS 11318, tablette scolaires de Nippur, calcul de surface (Neugebauer, O. & Sachs, A. J.: 1984, 'Mathematical and Metrological Texts.' *JCS* 36, p. 251).

Traduction

$5^{!}$
$5^{!}$
25

1 kuš$_3$ le côté (du carré)

Quelle est sa surface ?

Sa surface est
1/3 gin$_2$ 15 še

Note : il y a probablement une erreur du scribe dans les deux premières lignes. Il faut lire 5, et pas 15.

L'énoncé placé dans le coin inférieur droit donne le côté d'un carré : 1 kuš$_3$. L'ordre de grandeur est celui de la longueur d'une brique (environ 50 cm). Rappelons que le scribe connaissait par cœur ses tables métrologiques. Or, si on consulte la table métrologique des longueurs, on lit : 1 kuš$_3$ 5. Le petit calcul placé en haut à gauche donne précisément le carré de 5 : 5×5 = 25. Il faut garder en tête le fait que les dimensions du carré sont de l'ordre de grandeur de celles d'une brique, ce qui correspond à une surface de quelques še ou une fraction de gin$_2$. Dans cette zone de la table métrologique des surfaces, on lit :

1/3 gin$_2$ 20

Et, un peu plus haut :

15 še 5

Donc, au nombre 25 et pour l'ordre de grandeur d'une brique, correspond la surface: 1/3 gin$_2$ 15 še. C'est précisément cette réponse qui est donnée dans la dernière ligne du texte.

Tablette Ni 18

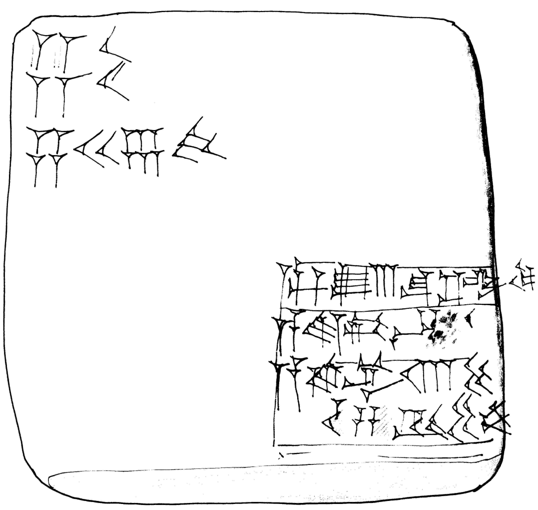


Figure 6 : Ni 18, Tablette scolaire de Nippur, calcul de surface

Traduction

2.10 2.10 4.26$^{!}$.40	
	1/3 kuš$_3$ 3 šu-si son côté -------------------- sa surface combien ? -------------------- sa surface 13 še igi-4$^{!}$ gal$_2$ še =============

Le calcul est analogue au précédent, mais il comporte plus d'erreurs.

Le scribe convertit le côté en nombre sexagésimal positionnel (nombre abstrait), en lisant la table métrologique des longueurs :

1/3 kuš$_3$ → 1.40
3 šu-si → 30

1/3 kuš$_3$ 3 šu-si → 2.10

Il calcule le produit en effectuant la multiplication sur les nombres abstraits :
2.10 × 2.10 = 4.26$^{!}$.40 (il a fait une erreur, en trouvant 4.26.40 au lieu de 4.41.40)

Il convertit le produit en mesure de surface, en lisant la table métrologique des surfaces:
4.20 → 13 še
6.40 → 1/4$^{!}$ še (il fait une deuxième erreur, légère, écrivant 1/4 au lieu de 1/3)

Il répond à la question: la surface est 13 gin$_2$ 1/4$^{!}$ še.

Ces exercices, et tous ceux de ce genre, montrent bien que les nombres abstraits ne sont utilisés que pour le calcul, et que les tables métrologiques permettent le va-et-vient entre nombres mesurés et nombres abstraits.

Calcul numérique avancé

Appuyées sur les bases du calcul sexagésimal tel qu'on peut le reconstituer en partie grâce aux exercices scolaires, les mathématiques savantes se sont développées dans plusieurs directions, dont les plus importantes sont les problèmes de nature algébrique et le calcul numérique. A cette dernière catégorie appartient la très fameuse tablette « Plimpton 322 », qui donne une liste de triplets pythagoriciens indépendants, certains nombres allant jusqu'à 8 positions sexagésimales. Cette tablette est gratifiée d'une abondante bibliographie, et n'a probablement pas encore livré tous ses secrets. On pourra lire par exemple, parmi les publications les plus récentes, « Words and Pictures: New Light on Plimpton 322 », une excellente étude de l'assyriologue et historienne des sciences Eleanor Robson (http://www.maa.org/news/monthly105-120.pdf).

Méthode de factorisation

On se limitera dans ce paragraphe à la présentation de deux textes. Le premier, CBS 1215, constitue probablement une des principales références à partir de laquelle sont fabriqués les exercices de calcul d'inverses de Nippur. Le deuxième, UET 6/2 222, est un exemple d'extraction de racine carrée provenant de l'école de scribes d'Ur. L'un et l'autre sont fondés sur une méthode de factorisation.

CBS 1215 : inversions et factorisation

La translittération ci-dessous est faite d'après celle de A. Sachs ('Babylonian Mathematical Texts 1.' *JCS* 1, 1947, p. 219-240) et la copie de E. Robson ('Mathematical cuneiform tablets in Philadelphia. Part 1 : problems and calculations.' *SCIAMVS* 1, 2000, p. 23). Quelques erreurs du scribe, signalées par un point d'exlamation, sont commentées ci-dessous. La translittération respecte autant que possible la disposition originale sur la tablette, y compris l'agencement des colonnes (remarquer que les colonnes de la face se succèdent de gauche à droite, tandis que celles du revers se succèdent de droite à gauche). Les styles de polices sont ajoutés pour mettre en valeur le résultat partiel de l'inversion (souligné), et le diviseur du nombre à factoriser (en gras).

colonne I	colonne II	colonne III
#1 2.**5** 12 **25** 2.24 28.48 1.15 **36** 1.40 2.5	#9 8.5**3.20** 18 **2.40** 22.30 6.**45** 1.20 **9** 6.40 8.53.20	6.**45** 1.20 **9** [6.40] 8.53.20 [2.2]2.13.[20]
#2 4.**10** 6 **25** 2.24 14.**24** 2.30 **36** 1 .40 4.10 #3 8.**20** 3 **25** 2.24 7.**12** 5 **36** 1.40 8.20	#10 17.4**6.40** 9 **2.40** 22.30 3.22.**30** 2 6.**45** 1.20 **9** 6.40 8.53.20 17.46.40	#14 4.44.2**6.40** [9] 4**2.40** 2[2.30] **16** 3.[45] 1.24.22.30 [12.3]9.22.**30** [2] [25.18].**45*** [16] **[6.45]** [1.20] **[9]** [6.40] [8].53.20 [2.22.13. 20] [4.44.26.40]
#4 1**6.40** 9 **2.30** 24 3.[**36**] [1.40] 6 10 15!.40 #5 3**3.20** 18 **10** 6 **1.48** 1.15 2.**15** 4 **8**! 6.40 26.40 33.20	#11 36!.2!**3.20** 18 10.**40** 1.[30] [**16**] 3.4[5] 5.37.30 [1.41.**1**]**5** 4 **[6.45]** 1.20 [**9**] 6.40 [8.53].20 [35.33].20	#15 [9.28].5**3.[20]** [18] 2.50.**40** [1.30] [4.**16]** [3.45] [16] [3.45] 14.3.[45] [2]1.5.3[7.30] [6.19.4]1.**15** [4] [25.18.**45**]* [16] [**6.45**] [1.20] [**9**] [6.40] [8.53.20] 2.[22.13.20] 9.[28.53.20]
#6 1.**6.40** 9 **10** 6 **54** 1.6.40 #7 [2].1**3.20** 18 **[40]** 1.30 [**27**] 2.13.20 #8 4.2**6.40** 9 **40** 1.30 13.**30** 2 **27** 2.13.20 4.26.40	#12 [1].11.**6.[40]** 9 10.**40** 1.[30] **16** 3.4[5] 5.37.30 50.37.**30** 2 1.41.**15** 4 **6.4[5]** 1.20 **9** 6.40 [8.5]3.[20] 35.33.20 1.11.6.40 #13 2.22.1**3.20** [18] 4**2.40** 22.30 **16** 3.45 1.24.22.30 25.18.**45*** [16]	#16 18.57.[4**6.40]** [9] [2.50.**40]** [1.30] 4.[**16]** [3.45] 16 [3.45] [14].3. [45] [21.5.37.30] [3.9.50.37.**30**] [2] [6.19.41.**15**] [4]

revers

<table>
<tr><th>colonne III</th><th>colonne II</th><th>colonne I</th></tr>
<tr>
<td rowspan="2">#21
10.6.48.5**3.20** 18
3.2.2.**40** 22.[30]
1.8.**16** 3.4[5]
4.**16** 3.[45]
16 3.[45]
1[4.3.4]5
52.44.[3.4]5
19.46.31.24.22.[30]
5.55.57.25.18.**4[5]** 16
1.34.55.18.**45*** 16
25.18.**45*** [16]
6.45 [1.20]
9 [6.40]
8.53.20
2.22.13. 20
37.55.33.20
10.6.48.53.20</td>
<td rowspan="2">#19
[2.31.42.1**3.20** 18]
[45.30.**40** 1.30]
[1.8.**16** 3.45]
[4.**16** 3.45]
16 [3.45]
14.[3.45]
5[2.44.3.45]
1.18[!].6.[5.37.30]
23.43.49.[41.**15**] [4]
1.[3]4.55.18.**45*** [16]
[25].18.**45*** 1[6]
[6].45 1.[20]
[9] 6.40
8.53.20
2.22.13.20
37.55.3[3.20]
2.31.42.13.[20]</td>
<td>[25.18.**45*** 16]
[6.45 1.20]
[9 6.40]
[8.53.20]
[2.22.13. 20]
[9.28.53.20]
[18.57.46.40]</td>
</tr>
<tr>
<td>#17
[37.55.3**3.20** 18]
[11.2**2.40** 22.30]
[4.**16** 3.45]
[16 3.45]
[14.3.45]
[5.16.24.22.30]
[1.34.55.18.**45*** 16]
[25.18.**45*** 16]
[6.45 1.20]
9 [6.40]
[8.53.20]
2.22.13.[20]
37.55.33.[20]</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>#20
5.3.24.2**6.40** [9]
45.30.**40** 1.30
1.8.**16** 3.45
4.**16** 3.45
16 3.45
14.3.45
5[2.44].3.45
1.19.6.5.37.30
11.51.54.50.37.**30** 2
23.43.49.41.**15** 4
1.34.55.18.**45*** 16
25.18.**45*** 16
6.45 1.20
9 6.[40]
8.53.20
2.22.13. 20
37.55.33.20
2.31.42.13.20
5.3.24.26.40</td>
<td>#18
1.15.51.**6.40** 9
11.2**2.40** 22.30
4.**16** 3.45
16 [3.45]
14.[3.45]
5.16.[24.22.30]
47.27.[39.22.**30** 2]
[1.34.55.18.**45*** 16]
[25.18.**45*** 16]
[6.45 1.20]
[9 6.40]
8.[53.20]
2.2[2.13. 20]
37.55.[33.20]
1.15.51.[6.40]</td>
</tr>
</table>

Erreurs

#4 : lire 16 au lieu de 15.
#5 : lire 9 au lieu de 8.
#11 : lire 35.33.20 au lieu de 36.23.20 (une dizaine en deuxième position est devenue une unité en première position) ; l'erreur n'est pas répercutée sur la suite : c'est une erreur de copie.
#19 : lire 19 au lieu de 18.

*Remarque

#13 à #21 : le diviseur est 3.45 (d'inverse 16) et non le nombre formé par les deux derniers chiffres ; en effet, celui-ci (8.45) est non inversible.

Examinons d'abord les entrées des 22 sections qui constituent ce texte. Ce sont les nombres 2.5, 4.10, 8.20, …, 10.6.48.53.20 : chaque entrée est le double de la précédente. Dans chaque section, un algorithme conduit à l'inverse du nombre initial ; puis l'algorithme est appliqué de nouveau, conduisant à l'inverse de l'inverse, c'est-à-dire au nombre initial : le premier et le dernier nombre de chaque case sont identiques.

Examinons maintenant le détail de l'algorithme, dans le cas de la section 7 (inversion de 2.13.20 = 2.5×2^6).

CBS 1215 #7			**commentaire**
2.1**3.20**		18	2.13.20 est divisible par 3.20 ; l'inverse de 3.20 est 18
			2.13.20 ÷ 3.20 = 2.13.20 × 18 = 40
40		1.30	l'inverse de 40 est 1.30
			2.13.20 = 40 × 3.20
	<u>27</u>		inverse (2.13.20) = inverse (40) × inverse (3.20)
			= 1.30 × 18
			= 27

Les propriétés exploitées ici sont :

- l'inverse d'un produit est le produit des inverses ;
- la divisibilité par un nombre régulier se voit sur les derniers chiffres.

D'autre part, la disposition des nombres permet de conduire le calcul avec sûreté, ce qui est particulièrement important dans les cas où l'algorithme est itéré (voir ci-dessous). Les facteurs du nombre à inverser sont posés à gauche, les facteurs de l'inverse sont posés à droite. Pour trouver l'inverse cherché, il suffit de multiplier entre eux les nombres posés à droite ; ces produits, effectués deux à deux, sont posés au centre des lignes. Cet exemple montre que la disposition du calcul est partie intégrante du calcul lui-même.

Itération de l'algorithme

CBS 1215 #20

5.3.24.2**6.40**	[9]	5.3.24.2**6.40** est divisible par **6.40** ; l'inverse de 6.40 est 9
		5.3.24.2**6.40** ÷ 6.40 = 5.3.24.26.40 × 9 = 45.30.40
45.30.**40**	1.30	45.30.**40** est divisible par **40 ;** l'inverse de 40 est 1.30
		45.30.**40 ÷** 40 = 45.30.40 **×** 1.30 = 1.8.16
1.8.**16**	3.45	1.8.**16** est divisible par 16 ; l'inverse de 16 est 3.45
		1.8.**16 ÷ 16** = 1.8.16 × 3.45 = 4.16
4.**16**	3.45	4.**16** divisible par 16 ; l'inverse de 16 est 3.45
		4.**16 ÷ 16** = 4.16 × 3.45 = 16
16	3.45	L'inverse de 16 est 3.45
		5.3.24.2**6.40 = 6.40** × **40** × **16** × **16** × **16**
		inv.(5.3.24.2**6.40**)= inv.(**6.40**)×inv.(**40**)×inv.(**16**)× inv.(**16**)×inv.(**16**)
		inv.(5.3.24.2**6.40**) = 9 × 1.30 × 3.45 × 3.45 × 3.45
14.3.45		3.45 × 3.45 = 14.3.45
5[2.44].3.45		14.3.45× 3.45 = 52.44.3.45
1.19.6.5.37.30		52.44.3.45× 1.30 = 1.19.6.5.37.30
11.51.54.50.37.**30**	2	1.19.6.5.37.30×9 = 11.51.54.50.37.30
23.43.49.41.**15**	4	
1.34.55.18.**45***	16	etc. (même algorithme pour l'inverse)
25.18.**45***	16	
6.45	1.20	
9	6.[40]	
8.53.20		
2.22.13. 20		
37.55.33.20		
2.31.42.13.20		
5.3.24.26.40		

On peut faire plusieurs remarques plus générales sur ces calculs. Une méthode élaborée est mise en œuvre pour trouver des résultats qui, certes, ne figurent pas dans les tables numériques élémentaires, mais sont connus d'avance : les scribes savent parfaitement qu'en doublant un nombre, on divise son inverse par 2 et que l'inverse de l'inverse est une opération blanche. Ces deux caractéristiques, résultat connu d'avance et algorithme en boucle, ne sont pas exceptionnels : on le trouve également dans la tablette UET 6-2 222 analysée ci-dessous. De toute évidence, ce genre de texte n'a pas la vocation de produire des résultats nouveaux, mais d'utiliser une méthode, la factorisation ; c'est peut-être une manière d'en tester la validité. Le texte de CBS 1215 porte sur la méthode elle-même plus que sur ses résultats.

UET 6/2 222 : racine carrée et factorisation

La translittération est basée sur celle de J. Friberg dans son étude des tablettes mathématiques de l'école d'Ur ('Mathematics at Ur in the Old Babylonian Period.' *Revue d'Assyriologie* n° 94, p. 98-188).

UET 6/2 222 [Friberg 2000, p. 108]			commentaire
	1.3.45		1.3.45 × 1.3.45 = 1.7.44.3.45
	1.3.45		
15	1.7.44.**3.45**	16	Racine carrée de 1.7.44.3.45 :
15	18.**3.45**	16	1.7.44.**3.45** est divisible par **3.45** ; l'inverse de 3.45 est 16 ; la racine carrée de 3.45 est 15.
17	4.49		1.7.44.**3.45** ÷ **3.45** = 1.7.44.**3.45** × 16 = 18.3.45
	3.45		18.**3.45** est divisible par **3.45** ; l'inverse de 3.45 est 16 ; la racine carrée de 3.45 est 15.
	1.3.45		18.**3.45** ÷ **3.45** = 18.3.45 × 16 = 4.49
			la racine carrée de 4.49 est 17
			1.7.44.3.45 **=** $15^2 \times 15^2 \times 17^2$
			rac. carrée (1.7.44.3.45) = 15 × 15 × 17
			les racines des facteurs (placés à gauche) sont multipliées de proche en proche :
			15 × 15 = 3.45
			3.45 × 17 = 1.3.45
			La racine carrée de 1.7.44.3.45 est 1.3.45.

On retrouve dans ce calcul certains aspects de CBS 1215 : une opération numérique (calcul du carré) est suivie de l'opération réciproque (calcul de la racine carrée) et le résultat final est identique à la donnée initiale ; la méthode de factorisation peut être appliquée à la recherche des racines carrées grâce à l'utilisation de la propriété « la racine d'un produit est égale au produit des racines ». Les racines carrées partielles sont posées à gauche.

Conclusion

L'analyse des tablettes scolaires mathématiques de Nippur met en évidence deux fonctions distinctes des nombres : quantifier et calculer. Dans notre tradition d'origine indo-arabe, ces deux fonctions sont assurées par une seule numération, décimale positionnelle, si bien que nous ne les distinguons pas toujours dans la pratique. La fusion est d'autant plus grande que le système métrique est lui-même calqué sur le système de numération. Les scribes babyloniens dissocient ces deux fonctions : il existe d'une part des nombres pour quantifier, en général de principe additif, utilisés en métrologie et dans les dénombrements, et d'autre part des nombres abstraits (sexagésimaux, positionnels, sans ordre de grandeur spécifié) pour calculer, plus précisément pour effectuer les multiplications et les divisions. Les calculs de surface et de volume nécessitent des va-et-vient entre les nombres mesurés et les nombres abstraits ; ces conversions sont assurées par les tables métrologiques. Le calcul sexagésimal positionnel proprement dit s'est aussi développé de façon autonome, hors de tout contexte métrologique ou pratique, donnant lieu à l'invention d'algorithmes élaborés.

Bibliographie

Bottéro, J.: 1987, *Mésopotamie, l'écriture, la raison et les dieux*. Paris.

Caveing, M.: 1994, *Essai sur le savoir mathématique dans la Mésopotamie et l'Egypte anciennes*. Presses Universitaires de Lille.

Friberg, J.: 1987-90, 'Mathematik.' *Reallexikon der Assyriologie* 7, p. 531-585.

Glassner, J.-J.: 2000, *Ecrire à Sumer. L'invention du cunéiforme*. l'Univers Historique, Seuil, Paris.

Hilprecht, H. V.: 1906, *Mathematical, Metrological and Chronological Tablets from the Temple Library of Nippur*. Babylonian Expedition vol. 20-1, Philadelphie.

Joannès, F., ed. 2001, *Dictionnaire de la civilisation mésopotamienne*. Bouquins. Paris: R. Laffont.

Kramer, S. N.: 1986, *L'histoire commence à Sumer*. (Arthaud, ed.).

Neugebauer, O.: 1935-37, *Mathematische Keilschrifttexte I-III*. Springer, Berlin.

Neugebauer, O.: réédition 1990, *Les sciences exactes dans l'antiquité*. Actes Sud.

Neugebauer, O. & Sachs, A. J.: 1984, 'Mathematical and Metrological Texts.' *Journal of Cuneiform Studies* 36, p. 243-251.

Nissen, H., Damerow, P. & Englund, R.: 1993, *Archaic Bookkeeping. Writing and Techniques of Economic Administration in the Ancient Near East*. Chicago.

Proust, C.: 2001, 'La multiplication babylonienne : la part non écrite du calcul.' *Revue d'histoire des mathématiques* 6, p. 1001-1011.

Ritter, J.: 1989. 'Babylone -1800 ; Chacun sa vérité', in M. Serres (ed.), *Eléments d'histoire des sciences*, Bordas, Paris, p. 39-61.

Robson, E.: 1999, *Mesopotamian Mathematics, 2100-1600 BC. Technical Constants in Bureaucracy and Education*. Oxford Editions of Cuneiform Texts vol. XIV, Clarendon Press, Oxford.

Robson, E.: 2001, 'The Tablet House: A Scribal School in Old Babylonian Nippur.' *Revue d’Assyriologie* 95, p. 39-66.

Thureau-Dangin, F.: 1932, *Esquisse d'une histoire du système sexagésimal*. Geuthner, Paris.

Thureau-Dangin, F.: 1936, 'Textes mathématiques babyloniens.' *Revue d’Assyriologie* 33-2, p. 65-84.

Tinney, S.: 1998, 'Texts, Tablets, and Teaching: Scribal Education in Nippur and Ur.' *Expedition* 40, p. 40-50.