La Géométrie entre mathématiques et sciences physiques

Rudolf Bkouche
Université des Sciences et Techniques de Lille
rbkouche@wanadoo.fr

Résumé

Lorsque nous disons que la géométrie élémentaire se situe au carrefour des sciences mathématiques et des sciences physiques, nous signifions d'une part que les objets de la géométrie ont une origine empirique, d'autre part que leur étude relève de la méthode déductive. En cela la géométrie élémentaire peut être considérée comme participant de la physique des corps solides. La géométrie élémentaire, sous la forme que lui a donnée Euclide, apparaît ainsi comme la première étude rationnelle de phénomènes naturels (les corps solides), devenant ainsi un modèle lorsque, avec la révolution scientifique du XVIIe siècle, la physique est devenue un chapitre des mathématiques[1], le développement de la physique s'inscrivant dans la continuité de l'œuvre euclidienne d'une part et d'autre part pouvant être considéré comme la réalisation du programme des *Seconds Analytiques*. Une telle conception implique que l'enseignement de la géométrie élémentaire participe à la fois de l'enseignement des sciences mathématiques et de l'enseignement des sciences physiques.

Introduction

Lorsque l'on parle des relations entre sciences mathématiques et sciences physiques, on ne peut oublier que les termes "mathématique" et "physique" ont changé de sens au cours de l'histoire et que l'étude de ces relations doit prendre en compte les raisons de ces changements. On peut comparer ainsi, aux deux bouts de l'histoire, les deux textes suivants, le premier d'Aristote et le second d'Einstein.
D'une part Aristote explique dans la *Physique* :

"… la géométrie, en effet, examine la ligne physique, mais pas en tant que physique, alors que l'optique étudie la ligne mathématique, non pas en tant que mathématique, mais en tant que physique ."[2]

ce qui laisse entendre un entremêlement entre le physique et le mathématique.
La distinction peut être précisée si l'on revient sur le sens des termes "mathématique" (μαθηματικην) et "physique" (φυσικησ) chez Aristote[3]. Le terme φυσικησ renvoie à la connaissance de la nature, c'est-à-dire aux objets de la connaissance empirique, le terme μαθηματικην renvoie à la connaissance scientifique, celle que nous atteignons par la démonstration[4]. Ainsi Aristote distingue l'objet physique donné par la connaissance empirique, ici la ligne considérée comme rayon lumineux, et l'objet mathématique qui intervient dans le discours démonstratif.

---

[1]On peut dire, en contrepoint, que les mathématiques sont un chapitre de la physique, point de vue exprimé par le mathématicien Vladimir Arnold (1998)
[2]Aristote, *Physique*, Chapitre 2, p. 123, 194 a
[3]Je dois ces remarques à Joëlle Delattre, historienne des mathématiques grecques. Je précise cependant que les conclusions que j'en tire n'engage que moi.
[4]Aristote, *Les Seconds Analytiques*, p. 8

Article publié en 2006 dans *Proceedings of 4th International Colloquium on the Didactics of Mathematics*, volume II, édité par M. Kourkoulos, G. Troulis, C. Tzanakis, Université de Crète, 2006. ISBN 960-88712-3-9

On peut alors considérer que c'est *via* l'activité de raisonnement que se constitue l'objet mathématique en tant qu'il se distingue de l'objet de la connaissance empirique. C'est donc la démonstration qui donne aux objets leur statut d'idéalité mathématique, autrement dit, y compris dans les mathématiques euclidiennes, c'est le discours qui modèle les objets. Il faut alors, pour éviter tout malentendu, distinguer entre la chose qui nous est donnée par la connaissance empirique et l'objet, lequel représente la chose *via* le discours.
D'autre part Einstein explique dans un article de 1921 :

"Pour autant que les propositions de la mathématique se rapportent à la réalité, elles ne sont pas certaines, et pour autant qu'elles sont certaines, elles ne se rapportent pas à la réalité"[5]

soulignant ainsi une certaine irréductibilité entre ce qu'il appelle la *"géométrie mathématique"*, laquelle est ici la construction hilbertienne, et la *"géométrie pratique"* qui relève de la connaissance du monde. Ici *"la mathématique"* renvoie au point de vue formaliste de Hilbert qui demande que le langage des mathématiques soit indépendant de toutes significations extérieures au discours mathématique, du moins sur le plan méthodologique. Cela renvoie à une double question :
- de quoi parlent les mathématiques ?
- quelles sont les raisons qui permettent aux mathématiques de nous apprendre sur le monde ?
Einstein revient plus loin sur le rôle d'une théorie géométrico-physique lorsqu'il écrit :

"Une théorie géométrico-physique est, à première vue, nécessairement privée du caractère intuitif ; elle est un simple système de concepts. Mais ces concepts servent à établir une connexion logique entre une multiplicité de phénomènes sensibles réels ou imaginés ? Rendre une théorie intuitive, cela signifie donc qu'il nous faut représenter cette plénitude de phénomènes dont l'ordre schématique est réalisé par la théorie"[6]

Reste alors la question : comment une théorie, privée de tout caractère intuitif, permet de construire une relation logique entre des phénomènes sensibles, c'est-à-dire qui nous sont données par l'expérience, cette dernière permettant, en retour, de rendre intuitive la théorie.

Que ce soit le point de vue aristotélicien ou que ce soit le point de vue d'Einstein, la question se pose du lien entre l'expérience sensible et les constructions intellectuelles qui permettent de la rendre intelligible. On peut alors développer deux conceptions
- celle de *la pureté* : les mathématiques sont une construction convenablement réglée mais arbitraire, pure création de l'esprit humain, qui permet cependant de représenter les phénomènes, ce qui renvoie à la *"déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences de la nature"* dont parle Wigner[7]
- celle du *mixte* : la perception, si elle puise sa source dans l'expérience sensible, n'est jamais pure de toute théorisation, de même que toute construction théorique n'est jamais pure au sens qu'elle puise dans l'expérience, lors même que le discours s'en détache.
Nous pouvons rapprocher cette seconde conception de celle de Gonseth qui écrit :

[5]Albert Einstein, "La Géométrie et l'Expérience" (1921) in *Réflexions sur l'électrodynamique, l'éther, la géométrie et la relativité*, p. 76
[6]*ibid*, p. 85
[7]E.P. Wigner, "The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences", *Comm. Pure and Applied Math.* 13, 1960, p. 1-14

Article publié en 2006 dans *Proceedings of 4th International Colloquium on the Didactics of Mathematics*, volume II, édité par M. Kourkoulos, G. Troulis, C. Tzanakis, Université de Crète, 2006. ISBN 960-88712-3-9

"Dans toute expérimentation il y a un résidu abstrait, et dans toute abstraction (mathématique), il y a un résidu intuitif." [8]

précisant :

"La distinction entre l'abstrait et l'expérimental n'est que de tendance, mais non d'essence."[9]

C'est cette seconde conception que nous nous proposons de développer dans ce texte.
On peut alors parler du caractère *mixte* de la géométrie, mixte au sens où celle-ci se situe au carrefour de la connaissance empirique et de la connaissance rationnelle. Mais cela nous amène à revenir sur la notion de *mathématiques mixtes* développée à l'époque classique, notion qui nous semble toujours actuelle si l'on veut comprendre la force des mathématiques dans l'étude du réel, ou plutôt de la part du réel qui s'y prête.

Des mathématiques mixtes

La distinction "mathématiques pures/mathématiques mixtes" a été introduite par Francis Bacon dans sa *Grande Restauration des Sciences*[10] et reprise par D'Alembert dans la classification des sciences qu'il propose à la fin du *Discours Préliminaire à l'Encyclopédie*[11].
Nous lisons à l'article "Mathématiques" de l'*Encyclopédie* de D'Alembert et Diderot :

"Les Mathématiques se divisent en deux classes ; la première, qu'on appelle Mathématiques pures, considère la propriété de la grandeur d'une manière abstraite : or la grandeur sous ce point de vue, est ou calculable, ou mesurable : dans le premier cas, elle est représentée par des nombres ; dans le second cas par l'étendue ; dans le premier cas les Mathématiques pures s'appellent Arithmétique ; dans le second, Géométrie.
La seconde classe s'appelle Mathématiques mixtes ; elle a pour objet les propriétés de la grandeur concrète, en tant qu'elle est mesurable ou calculable ; nous disons de la grandeur concrète, c'est-à-dire de la grandeur envisagée dans certains corps ou sujets particuliers."[12]

D'Alembert, qui est l'auteur de l'article "Mathématiques", précise ensuite :

"Du nombre des Mathématiques mixtes, sont la Méchanique, l'Optique, l'Astronomie, la Géographie, la Chronologie, l'Architecture militaire, l'Hydrostatique, l'Hydraulique, l'Hydrographie ou Navigation, etc."

Dans l'article "Mathématiques", D'Alembert se contente de citer les grandes divisions des Mathématiques mixtes sans entrer plus avant dans leur définition et renvoie au *Discours Préliminaire*[13] pour plus de précision. La question se pose alors de ce qui caractérise les mathématiques mixtes : en quoi sont-elles mathématiques ? que signifie le terme *mixtes* opposé au terme *pures* ?

---

[8]Ferdinand Gonseth, *Les Fondements des Mathématiques*, p. 107
[9]*ibid*. Dans ce premier ouvrage Gonseth semble ne pas distinguer entre l'empirique (le sensible) et l'expérimental. Dans ses écrits ultérieurs, il précisera cela en explicitant les trois aspects de la connaissance, l'intuitif, le théorique ou le rationnel, l'expérimental.
[10]Francis Bacon, *Grande Restauration des Sciences* in *Œuvres philosophiques, morales et politiques*, p. 103
[11]Jean Le Rond D'Alembert, *Discours Préliminaire de l'Encyclopédie*, p. 177-182. D'Alembert y rappelle la classification de Bacon p. 171-175
[12]*Encyclopédie Méthodique, Mathématiques*, tome second, p. 366
[13]Jean Le Rond D'Alembert, *Discours Préliminaire de l'Encyclopédie*, p. 163-164 et 181

Article publié en 2006 dans *Proceedings of 4th International Colloquium on the Didactics of Mathematics*, volume II, édité par M. Kourkoulos, G. Troulis, C. Tzanakis, Université de Crète, 2006. ISBN 960-88712-3-9

Le terme *mixtes* laisse entendre une part de connaissance empirique dans la définition des objets des mathématiques mixtes ; on peut alors essayer d'expliciter l'opposition pures/mixtes *via* les termes *abstrait* et *concret* utilisés dans le texte de l'Encyclopédie : les mathématiques pures étudient la grandeur en tant qu'elle est considérée comme abstraite alors que les mathématiques mixtes s'intéressent aux grandeurs concrètes, ce qui ne fait que repousser la question. D'autant que D'Alembert explique le rôle de l'abstraction dans la construction de la science, écrivant :

"L'abstraction en effet n'est autre chose que l'opération par laquelle nous considérons dans un objet une propriété particulière, sans faire attention aux autres."[14]

L'abstraction s'inscrit ainsi dans une problématisation, c'est-à-dire dans un ensemble de questions que nous nous posons lorsque nous sommes confrontés à des situations que nous nous efforçons de comprendre, questionnement qui conduit à expliciter les propriétés que nous nous proposons d'étudier à propos de cette situation. L'abstraction (l'acte d'abstraction) est ainsi constitutive de toute connaissance scientifique.
Revenant à la part de connaissance empirique intervenant dans la définition de la grandeur concrète, on peut alors poser la question : pourquoi la géométrie est-elle classée parmi les mathématiques pures alors que la mécanique est classée parmi les mathématiques mixtes ? Pour préciser cette question nous reviendrons aux articles "Géométrie" et "Méchanique" de l'Encyclopédie, articles tous deux écrits par D'Alembert.

"Géométrie est la science des propriétés de l'étendue en tant qu'on la considère comme étendue et figurée."[15]

Dans les lignes qui suivent, D'Alembert rappelle l'étymologie du terme *géométrie* et par conséquent l'origine empirique du domaine de la connaissance défini par ce terme. La géométrie est ainsi définie comme provenant de l'abstraction de connaissances empiriques antérieures, reste alors à expliciter le mode d'abstraction qui conduit de la géométrie empirique à la géométrie mathématique et le rôle joué par la démarche hypothético-déductive. La définition même de la géométrie donnée par D'Alembert prend en charge ce processus d'abstraction, processus que l'on peut considérer au XVIIIème siècle comme achevé. C'est en ce sens que la géométrie, devenue science des propriétés de cette entité *abstraite* qu'est l'étendue, participe, selon D'Alembert, des mathématiques pures.

"Méchanique, partie des mathématiques mixtes, qui considère le mouvement et les forces motrices, leur nature, leurs lois et leurs effets dans les machines"[16]

La part d'empirisme est ici donnée par le mouvement[17] ; c'est donc le mouvement qu'il faut mathématiser, c'est-à-dire inscrire dans un discours démonstratif, ce qui permettra de réduire la mécanique à une théorie hypothético-déductive analogue à la géométrie rationnelle telle qu'elle est exposée dans les *Eléments* d'Euclide. Ce sera l'objet des *Principia* de Newton.

[14]Jean Le Rond D'Alembert, *Essai sur les Eléments de Philosophie*, p. 29
[15]*Encyclopédie Méthodique, Mathématiques*, tome second, p. 128
[16]*ibid*. p. 370
[17]Le terme "mouvement" est pris ici dans son sens global, comprenant les aspects cinématiques et les aspects dynamiques, aspects qui ne sont pas distingués à l'époque comme on peut le voir dans le *Traité de Dynamique* de D'Alembert. La distinction sera explicitée au XIXème siècle par Ampère qui introduit le terme "cinématique" qu'il définit comme l'étude du mouvement indépendamment des forces qui peuvent les produire (Ampère, *Essai de Philosophie des Sciences* (1834), p. 52).

Article publié en 2006 dans *Proceedings of 4th International Colloquium on the Didactics of Mathematics*, volume II, édité par M. Kourkoulos, G. Troulis, C. Tzanakis, Université de Crète, 2006. ISBN 960-88712-3-9

D'Alembert continue ainsi l'œuvre de Newton, mais chez Newton il s'agit moins de distinguer une géométrie qui relèverait des mathématiques pures, c'est-à-dire de la seule connaissance abstraite, et une mécanique plus "concrète" qui participerait du mixte ; la géométrie participe d'une mécanique universelle comme l'explique l'auteur des *Principia* dans la préface de l'ouvrage :

"Geometry does not teach us to draw these lines (right lines and circles), but requires that the learner should first be taught to describe these accurately before he enters upon geometry, then it shows how by these operations problems may be solved. To describe right lines and circles are problems, but no geometrical problems. The solutions of these problems is required from mechanics, and by geometry the use of them, when so solved, is shown; and it is the glory of geometry that from those few principles brought from without, it is able to produce so many things. Therefore geometry is founded in mechanical practice, and is nothing but the part of universal mechanics which accurately proposes and demonstrates the art of measuring."[18]

Newton distingue alors la géométrie comme science de la grandeur (*magnitude*) des corps et la mécanique comme science du mouvement des corps.
Mais si, selon Newton, ces deux sciences, la géométrie et la mécanique, s'appuient sur une connaissance empirique (la notion de corps) et dans la mesure où la première s'inscrit dans une mécanique universelle, en quoi participent-elles, selon d'Alembert, de mathématiques différentes ?
Ces remarques nous montrent la difficulté de la distinction pures/mixtes. Mais peut-être faut-il voir dans le classement de la géométrie dans les mathématiques pure l'effet de la tradition. La géométrie rationnelle a suffisamment d'ancienneté et par conséquent de prestige pour apparaître, même aux mathématiciens empiristes du XVIIIème siècle, comme libérée de ses origines empiriques.
On pourrait dire que la géométrie a acquis le privilège de participer des mathématiques pures alors que la mécanique n'a pas encore atteint, au milieu du XVIIIème siècle, l'état de pureté. On pourrait ajouter que cet état est atteint avec Lagrange et que la *Mécanique Analytique* est un traité de mathématiques pures. Pourquoi pas ? à cela près que la mécanique devient un chapitre des mathématiques à la fois en se dé-géométrisant et en se dé-mécanisant[19]. Se pose alors une nouvelle question : comment se détermine le passage, si passage il y a, de l'état de mathématiques mixtes à celui de mathématiques pures ?

Géométrie mathématique et géométrie physique

La double distinction entre sciences mathématiques et sciences physiques rappelée au début de ce texte montre que la distinction entre géométrie mathématique et géométrie physique s'est transformée au cours de l'histoire en même temps que les significations des termes "mathématique" et "physique".
Le premier moment de cette histoire est celui de la distinction aristotélicienne entre une géométrie rationnelle et une géométrie pratique. Ces deux géométries participent cependant du même domaine de la connaissance, celle des corps solides, l'une s'appuyant sur la connaissance empirique alors que l'autre s'appuie sur ce que l'on pourrait appeler une reconstruction rationnelle de la partie du monde qu'elle étudie. En ce sens la géométrie est "une".

[18]Isaac Newton, *Principia*, volume one, p. xvii
[19]On peut considérer qu'avec Lagrange les mathématiques commencent à se libérer de l'emprise de la géométrie qui caractérise les mathématiques grecques.

Article publié en 2006 dans *Proceedings of 4th International Colloquium on the Didactics of Mathematics*, volume II, édité par M. Kourkoulos, G. Troulis, C. Tzanakis, Université de Crète, 2006. ISBN 960-88712-3-9

Cette unité sera remise en question avec l'apparition des géométries non-euclidiennes. On peut considérer cette apparition (découverte ou invention !!!) comme une réponse à l'impossibilité de démontrer le postulat des parallèles[20]. C'est cette impossibilité qui conduira à revenir sur les origines empiriques de la géométrie comme l'explique Gauss dans une lettre à Olbers en 1817 :

"J'en viens de plus en plus à la conviction que la nécessité de notre géométrie ne peut pas être démontrée, ou du moins qu'elle ne peut pas l'être par la raison humaine ni pour la raison humaine. Peut-être atteindrons-nous, dans une autre existence, une compréhension de la nature de l'espace qui nous est maintenant inaccessible. Jusque là, il ne nous faut pas mettre la géométrie au même rang que l'arithmétique dont la vérité est purement a priori, mais plutôt au même rang que la mécanique"[21]

Jusqu'alors, et les textes de D'Alembert cités ci-dessus nous le rappellent, la géométrie est considérée comme une science rationnelle pure. Le corpus euclidien a permis d'oublier l'origine empirique des objets qu'il étudie pour ne laisser apparaître que l'organisation interne du développement ; que la géométrie permette d'étudier des propriétés du monde n'est que la marque du succès de cette science qui permet, selon la tradition platonicienne, d'accéder aux idéalités cachées derrière les phénomènes mondains. C'est cette purification de la géométrie qui conduisait d'Alembert à oublier le caractère mixte de la géométrie.
L'existence de géométries non-euclidiennes, en imposant l'idée d'une multiplicité de géométries, remettait en question le caractère "mathématiques pures" de la géométrie en posant un double problème :
- un problème logique : les bases intuitives du raisonnement euclidien que représente l'appréhension des figures disparaissent, ce qui oblige à repenser le raisonnement euclidien.
- un problème physique : parmi cette multiplicité de géométries, laquelle est la géométrie du monde ?

Une nouvelle distinction apparaissait ainsi entre une géométrie mathématique qui devenait l'étude *des* géométries et une géométrie physique considérée comme l'étude des propriétés géométriques de l'espace physique, ce que Reichenbach expliquera plus tard de la façon suivante :

"Mathematics reveals the possible spaces ; physics decides which among them corresponds to physical space"[22]

On peut alors noter une double interprétation du terme *"decides"*. Soit l'espace physique a une structure géométrique déterminée et le physicien doit découvrir cette structure parmi les possibles, c'est le point de vue de Riemann qui, après avoir étudié le concept général d'espace, conclut son article "Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie" en renvoyant à l'expérience[23]. Soit la structure est déterminée par le physicien pour rendre compte des phénomènes ce qui nous renvoie au conventionnalisme de Poincaré[24]. La préface de Carnap laisse entendre que c'est la seconde interprétation qu'il faut lire :

---

[20]Sur l'histoire des tentatives de démonstration du postulat des parallèles, nous renvoyons à la somme de Jean-Claude Pont, *L'Aventure des Parallèles*.
[21]cité et traduit par Ferdinand Gonseth in *La Géométrie et le Problème de l'Espace*, volume VI, "Le Problème de l'Espace", p. 94
[22]Hans Reichenbach, *The Philosophy of Space and Time*, p. 6
[23]Bernhart Riemann, "Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie" (traduction Jules Houël), in *Oeuvres Mathématiques*, p. 280-299
[24]Henri Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, p. 74-76 et 88-91

Article publié en 2006 dans *Proceedings of 4th International Colloquium on the Didactics of Mathematics*, volume II, édité par M. Kourkoulos, G. Troulis, C. Tzanakis, Université de Crète, 2006. ISBN 960-88712-3-9

"In physical geometry, there are two possible procedures for establishing a theory of physical space. First, the physicist may freely choose the rules for measuring length. After this choice is made, the question of the geometrical structure of physical space becomes empirical ; it is to be answered on the basis of the results of experiments. Alternatively, the physicist may freely choose the structure of physical space ; but he must adjust the rules of measurement in view of the observational facts."[25]

La géométrie physique est ainsi moins la description de la réalité qu'une représentation de cette réalité. En ce sens elle est le produit de l'activité de l'esprit humain confronté au monde extérieur et par conséquent ressortit encore des sciences mathématiques dont elle n'est qu'un chapitre particulier. La géométrie élémentaire n'est alors que le premier moment de ce chapitre.
Si les mathématiques sont le paradigme des sciences déductives[26], on peut considérer la géométrie physique, et plus généralement les divers chapitres de la physique mathématique, comme cette partie des mathématiques qui se propose de construire une théorie hypothético-déductive du réel, ou plutôt d'une partie bien délimitée du réel. Cette construction a un double aspect, d'une part elle puise dans les mathématiques déjà constituées, d'autre part elle conduit à construire de nouveaux domaines des mathématiques, ainsi le calcul différentiel pour étudier le mouvement. Il faut cependant noter d'abord que ces deux aspects s'entremêlent, ensuite que les mathématiques fabriquées pour étudier une situation donnée peuvent s'émanciper des problématiques originales ; ainsi la géométrie projective issue des problèmes de représentations perspectivistes est devenue une théorie mathématique indépendante de la perspective, capable ensuite d'intervenir dans des domaines *a priori* étrangers aux problématiques qui lui ont donné naissance[27].

Les trois moments de l'histoire de la géométrie physique

On peut ainsi distinguer trois moments dans l'histoire de la géométrie physique au sens que nous avons donné à ce terme ci-dessus.

Le premier moment est le moment euclidien, celui de la géométrie "une" qui ne distingue pas entre une géométrie mathématique consacrée à l'étude d'idéalités, et une géométrie mondaine. Si les idéalités nous permettent de parler du monde, c'est soit parce qu'elles appartiennent à une réalité supérieure dont le monde sensible n'est qu'une représentation dégradée (point de vue platonicien), soit qu'elles soient des abstractions élaborées par l'esprit humain pour comprendre le monde (point de vue empiriste). Le rôle de la géométrie, en tant que science rationnelle, est alors de connaître les vérités du monde *via* la démonstration, c'est-à-dire *via* un discours convenablement réglé ; c'est ce que nous appelons la méthode hypothético-déductive qui, à partir de vérités connues, se propose de découvrir de nouvelles vérités.
C'est ce point de vue d'une découverte rationnelle de la vérité qu'explicite Legendre lorsqu'il écrit au début de ses *Eléments de Géométrie* :

*"**Axiome** est une propriété évidente par elle-même.*
***Théorème** est une vérité qui devient évidente au moyen d'un raisonnement appelé **dé-monstration**."*[28]

---

[25]Hans Reichenbach, *The Philosophy of Space and Time*, p. vi
[26]la *mathesis universalis* de l'époque classique.
[27]Nous pouvons citer l'intervention de la géométrie projective dans la cinématique et la géométrie du mouvement.
[28]Adrien-Marie Legendre, *Eléments de Géométrie*, p. 4

Article publié en 2006 dans *Proceedings of 4th International Colloquium on the Didactics of Mathematics*, volume II, édité par M. Kourkoulos, G. Troulis, C. Tzanakis, Université de Crète, 2006. ISBN 960-88712-3-9

Le reste suit qui permet de connaître les vérités géométriques par le seul effet d'un discours convenablement réglé une fois énoncés les principes. On peut voir dans l'efficacité de ce discours le premier exemple du *"déraisonnable"* mis en avant par Wigner[29].
Dans ce cadre, la géométrie élémentaire peut être définie comme une théorie hypothético-déductive des corps solides, elle renvoie d'une part à l'expérience (le mouvement et les corps solides), d'autre part elle se présente comme une théorie rationnelle au sens que nous avons dit ci-dessus. C'est en cela qu'elle est une géométrie physique au sens moderne du terme "physique"[30].

Le second moment est celui de l'apparition de la géométrie non-euclidienne. L'idée d'une géométrie non-euclidienne vient des échecs des tentatives de démonstration du postulat des parallèles, cette assertion vraie bien que non évidente dont la non-démonstration constitue ce que D'Alembert a appelé *"le scandale de la géométrie"*[31]. Puisqu'on ne peut le démontrer, c'est que le postulat des parallèles pourrait ne pas être vraie. S'appuyant sur les tentatives de démonstration par l'absurde, les inventeurs de la géométrie, Gauss, Bolyai et Lobatchevski[32], vont examiner les conséquences d'une géométrie ne satisfaisant pas au postulat des parallèles et développer ainsi un nouveau corpus géométrique que Gauss appellera géométrie non-euclidienne pour marquer combien les propriétés de cette géométrie diffèrent de la géométrie usuelle[33].
La possibilité d'une multiplicité de géométries posera la question de la "vraie" géométrie, celle du monde. Ainsi apparaît une distinction entre la géométrie mathématique qui étudie les diverses géométries et la géométrie physique qui s'intéresse à la géométrie du monde. La géométrie physique peut alors être définie comme un chapitre de la physique mathématique, cette partie des mathématiques qui a pour objectif d'étudier les propriétés du monde. On pourrait alors dire que la géométrie mathématique participe des mathématiques pures alors que la géométrie physique s'inscrit dans les mathématiques mixtes.

Le troisième moment apparaît avec les analyses de Poincaré[34]. Poincaré remarque que toute expérimentation se proposant de découvrir la "vraie" géométrie s'appuie sur des mesures et que ces mesures s'appuient elles-mêmes sur des propriétés géométriques, il s'ensuit que toute tentative expérimentale de recherche de la "vraie" géométrie est circulaire, autrement dit impossible. Poincaré explique alors que la question est moins de déterminer une "vraie" géométrie illusoire que de chercher parmi les multiples géométries celle qui représentent de la façon la plus efficace les propriétés du monde. Cette question avait déjà été abordée par Lobatchevski qui écrivait en 1837 :

"En réalité, dans la nature, nous ne connaissons que le mouvement : c'est lui qui rend possibles les perceptions des sens. Tous les autres concepts, par exemple ceux de la Géométrie, sont produits artificiellement par notre esprit et tirés des propriétés du mouve-

[29]E.P. Wigner, o.c.
[30]Il faudrait pour être complet parler des nombreux instruments de mesures géométriques.
[31]Jean Le Rond D'Alembert, *Essai sur les Eléments de Philosophie*, p. 318
[32]Pour une histoire de la géométrie non-euclidienne nous renvoyons au classique ouvrage de Roberto Bonola, *Non-euclidean geometry*.
[33]Ainsi il n'y a pas de rectangle dans cette géométrie. On peut montrer par contre que l'existence d'un rectangle est équivalente au postulat des parallèles.
[34]Henri Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, p. 95-104

Article publié en 2006 dans *Proceedings of 4th International Colloquium on the Didactics of Mathematics*, volume II, édité par M. Kourkoulos, G. Troulis, C. Tzanakis, Université de Crète, 2006. ISBN 960-88712-3-9

ment et, pour cette raison, ***l'espace en lui-même, pris à part, n'existe pas pour nous*** (souligné par nous).[35]

ajoutant, pour préciser cette conception du caractère artificiel[36] des constructions géométriques :

"Cela étant, notre esprit ne trouve aucune contradiction à admettre que certaines forces de la nature suivent une géométrie et d'autres leur géométrie propre."

assertion qui pouvait être difficilement compris par ses contemporains.

On assiste ainsi à un déplacement de la notion de vérité scientifique. D'abord sur un plan strictement mathématique on parle moins de vérité que de validité d'une proposition dans un cadre axiomatique donné, ce sera le rôle de l'axiomatique *"à la Hilbert"* que de préciser cette notion. Ensuite, avec le conventionnalisme de Poincaré, la question sera moins celle du développement d'une géométrie physique "vraie" que celle de la construction d'une théorie représentant convenablement la réalité ; ici le "convenablement" se situe dans la confrontation entre le sujet connaissant et ce qui lui est extérieur, montrant ainsi le rôle actif de l'esprit humain dans la connaissance du monde comme l'explique Poincaré[37].

On peut résumer cette histoire de la façon suivante :
Le premier moment est celui de la géométrie *"une"*. On peut alors distinguer la géométrie rationnelle, laquelle s'appuie sur la démonstration pour découvrir des propriétés qui sont autant de vérités du monde, et la géométrie pratique, laquelle a une approche plus empirique mais sait aussi utiliser les résultats de la géométrie rationnelle pour résoudre des problèmes pratiques.
Le second moment, après ce que l'on peut appeler le séisme non-euclidien, prend en charge la multiplicité des géométries sur le plan mathématique mais considère encore que la géométrie physique est "une", l'expérience devant permettre de la déterminer parmi la multiplicité des géométries. La géométrie physique, en tant qu'elle est une géométrie particulière, relève donc des mathématiques, au sens où la physique relève des mathématiques depuis la Révolution Scientifique du XVIIème siècle.
Le troisième moment pose que le choix d'une géométrie physique n'est pas unique. Il remet ainsi en question l'hypothèse d'une structure mathématique du monde ; la mathématisation du monde qui a commencé avec la géométrie grecque et s'est poursuivie avec la mécanique du XVIIème siècle est le résultat de la confrontation de l'esprit humain avec le monde. La géométrie physique est alors, parmi les géométries possibles, celle qui représente au mieux le rapport de l'homme au monde ; la question est donc moins celle de sa vérité que celle de son adéquation au monde, son *idonéïté* dirait Gonseth[38], laquelle se traduit par la cohérence entre le discours rationnel et l'expérience, l'expérimentation traduisant cette cohérence.

L'enseignement de la géométrie élémentaire

[35]Nicolas Lobatchevski, "Nouveaux principes de la géométrie" (1835-1838) (traduit du russe par F. Mailleux), *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège*, 3ème série, tome 2, 1900, p. 1-101 et tome 3, p. 1-32
[36]Le terme "artificiel" doit être entendu ici comme opposé au terme "naturel" (est artificiel ce qui n'existe pas dans la nature, ce qui est construit par l'homme).
[37]Henri Poincaré, *Dernières pensées*, p. 141
[38]Ferdinand Gonseth, *Les Mathématiques et la Réalité*

Article publié en 2006 dans *Proceedings of 4th International Colloquium on the Didactics of Mathematics*, volume II, édité par M. Kourkoulos, G. Troulis, C. Tzanakis, Université de Crète, 2006. ISBN 960-88712-3-9

Les remarques ci-dessus nous conduisent à penser l'enseignement de la géométrie élémentaire dans un cadre physico-mathématique, c'est-à-dire à mettre en avant trois points :
- la géométrie élémentaire s'appuie sur l'expérience des corps solides et du mouvement
- la géométrie élémentaire est une science rationnelle, au sens qu'elle permet de développer la connaissance par le seul raisonnement.
- la géométrie est une science expérimentale ; nous préciserons ce point ci-dessous.

Autrement dit l'enseignement de la géométrie élémentaire doit prendre en compte les trois aspects de la connaissance explicités par Gonseth, l'aspect intuitif, l'aspect théorique ou rationnel et l'aspect expérimental[39].

l'aspect intuitif

La notion de corps solides vient de l'expérience, c'est-à-dire de la confrontation de l'homme avec le monde extérieur. En tant qu'elle est l'étude des corps solides, la géométrie s'intéresse aux relations entre corps solides, en particulier les relations *"avoir même grandeur"* et *"avoir même forme"*, ainsi que la relation d'égalité que nous pouvons définir ainsi :

"deux corps solides sont égaux s'ils ont même grandeur et même forme".

Pour préciser cette dernière relation, nous énoncerons le principe de l'égalité par superposition qui apparaît comme le principe premier de la géométrie et que nous énoncerons de la façon suivante :

Deux objets que l'on peut superposer sont égaux.

Ce principe s'appuie sur le mouvement. On peut y voir un cercle vicieux si l'on considère que la notion de corps solide est appréhendée *via* l'invariance par rapport au mouvement, ou si l'on préfère l'indéformabilité. On sort de ce cercle si l'on considère que ce principe est moins un principe logique qu'un énoncé physique qui exprime la relation entre les notions de mouvement et de corps solide. C'est le rôle de la géométrie rationnelle que de rigidifier ce principe de façon à le rendre opératoire.
Le principe de l'égalité par superposition reste cependant insuffisant, en effet si l'on peut vérifier matériellement la superposition de deux plaques planes, cette vérification est impossible pour deux cubes en bois, ce qui montre les limites d'efficacité de ce principe.
En outre se pose la question d'énoncer des conditions suffisantes assurant la possibilité de superposition de deux corps sans qu'il soit besoin de la réaliser matériellement, ce qui conduit aux classiques cas d'égalité des triangles : étant donnés deux triangles dont on connaît l'égalité chacun à chacun de trois éléments convenablement choisis, on peut en déduire non seulement des égalités entre les autres éléments, mais la possibilité de superposer les triangles. Les cas d'égalité apparaissent ainsi comme le point de départ de la géométrie rationnelle et c'est à ce titre qu'ils ont leur place dans l'enseignement.
Après la relation d'égalité, nous pouvons aborder la relation *avoir même forme*. Ici encore la question se pose de rigidifier cette définition pour la rendre opératoire, ce qui renvoie à la

---

[39]Ferdinand Gonseth, *La Géométrie et le Problème de l'Espace, volume II, Les trois aspects de la géométrie*. Pour une présentation des conceptions de Gonseth nous renvoyons aux articles de Rudolf Bkouche, "Quelques remarques sur l'idée de démonstration", in *Science, Technique et Valeurs*, p. 85-101 et Houria Sinaceur, "La dialectique de l'espace" in *Espace et horizon de réalité*, p. 67-82

Article publié en 2006 dans *Proceedings of 4th International Colloquium on the Didactics of Mathematics*, volume II, édité par M. Kourkoulos, G. Troulis, C. Tzanakis, Université de Crète, 2006. ISBN 960-88712-3-9

définition de la relation de similitude et aux critères qui permettent de reconnaître que deux figures sont semblables en utilisant les classiques cas de similitude des triangles[40].
Nous voyons ainsi apparaître un jeu dialectique entre les aspects intuitifs et les aspects théoriques qui participe de ce que Gonseth appelle une synthèse dialectique[41].

l'aspect rationnel

La science commence avec le dépassement de l'aspect intuitif (que cette intuition provienne de la connaissance sensible ou d'une connaissance déjà théorisée[42]). Ce dépassement peut être de plusieurs types, parmi ces types nous privilégions le rationnel, c'est-à-dire la construction d'un discours convenablement réglé permettant l'accroissement des connaissances, ou pour parler comme les géomètres grecs, l'accroissement des vérités connues.
Se pose ainsi la question de l'organisation du discours et c'est le rôle de la logique d'énoncer les règles de cette organisation. La logique apparaît ainsi comme normative, c'est ainsi que l'on peut lire les *Premiers Analytiques* qui énoncent les règles du syllogisme. Mais on peut considérer que le texte d'Aristote s'appuie sur une logique déjà constituée et si l'on oublie la question de l'origine, on peut voir dans la théorie du syllogisme une science descriptive se contentant de dire comment se développe le raisonnement, la logique apparaît alors comme une science naturelle, la physique de l'objet quelconque au sens de Gonseth[43], ses règles n'étant que les lois de la pensée raisonnante.
Ces remarques renvoient à la question : la logique est-elle préalable au raisonnement géométrique ? si oui, se pose la question d'un enseignement de logique préalable à l'enseignement de la géométrie. On peut trouver un compromis en considérant que ces deux sciences doivent être enseignées en même temps, ce qui permet de mettre en évidence, tout au long de l'enseignement de la géométrie, le caractère logique du raisonnement ; mais un tel compromis, s'il donne une réponse pragmatique aux questions d'enseignement, s'appuie sur l'antériorité de la logique, et ignore l'historicité des formes de la démonstration. On se trouve alors pris dans l'alternative suivante : faut-il enseigner la géométrie sous sa forme euclidienne, plus ou moins transformée par ses successeurs ? ou bien faut-il enseigner la géométrie sous sa forme moderne telle qu'elle a été codifiée *via* l'algèbre linéaire ?
C'est encore le recours à Gonseth qui nous permet de dépasser cette alternative quelque peu mutilante, et c'est encore une lecture physicienne, au sens moderne du terme, qui nous permet de penser un enseignement capable de prendre en compte les divers aspects de la géométrie, y compris préparer les élèves à la modernité[44]. L'analyse gonséthienne nous apprend que la doctrine préalable qui fonde une science se construit en même temps que cette science ; en particulier le raisonnement mathématique se construit dans l'activité mathématique elle-même, ce qui revient à dire que la doctrine ne devient préalable qu'après-coup.

---

[40]On sait que si les cas de similitude suffisent à étudier la relation de similitude dans le plan, l'étude de la relation de similitude dans l'espace est plus compliquée.
[41]Ferdinand Gonseth, *La Géométrie et le Problème de l'Espace, volume IV, La synthèse dialectique*
[42]Nous ne prenons pas en compte ici les questions d'origine ; en particulier on peut considérer la connaissance intuitive comme l'ensemble des connaissances que le sujet connaissant sait appréhender globalement à un moment donné. En ce sens on peut considérer que la connaissance intuitive est historique, elle peut s'accroître, mais elle peut aussi décroître lorsque certaines connaissances sont remises en question (prinicpe de revisabilité de Gonseth).
[43]Ferdinand Gonseth, *Les Mathématiques et la Réalité*
[44]Contrairement à un discours qui s'est développé dans les années soixante du siècle dernier et qui a conduit à la réforme des *mathématiques modernes*, l'accès à la science moderne ne va pas de soi et la connaissance de *"la science qui se fait"* passe par la connaissance de la *"science déjà faite"*, ce qui implique de définir, d'une part, la part de la science déjà faite qui doit être enseignée au collège et au lycée (11-17ans), d'autre part, la part de la science d'aujourd'hui que l'on peut enseigner à ces mêmes niveaux.

Ce point conduit à considérer que, non seulement le raisonnement, mais les transformations du raisonnement, ont leur place dans l'enseignement. Cela nous conduit à mettre en avant le raisonnement informel dans les premières années d'enseignement[45], nous appuyant pour cela sur les *Eléments de Géométrie* de Clairaut[46]. Les limites de ce mode de raisonnement montrent la nécessité de modes de raisonnement plus complexes tels ceux qui apparaissent chez Euclide et qui seront repris, dans le cursus français, par les ouvrages de Legendre[47] et Lacroix[48], ouvrages qui ont guidé l'enseignement de la géométrie en France jusqu'à la réforme des *mathématiques modernes*[49].
La révolution hilbertienne, pour répondre aux difficultés posées par la multiplicité des géométries puis à celles posées par la théorie des ensembles, mettait l'accent sur les aspects formels du langage aux dépens du contenu, mais cette élimination du sens ne prenait de sens que par rapport aux problèmes que les méthodes formalistes se proposaient de résoudre.
Dans ce contexte, les objets disparaissent derrière mots qui les désignent et les relations entre ces objets ne sont plus que des relations entre mots. Se met ainsi en place une nouvelle forme d'axiomatique dans laquelle les principes de la géométrie se réduisent à des termes primitifs et à des axiomes qui sont essentiellement les règles d'usage des termes primitifs. Une fois ces principes énoncés et les règles du discours démonstratif explicités, on peut développer le corpus géométrique. Toutefois ce discours *a priori* vide de toute signification n'est pas arbitraire et l'on peut rappeler que l'objectif de Hilbert était d'asseoir le corpus euclidien sur de nouvelles bases capables de pendre en compte les difficultés rencontrées au XIXème siècle.
Les méthodes formalistes, si elles ne prennent en charge que la partie syntaxique de l'activité scientifique, ont joué un rôle essentiel dans le développement des mathématiques du XXème siècle, physique mathématique comprise, ce qui pose la question de leur introduction dans l'enseignement. On peut alors poser la question, en ce qui concerne l'enseignement de la géométrie, bien que cette question soit plus large, du lien entre les méthodes formalistes et le caractère physique de la géométrie élémentaire.
Nous pouvons alors revenir à ce que dit Hilbert au début des *Fondements de la Géométrie* sur le rôle de l'intuition dans la construction de son axiomatique. Si les significations extérieures s'effacent dans le développement du discours mathématiques, ce sont elles qui le guident ; d'une part les termes primitifs et les axiomes renvoient implicitement à ces significations extérieures, d'autre part ce sont elles qui guident le raisonnement comme le montrent les nombreuses figures qui parcourent l'ouvrage de Hilbert.
On voit ainsi apparaître un dualisme que Hilbert explicitera dans la préface de l'ouvrage *Geometry and Imagination* :

"In mathematics, as in any scientific research, we find two tendencies present. On the one hand, the tendency toward ***abstraction*** *seeks to crystallise the* ***logical*** *relations inherent in the maze of material that is being studied, and to correlate the material in a systematic and orderly manner. On the other hand, the tendency toward* ***intuitive understanding*** *fosters a more immediate grasp of the objects one studies, a live* ***rapport*** *with them, so to speak, which stresses the concrete meaning of their relations."*[50]

[45]Rudolf Bkouche, "Du raisonnement à la démonstration", *Repères-IREM* n°47, avril 2002, p. 41-64
[46]Alexis-Claude Clairaut, *Eléments de Géométrie*
[47]Adrien-Marie Legendre, *Eléments de Géométrie*
[48]Sylvestre Lacroix, *Elémens de Géométrie*
[49]Il faudrait prendre en compte les modifications apportés par la réforme de 1902, mais on peut considérer que cette réforme, qui soulignait l'aspect physique de la géométrie élémentaire, était plus un prolongement du point de vue classique qu'une rupture (cf. Rudolf Bkouche, "Variations autour de la réforme de 1902/1905" in Hélène Gispert et *al* : *La France Mathématique*, p. 181-213).
[50]David Hilbert, S. Cohn-Vossen, *Geometry and Imagination*, p. iii

Article publié en 2006 dans *Proceedings of 4th International Colloquium on the Didactics of Mathematics*, volume II, édité par M. Kourkoulos, G. Troulis, C. Tzanakis, Université de Crète, 2006. ISBN 960-88712-3-9

Nous pensons que cette conception dualiste doit guider l'enseignement scientifique.
En ce qui concerne la géométrie cela implique qu'après l'étape du raisonnement informel expliquée ci-dessus, l'axiomatique apparaisse comme la rigidification nécessaire pour assurer la justesse du raisonnement en évitant les pièges d'une intuition mal contrôlée. Cela implique que d'une part que les termes primitifs renvoient à la connaissance intuitive (empirique ou plus élaborée[51]), d'autre part que les énoncés primitifs, les axiomes, restent proches de l'intuition, l'axiomatique apparaissant comme un ensemble de règles d'usage des termes.
Pour un exemple d'une telle construction nous renvoyons à notre article sur les cas d'égalité des triangles[52]. Signalons d'autre part un ouvrage de géométrie élémentaire en préparation écrit avec Boris Allard dans le cadre d'un groupe de travail de l'IREM de Lille.

l'aspect expérimental

Lorsque l'on parle de l'aspect expérimental de la géométrie ou plus généralement des mathématiques, la question porte moins sur la géométrie ou les mathématiques que sur le terme "expérimental".
La notion de science expérimentale pose deux questions, la première porte sur les objets sur lesquelles porte l'expérimentation, la seconde porte sur la méthode expérimentale et sur le type de connaissance qu'elle apporte.
Il s'agit ici moins de donner une réponse générale, peut-être illusoire, aux deux questions ci-dessus, que de tenter d'expliciter ce que signifie l'aspect expérimental de la géométrie.
Dire que les objets de la géométrie viennent de l'expérience du monde ne suffit pas à définir ce caractère expérimental, d'une part l'expérimentation ne se réduit pas à la simple observation des objets du monde, d'autre part on peut expérimenter sur d'autres objets que ceux qui nous sont donnés par la connaissance du monde[53].
Le caractère expérimental de la géométrie élémentaire peut se définir *via* les opérations sur les figures, à commencer par les constructions géométriques, en particulier les constructions à la règle et au compas. Rappelons d'abord que ces instruments, aussi simples soient-ils, ne sont pas exempts de tout aspect conceptuel et nous rappelons cette assertion d'Abel Rey :

"La règle et le compas (ne sont) *que le symbole des idées claires et distinctes de la droite et du cercle"*[54]

Aspects conceptuels de la géométrie (la droite et le cercle) et aspects pratiques (la règle et le compas) sont solidaires et cette solidarité doit apparaître dans l'enseignement de la géométrie élémentaire.
On peut cependant se demander pourquoi seulement la règle et le compas alors qu'on sait que les géomètres grecs avaient imaginé, sinon réalisé, d'autres instruments permettant les constructions qu'ils ne savaient pas faire avec la règle et le compas seul[55]. On sait aujourd'hui

[51]Rappelons que les premiers objets de la géométrie, points, droites, plans, ne relèvent pas de la connaissance empirique. Ce sont des objets déjà élaborés liés à la notion de corps solides et c'est la reconstruction rationnelle de la géométrie, qu'elle soit euclidienne ou hilbertienne qui fait des points, droites et plans des objets premiers du discours.
[52]Rudolf Bkouche, "Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles", *Bulletin de l'APMEP* n°430, septembre-octobre 2000, p. 613-629
[53]On pourrait développer le caractère expérimental de l'arithmétique, que ce soit l'expérimentation sur les nombres ou celle sur des objets plus sophistiqués comme les corps de nombres. On peut considérer, de façon générale, le calcul comme une forme d'expérimentation sur les nombres, sur les grandeurs géométriques (ainsi le Livre II des *Eléments* d'Euclide) ou sur les lettres.
[54]Abel Rey, *La Science dans l'Antiquité*, volume 5, p.124
[55]Sur ces instruments, nous renvoyons aux *Commentaires* d'Eutocius

Article publié en 2006 dans *Proceedings of 4th International Colloquium on the Didactics of Mathematics*, volume II, édité par M. Kourkoulos, G. Troulis, C. Tzanakis, Université de Crète, 2006. ISBN 960-88712-3-9

que la droite et le cercle sont les seules lignes planes qui peuvent glisser sur elles sans se déformer, ce qui leur assure une certaine "naturalité". Cela est-il suffisant pour assurer la priorité de la droite et du compas dans la géométrie élémentaire ? Il faut alors revenir sur les diverses définitions de la droite telles qu'elles se présentent dans la géométrie grecque, depuis la définition optique jusqu'à la définition euclidienne d'une ligne *"qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elles"*[56], définition qui présente une certaine analogie avec la propriété d'invariance citée plus haut ; on peut alors remarquer que le cercle possède la même propriété.
Rappelons la définition du cercle donnée par Euclide :

"Un cercle est une figure plane contenue par une ligne unique (celle appelée circonférence) par rapport à laquelle toutes les droites menées à sa rencontre à partir d'un unique point parmi ceux qui sont placés à l'intérieur de la figure sont (jusqu'à la circonférence du cercle) égales entre elles"[57]

Si cette définition peut apparaître comme redondante, il reste que l'on voit bien comment le mouvement du compas, par exemple une tige rigide ou une corde tendue tournant autour d'une de ses extrémités, engendre une circonférence de cercle.
Ainsi la règle et le compas peuvent apparaître comme la matérialisation des trois premiers postulats du texte d'Euclide, en même temps que ces postulats énoncent la possibilité de tracer une droite passant par deux points, de prolonger une droite, ou de tracer un cercle de centre et de rayon donné indépendamment de la réalisation matérielle de ces constructions.
Les constructions géométriques à la règle et au compas ont alors pour objectif de donner ce que l'on pourrait appeler, en termes modernes, un algorithme de construction d'un objet à partir des données initiales et des deux seuls instruments définis par les principes. C'est en cela que réside leur caractère expérimental, la réalisation matérielle de l'expérience ainsi définie assurant la cohérence entre le discours théorique et le monde, ce que l'on peut encore appeler l'idonéité de la géométrie. Tout cela nous renvoie encore à la géométrie physique, au sens moderne du terme *"physique"*[58].
Nous avons cité les constructions à la règle et au compas, nous pourrions citer d'autres constructions qui montrent la nécessité de relier le théorique et la réalisation matérielle.
Parmi ces problèmes de constructions, nous citerons les problèmes de représentation plane d'objets de l'espace et la perspective, les constructions de polyèdres, en particulier les polyèdres réguliers, les problèmes de sections planes de corps solides, enfin les systèmes articulés.
Nous ne pouvons ici développer ces problèmes. Nous contenterons, pour terminer cette longue présentation de rappeler une vieille proposition de Borel pour constituer des laboratoires de mathématiques[59] où pourraient se rencontrer les trois aspects développés ci-

[56]Euclide, *Les Eléments, volume 1, Livres I à IV*, p. 154
[57]*ibid*. p. 162
[58]Nous insistons sur l'importance de la réalisation matérielle, c'est celle-ci qui assure le lien entre le discours théorique et la connaissance du monde, qui permet aussi de savoir qu'il n'est pas besoin de la réalisation matérielle d'une construction géométrique pour savoir qu'elle peut être réalisée. Les sophistications informatiques données par les divers logiciels de dessin ont un autre rôle et ne sauraient participer d'un premier enseignement de la géométrie élémentaire dans la mesure où elles représentent d'abord une cohérence entre les données introduites dans le logiciel et les figures apparaissant sur l'écran, ce qui est un autre problème. La matérialité de l'ordinateur ne relève pas de la géométrie, y compris lorsqu'elle simule les constructions à la règle et au compas ; cette matérialité ne devient géométrique que pour qui a déjà une pratique géométrique, en particulier une pratique du dessin géométrique.
[59]Emile Borel, "Les exercices pratiques de mathématiques dans l'Enseignement Secondaire", conférence faite le 3 mars 1904 au Musée Pédagogique, in *Œuvres*, tome 4 pages 2225-2256

Article publié en 2006 dans *Proceedings of 4th International Colloquium on the Didactics of Mathematics*, volume II, édité par M. Kourkoulos, G. Troulis, C. Tzanakis, Université de Crète, 2006. ISBN 960-88712-3-9

dessus, l'intuitif, le rationnel, l'expérimental. Mais pour que ces laboratoires jouent pleinement leur rôle dans l'enseignement, il nous semble que deux conditions sont nécessaires :
- l'activité du laboratoire doit rester en prise avec l'enseignement.
- l'articulation entre les trois aspects de la connaissance, pour qu'elle soit signifiante, doit prendre en compte autant l'activité de l'esprit que l'activité matérielle, ce qui implique en particulier une activité manuelle. Cela met au second rang l'usage de l'informatique (cf. note 57).

En guise de conclusion

La science n'a pas pour but d'être enseignée. C'est parce qu'elle tient aujourd'hui une place importante dans le rapport des hommes au monde, tant sur le rôle de l'interprétation du monde (la construction de l'intelligibilité du monde) que sur le rôle de sa transformation (le développement de techniques de plus en plus sophistiquées), que la science a sa place dans l'enseignement. Mais l'accès à la science n'est jamais facile, encore moins l'accès à la modernité scientifique ; l'objet de l'enseignement d'une science est alors moins de dire la modernité scientifique que de donner aux nouvelles générations les moyens d'accéder cette modernité. C'est en cela qu'un regard historique peut être utile pour construire de tels moyens d'accès, moins pour recommencer l'histoire, ce qui est illusoire, que pour mettre en place des cheminements qui conduisent à la connaissance scientifique. Cela est d'autant plus fort pour la géométrie élémentaire que celle-ci, d'une part reste le lieu où s'élabore la connaissance de la part de l'environnement de l'homme constituée par les corps solides, et d'autre part, avec la géométrisation qui se développe dans d'autres domaines de la connaissance, constitue une propédeutique pour l'étude de ces domaines.
Une approche physicienne, au sens moderne du terme, de la géométrie élémentaire, dont nous avons vu qu'elle sous-tend la construction euclidienne, nous semble aujourd'hui essentielle pour penser l'enseignement de la géométrie, ce que nous avons essayé de montrer dans cette présentation.

bibliographie

Vladimir Arnold, "Sur l'éducation mathématique", *Gazette des Mathématiciens*, n°78, octobre 1998, p. 19-29

Jean Le Rond D'Alembert, *Essai sur les Eléments de Philosophie* (1759), Fayard, Paris 1986

Jean Le Rond D'Alembert, *Discours Préliminaire de l'Encyclopédie* (1759/1763), Editions Gonthier, Paris 1965

Jean Le Rond D'Alembert, *Traité de Dynamique* (1758), Gabay, Paris 1990

Ampère, *Essai de Philosophie des Sciences* (1834), Culture et Civilisation, Bruxelles 1966

Aristote, *Les Seconds Analytiques* (traduction et notes par Tricot), Vrin, Paris 1979

Aristote, *Physique*, traduction et présentation par Pierre Pellegrin, GF Flammarion, Paris 2000

Francis Bacon, *Grande Restauration des Sciences* (1606) in *Œuvres philosophiques, morales et politiques*, avec notices biographiques par J.A.C. Buchon, Panthéon Littéraire, Paris 1854

Roberto Bonola, *Non-euclidean geometry* (1912) (translated by H. S. Carslaw), Dover Publications, New York 1955

Emile Borel, *Œuvres* , 4 tomes, Editions du C.N.R.S. Paris 1972

Alexis-Claude Clairaut, *Eléments de Géométrie* (1741), "Les Maîtres de la Pensée Scientifique", Gauthier-Villars, Paris 1920

Albert Einstein, *Réflexions sur l'électrodynamique, l'éther, la géométrie et la relativité*, textes traduits par Maurice Solovine et Marie-Antoinette Tonnelat, Gauthier-Villars, Paris 1972

Article publié en 2006 dans *Proceedings of 4th International Colloquium on the Didactics of Mathematics*, volume II, édité par M. Kourkoulos, G. Troulis, C. Tzanakis, Université de Crète, 2006. ISBN 960-88712-3-9

Euclide, *Les Eléments, volume 1, Livres I à IV*, introduction générale par Maurice Caveing, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, "Bibliothèque d'Histoire des Sciences", PUF, Paris 1990
Eutocius, "Commentaires", in *Archimède*, tome IV, texte établi et traduit pas Charles Mugler, Les Belles Lettres, Paris 1972
Hélène Gispert et *al*, *La France Mathématique*, Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences et Société Mathématique de France, Paris 1991
Ferdinand Gonseth, *Les Fondements des Mathématiques* (1926), préface de Jacques Hadamard, Blanchard, Paris 1974
Ferdinand Gonseth, *Les Mathématiques et la Réalité* (Essai sur la méthode axiomatique) (1936), Blanchard, Paris 1974
Ferdinand Gonseth in *La Géométrie et le Problème de l'Espace* (6 volumes) Editions du Griffon, Neuchâtel 1945-1955
David Hilbert, S. Cohn-Vossen, *Geometry and Imagination*, translated by P. Nemenyi, Chelsea, New York 1952
Sylvestre Lacroix, *Elémens de Géométrie*, quatrième édition, Paris 1804
J.L. Lagrange, *Mécanique Analytique*, édition complète réunissant les notes de la troisième édition revue, corrigée et annotées par Joseph Bertrand et de la quatrième édition publiée sous la direction de Gaston Darboux (2 tomes), Blanchard, Paris 1965
Adrien-Marie Legendre, *Eléments de Géométrie*, douzième édition, Firmin Didot, Paris 1823
Isaac Newton, *Principia*, Motte's translation revised by Cajori (2 volumes), University of California Press, Berkeley-Los Angeles-London 1934/1962
Henri Poincaré, *La Science et l'Hypothèse* (1902), préface de Jules Vuillemin, Flammarion, Paris 1968
Henri Poincaré, *Dernières pensées* (1913), Flammarion, Paris 1963
Jean-Claude Pont, *L'Aventure des Parallèles*, Peter Lang, Berne 1986
Hans Reichenbach, *The Philosophy of Space and Time* (1927) (translated by Maria Reichenbach and John Freund, with introductory remarks by Rudolf Carnap), Dover, New York 1957
Abel Rey, *La Science dans l'Antiquité*, volume 5, "L'Apogée de la Science Technique Grecque : L'Essor de la Mathématique", Albin Michel, Paris 1948
Bernhart Riemann, *Œuvres Mathématiques*, Blanchard, Paris 1968, réédition Gabay, Paris 1990
Encyclopédie Méthodique, Mathématiques (3 tomes), par MM. D'Alembert, l'Abbé Bossut, De La Lande, le Marquis de Condorcet &c, Panckoucke (Paris) & Plomteux (Liège), 1784, réédition ACL, Paris 1987
Espace et horizon de réalité (philosophie mathématique de Ferdinand Gonseth), sous la direction de Marco Panza et Jean-Claude Pont, Masson, Paris 1992
Science, Technique et Valeurs, Acte des Colloques de Crêt-Bérard et de Paris en hommage à Ferdinand Gonseth, sous la direction d'Eric Emery, L'Age d'Homme, Lausanne, 1998

Article publié en 2006 dans *Proceedings of 4th International Colloquium on the Didactics of Mathematics*, volume II, édité par M. Kourkoulos, G. Troulis, C. Tzanakis, Université de Crète, 2006. ISBN 960-88712-3-9