Sur une généralisation de l'intégrale définie;

PAR M. H. LEBESGUE.

Aanvullende gegevens:
Verschenen in de *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences* (1901), pp. 1-3; twee voetnoten, beiden gemerkt met het nummer één zijn hier als 1 en 2 opgenomen. Het wortelteken in de formule in de laatste alinea was doorgetrokken over de tekens; in de HTML-versie zijn haakjes geplaatst.

Dans le cas des fonctions continues, il y a identité entre les notions d'intégrale et de fonctions primitive. Riemann a défini l'intégrale de certaines fonctions discontinues, mais toutes les fonctions dérivées ne sont pas intégrables, au sens de Riemann. Le problème de la recherche des fonctions primitives n'est donc pas résolue par l'intégration, et l'on peut désirer une définition de l'intégrale comprenant comme cas particulier celle de Riemann et permettant de résoudre le problème des fonctions primitives (1).
Pour définir l'intégrale d'une fonction continue croissante

$$y(x)\ (a \leq x \leq b)$$

on divise l'intervalle (a, b) en intervalles partiels et l'on fait la somme des quantités obtenues en multipliant la longueur de chaque intervalle partiel par l'une des valeurs de y quand x est dans cet intervalle. Si x est dans l'intervalle (a_i, a_{i+1}), y varie entre certaines limites m_i, m_{i+1}, et réciproquement si y est entre m_i et m_{i+1}, x est entre a_i et a_{i+1}. De sorte qu'au lieu de se donner la division de la variation de x, c'est-à-dire de se donner les nombres a_i, on aurait ou se donner la division de la variation de y, c'est-à-dire les nombres m_i. De là deux manières de généraliser la notion d'intégrale. On siat que la première (se donner les a_i) conduit à la définition donnée par Riemann et aux définitions des intégrales par excès et par défaut données par M. Darboux. Voyons le seconde. [pag. 2]
Soit la fonction y comprise entre m et M. Donnons-nous

$$m = m_0 < m_1 < m_2 < \dots < m_{p-1} < M = m_p$$

$y = m$, quand x fait partie d'un ensemble E_0; $m_{i-1} < y \leq m_i$ quand x fait partie d'un ensemble E_i.

Nous définirons plus loin les mesures λ_0, λ_i de ces ensembles. Considérons l'une ou l'autre des deux sommes

$$m_0 \lambda_0 + \Sigma m_i \lambda_i; \; m_0 \lambda_0 + \Sigma m_{i-1} \lambda_i;$$

si, quand l'écart maximum entre deux m_i consécutifs tend vers zéro, ces sommes tendent vers une même limite indépendante des m_i choisis, cette limite sera par définition l'intégrale des y qui sera dite intégrable.

Considérons un ensemble de points de (*a, b*); on peut d'une infinité de manières enfermer de la somme des longuers de ces intervalles; la limite inférieure de la somme des longueurs de ces intervalles est la mesure de l'ensemble. Un ensemble E est dit *mesurable* si sa mesure augmentée de celle de l'ensemble des points ne faisant pas partie de E donne la mesure de (*a, b*) (2). Voici deux propriétés de ces ensembles: une infinité d'ensembles mesurables E_i étant donnée, l'ensemble des points qui font partie de l'un au moins d'entre eux est mesurable; si les E_i n'ont deux à deux aucun point commun, la mesure de l'ensemble obtenu est la somme des mesures E_i. L'ensemble des points communs à tous les E_i est mesurable.

Il est naturel de considérer d'abord les fonctions telles que les ensembles qui figurent dans la définition de l'intégrale soient mesurable. On trouve que: *si une fonction limitée supérieurement en valeur absolue est telle que, quels que soient* A *et* B, *l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on a* $A < y \leq B$ *est mesurable, elle est intégrable* par le procédé indiqué. Une telle fonction sera dite *sommable*. L'intégrale d'une fonction sommable est comprise entre l'intégrale par défaut et l'intégrale par excès. De sorte que, *si une fonction intégrable au sens de Riemann est sommable, l'intégrale est la même avec les deux définitions*. Or, *toute fonction intégrable au sens de Riemann est sommable*, car l'ensemble de ses points de discontinuité est de mesure nulle, et l'on peut démontrer que si, en faisant abstraction d'un ensemble de valeurs de *x* de mesure nulle, il reste un ensemble en chaque [pag. 3] point duquel une fonction continue, cette fonction est sommable. Cette propriété permet de former immédiatement des fonctions non intégrables au sens de Riemann et cependant sommables. Soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions continues, $\varphi(x)$ n'étant pas toujours nulle; une fonction qui ne diffère de $f(x)$ qu'aux points d'un ensemble de mesure nulle partout dense et qui en ces points est égale à $f(x) + \varphi(x)$ est sommable sans être intégrable au sens de Riemann. *Exemple*: La fonction égale à 0 si *x* irrationnel, égale à 1 si *x* rationel. Le procédé de formations qui précède montre qui l'ensemble des fonctions sommables a une puissance supérieure au continue. Voici deux propriétés des fonction de cet ensemble:

1. *Si f et φ sont sommables, f + φ le sont* et l'intégrale de f + φ est la somme des intégrales de f et de φ.
2. *Si une suite de fonctions sommables a une limite, c'est une fonction sommable.*

L'ensemble des fonctions sommables contient évidemment $y = k$ et $y = x$; donc, d'après 1°, il contient tous les polynomes et comme, d'aprés 2°, il contient toutes ses limites, il contient donc toutes les fonctions continues, c'est-a-dire les fonctions de première classe (voire Baire, *Annali di Matematica*, 1899), il contient toutes celles de seconde classe, etc.
En particulier, *toute fonction dérivée, limitée supérieurement en valeur absolue*, étant de première classe, *est sommable*, et l'on peut démontrer que *son intégrale, considerée comme fonction de sa limite supérieure, est une de ses fonctions primitives*.

Voici mainenant une application géométrique: si $|f'|$, $|\varphi'|$, $|\psi'|$ sont limitées supérieurement, la courbe

a pour longueur l'intégrale de $\sqrt{(f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2)}$. Si $\varphi = \psi = 0$, on a la variation totale de la fonction f à variation limitée. Dans le cas où f', φ', ψ' n'existent pas, on peut obtenir un théorème presque identique en remplaçant les dérivées par les nombres dérivés de Dini.

(29 avril 1901.)

Voetnoten:

(1) Ces deux conditions imposées *a priori* à toute généralisation de l'intégrale sont évidemment compatibles, car toute fonction dérivée intégrable, au sens de Riemann, a pour intégrale une de ses fonctions primitives.

(2) Si l'on ajoute à ces ensembles des ensembles de mesures nulles convenablement choisis, on a des ensembles mesurables au sens de M. Borel (*Leçons sur la théorie des fonctions*).
