Newton et le problème de Pappus

Massimo Galuzzi*

Paris, 28 décembre 2009

Résumé

Le problème de Pappus parcourt l'entière carrière scientifique de Newton. La solution de ce problème lui fournit une occasion précieuse pour mettre à l'épreuve les résultats de géométrie projective qu'il élabore progressivement à partir des années de sa jeunesse. Mais il oppose souvent ses solutions à celle donnée par Descartes en opposant la « vraie » analyse des Anciens aux déformations générées par l'usage aveugle de l'algèbre.

De plus, il est un peu étonnant que Newton ait toujours considéré ce problème comme équivalent à celui de tracer une conique par cinq points, en supposant (tacitement) qu'une région du plan soit choisie par avance. C'est une attitude bien différente de celle qui anime les discussions entre Descartes, Roberval, van Schooten et Huyghens sur l'existence de deux solutions.

*Université de Milan, Italie. Courriel : galuzzi@alice.it

1 Introduction

L'intérêt pour le problème de Pappus parcourt toute la carrière scientifique de Newton.[1] Bien qu'il ait donné des contributions considérables aussi au cas général,[2] c'est surtout au cas de quatre lignes qu'il a réservé la plus grande attention.

Rappelons la formulation de ce problème dans le cas de quatre lignes.[3]

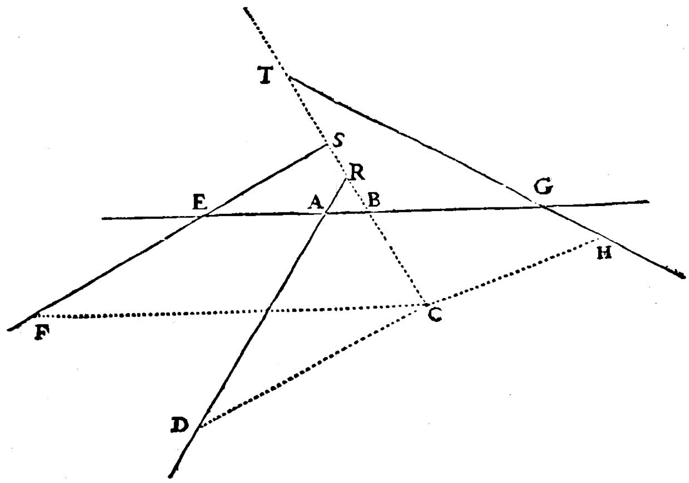

Figure 1. Le problème de Pappus

Les droites EF, AD, AB, GH sont données avec quatre angles qui sont donnés en même temps. Il s'agit de déterminer le lieu des points C tels que, en conduisant les lignes CF, CD, CB, CH sur EF, AD, AB, GH suivant les angles donnés, la raison de $CB \times CD$ à $CF \times CH$ soit donnée. On voit immédiatement que les points d'intersection E, G et les points d'intersection de AD, EF, et de AD, GH (qui ne sont pas indiqués dans la figure de la *Géométrie* de Descartes que j'ai reproduite) sont des points du lieu.

La solution (analytique) du problème de Pappus est une sorte de « fil rouge » qui relie les trois livres de *La Géométrie* de Descartes et dont Descartes était à juste titre très fier. Newton, après ses années d'apprentissage toutes « cartésiennes », devient de plus en plus critique envers l'utilisation exclusive des outils algébriques pour résoudre les problèmes géométriques. Dans le cas de quatre lignes il oppose à la solution cartésienne[4] une pluralité de solutions qui poursuivent l'idéal de retrouver la solution « parfaite » possédée, à son avis, par les Anciens.

Le problème de Pappus dans le cas de quatre lignes est considéré *par Newton* comme équivalent à la détermination d'une conique passant par cinq points. Puisqu'il suppose toujours (implicitement) que l'on doit chercher la solution dans une région donnée du plan, il ne pose jamais la question de l'existence de *deux* solutions, question qui était l'objet d'un âpre polémique entre Descartes et ses adversaires.[5]

1. La référence aux *Mathematical Papers* édités par D.T. Whiteside sera donnée par le sigle *MP*, suivie de l'indication du volume et des pages.
2. *Cf.* (Galuzzi, 1990).
3. J'utilise la figure de la *Géométrie* de Descartes.
4. Qui ouvre la voie à la théorie algébrique moderne des sections coniques. *Cf.* (Galuzzi et Rovelli, Chapitre 2).
5. *Cf.* (Galuzzi et Rovelli, Section 2.4) et (Maronne, 2007, Chapitre 2).

La première solution du problème de Pappus à quatre lignes, opposée a celle de Descartes, est donnée par Newton au moyen de sa célèbre construction organique des coniques, envoyée à Collins (sans démonstration) dans la lettre du 20 août 1672.[6] Cette solution est reprise plusieurs fois. Dans la *Solutio Problematis Veterum de Loco Solido*[7] elle est donnée après la solution newtonienne du problème de Pappus. La démonstration aussi dépend de la solution donnée à ce problème.

La construction organique est donnée de façon semblable dans le *De Motu*[8]. Enfin dans les *Principia*[9] on a la formulation classique. Dans la Section 3 nous donnerons la description de cette construction et expliquerons son usage pour construire une conique par cinq points. La démonstration de Newton sera exposée dans la Section 6.

Toutefois dans les années qui suivent la solution du problème de Pappus par la construction organique, Newton s'est arrêté de façon détaillée sur le cas particulier du problème de Pappus où la solution est donnée par un cercle. C'est l'exemple choisi par Descartes dans *La Géométrie.*[10] Probablement Newton projetait de considérer ce cas particulier à l'intérieur d'un traité de géométrie élémentaire, mais ce traité, comme la plus ambitieuse *Geometria* de sa vieillesse n'a jamais vu le jour.[11] Dans la Section 4 nous proposons une démonstration possible du résultat indiqué par Newton.

Dans la *Veterum Loca solida Restituta*[12] une construction intéressante d'une conique par cinq points est donnée, accompagnée d'une piquante critique envers Descartes. Après avoir observé que Descartes a eu tort de prétendre avoir donné une solution inconnue par les Anciens[13] il observe :

> Avec tout le respect dû à un si grand homme, je croirais que cette chose n'a nullement été ignorée des Anciens. Pappus nous enseigne en effet une méthode pour décrire une ellipse par cinq points donnés, et le raisonnement est le même pour les autres coniques. Et si les Anciens savaient décrire une conique par cinq points donnés, qui peut ne pas voir qu'ils connaissaient la composition du lieu solide ?[14]

Des critiques semblables envers Descartes accompagnent tous les textes où Newton s'occupe du problème de Pappus. Nous ne rendrons pas compte de ces critiques bien qu'elles soient du plus grand intérêt surtout lorsqu'elles se prolongent par considérations méthodologiques.[15] Les résultats contenus dans la *Veterum Loca solida Restituta* sont exposés dans la Section 5.

La *Solutio Problematis Veterum de Loco Solido* est un texte plutôt élaboré, qui, après la révision

6. *Cf.* (Turnbull, 1959, p. 229-234). Le texte est reproduit aussi dans (*MP*, p. 156-159). Dans la note 6 (p. 156-57) Whiteside observe justement que la figure dans le texte de Turnbull n'est pas reproduite exactement. Une analyse remarquable de cette construction est contenue dans (Guicciardini, 2009, Chapitre 5). Nous aurons occasion de nous confronter plusieurs fois avec ce livre très important que la courtoisie de l'auteur nous a permis de lire avant impression.

7. *Cf.* (*MP*, vol. 4, p. 282-321)

8. *Cf.* (*MP*, vol. 6, p. 242-299)

9. *Cf.* (Newton, 1687, p. 70-103)

10. *Cf.* (*MP*, vol. 4, p. 230-269). Newton connaissait le texte de Descartes par l'intermédiaire de la seconde traduction latine. *Cf.* (Descartes, 1659–61, p. 33-34).

11. Dans (*MP*, vol. 7) tous les matériaux qui devaient composer ce traité sont colligés.

12. *Cf.* (*MP*, vol. 4, p. 274-283).

13. Newton a toujours donné peu de relief au fait que la solution cartésienne est pour le cas général de $2n$ lignes et que le cas de quatre lignes est seulement un exemple dans *La Géométrie*.

14. *Cf.* (*MP*, vol. 4, p. 276). Le terme 'lieu solide' est utilisé comme synonyme de conique. Une conique dans les mathématiques grecques est donnée par un cône (une figure dans l'espace) coupé par un plan : donc un lieu solide.

15. Dans le livre de (Guicciardini, 2009) on trouve une analyse raffinée de l'évolution des considérations méthodologiques qui après les années d'apprentissage viennent occuper un rôle de plus en plus remarquable dans la pensée de Newton.

dans le *De Motu*, constitue la base de la Cinquième Section du Premier Livre des *Principia.*[16]

Dans la Section 6 nous donnerons un exposé détaillé de la partie la plus importante de ce texte et dans la Sous-section 6.1 nous ferons une comparaison avec les *Principia.*

La composition de la *Arithmetica Universalis*[17] se place chronologiquement entre la *Solutio Problematis Veterum de Loco Solido* et le *De Motu.* Du point de vue de la « Geometria Veterum » on n'a pas de grandes choses. Mais il y a une solution vraiment « cartésienne » du problème de Pappus. Nous exposerons cette solution dans la Section 7.

Dans les deux dernières Sections nous effleurerons les idées de Newton qui, à partir du problème de Pappus acquièrent une importance méthodologique considérable.[18]

2 Prémisses classiques

Newton a toujours considéré les propositions III.17-III.19 des *Coniques* d'Apollonius et les propositions VIII.13, VIII.14 des *Collections* de Pappus comme une connaissance de base avec laquelle son lecteur devait être familier[19].

Nous nous limitons ici à présenter le contenu de la III.17 des *Coniques.*[20]

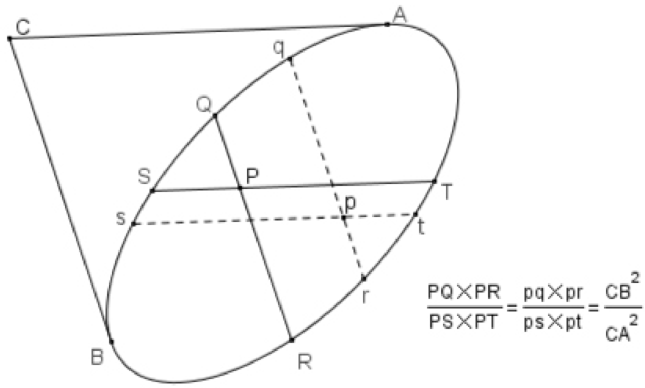

Figure 2. La proposition III

Une ellipse est donnée avec les deux tangentes en A et B qui se coupent au point C. Par les points P,p on mène les cordes QR, qr parallèles à la tangente CB et les cordes ST,st parallèles à la tangente CA. On a alors

$$(1) \qquad \frac{PQ \times PR}{PS \times PT} = \frac{pq \times pr}{ps \times pt} = \frac{CB^2}{CA^2}.^{21}$$

16. *Cf.* (Newton, 1687, p. 70-103). Sur ce texte on peut voir aussi (Di Sieno et Galuzzi, 1989) et (Guicciardini, 2009, sections 5.3.2-5.4.6).

17. Mais l'édition est bien postérieure : (Newton, 1707).

18. Mais sur ce point il faut voir surtout (Guicciardini, 2009).

19. Une analyse remarquable des résultats de Newton sur les coniques est donnée dans (Milne, 1927). Naturellement Milne ne pouvait disposer des textes édités par Whiteside, ce qui rend son article encore plus considérable.

20. Dans (Heath, 1896, p. 95-98) on a une synthèse claire des résultats d'Apollonius.

21. Chasles observe (*cf.* (Chasles, 1875, p. 72)) que cette proposition peut être obtenue comme cas particulier

La situation est semblable dans le cas des autres coniques.

Newton n'a jamais repris les démonstrations d'Apollonius. Au contraire les propositions de Pappus ont étés élaborées de nouveau plusieurs fois.

3 La construction organique des coniques

Comme nous l'avons déjà écrit dans la Section 1, cette construction est exposée dans une lettre à Collins de 1672.[22] On peut la décrire facilement à l'aide de la Figure 3 suivante.

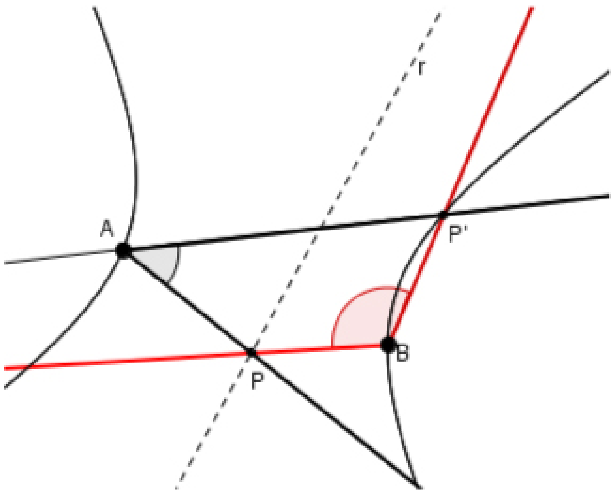

Figure 3. La construction

La droite en pointillés r de la Figure 3 est *donnée*. Aux deux points *donnés*, A, B sont fixés les sommets de *deux angles donnés* PAP', PBP' qui peuvent tourner autour de leurs sommets A, B. Si le point P d'intersection de deux côtés AP, BP parcourt la droite r le point P', intersection des deux autres côtés, décrit une section conique.

Cette construction nous donne immédiatement la possibilité de tracer une conique de laquelle cinq points sont donnés (voir la Figure 4 suivante). Supposons qu'une conique soit donnée par les points A, B, C, P, Q et considérons les trois points A, B, C. Ces points déterminent les angles $\widehat{BAC}, \widehat{ABC}$ qui peuvent être utilisés comme angles tournants autour des sommets A, B. Si l'on tourne ces angles de façon que deux des leurs côtés se coupent au point P, les autres côtés par leur intersection donneront le point P'. En utilisant le point Q on obtient le point Q' et donc la ligne $P'Q'$. Il est facile de voir (puisque une conique est déterminée par cinq points) que à partir

du théorème sur le quadrilatère dans l'*Essai pour les coniques* de Pascal. Voir (Pascal, 1963, p. 36). Dans les *Mathematical Papers* il y a plusieurs lieux où Whiteside suggère un lien avec l'œuvre de Pascal. *Cf.* (*MP*, vol. 2, p. 190-91, et p. 191 note 5) et surtout (*MP*, vol. 4, p. 321, note 90). On peut voir aussi (Taton, 1978).

22. Voir la note 6. Voir (Milne, 1927, p. 109-110).

de cette ligne par le moyen de la construction organique avec les angles $\widehat{BAC}, \widehat{ABC}$ et les pôles B, C on trace la conique par les cinq points donnés.[23]

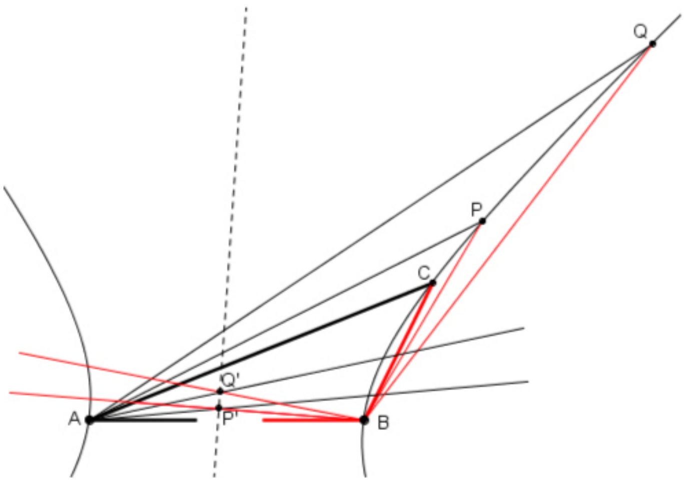

Figure 4. La conique par cinq points

4 Newton et le cercle de Descartes

Dans (*MP*, vol. 4, p. 230-269) Whiteside a rassemblé plusieurs problèmes de géométrie élémentaire, dont beaucoup fournissent des propriétés du cercle. Ceux qui sont indexés par les nombres 12, 14, 15 correspondent à des cas particuliers du *problème d Pappus*. Voyons le numéro 15, que Newton énonce sans démonstration, mais pour lequel la démonstration est suggérée par le choix même des données.

23. *Cf.* (*MP*, vol.2, p. 156-159). J'ai considéré aussi la traduction française du Madame du Châtelet du texte correspondant dans les *Principia* : *cf.* (Newton, 2005, p. 65-66). Voir aussi (*MP*, vol. 2, p. 158).

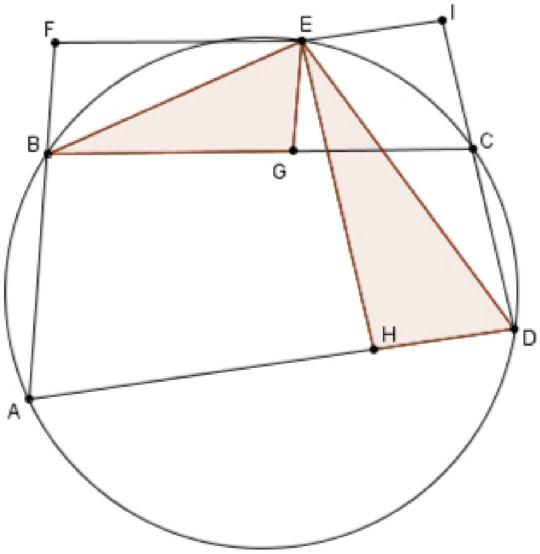

Figure 5. Le problème de Pappus dans le cas du cercle

Si dans un cercle quelconque $ABCD$ le trapèze $ABCD$ est inscrit, et à partir d'un point arbitraire E de la circonférence l'on mène les lignes EF, EG qui forment avec les côtés AB, BC le parallélogramme $EFBG$ et les lignes EH, EI qui forment avec les côtés AD, DC le parallélogramme $EHDI$, le rectangle $GE \times EH$ contenu par les lignes menées sur les côtes opposés est égal au rectangle $EF \times EI$ contenu par le lignes menées sur les côtés restants.

La même chose arrive si à partir du point E l'on mène les perpendiculaires. Et aussi si l'on mène les lignes EH, EI sur les côtés contigus AD, CD formant les angles égaux $\widehat{EHD}, \widehat{EID}$, pendant que les lignes EF, EG menées sur les autres côtés forment à leur tour avec eux des angles égaux.[24]

Toute la démonstration consiste simplement à prouver que les triangles EBG et DEH sont semblables. Évidemment $\widehat{ABC} = \widehat{BFE} = \widehat{BGE}$. L'angle $\widehat{CDH}$ est supplémentaire de $\widehat{DHE}$ et, puisque $ABCD$ est inscrit dans un cercle, l'angle $\widehat{CDH}$ est aussi supplémentaire de $\widehat{ABC}$. Il s'ensuit que $\widehat{DHE} = \widehat{BGE}$.

L'angle $\widehat{CBE} = \widehat{CDE}$ et puisque $EH||DI$, l'on a $\widehat{CDE} = \widehat{DEH}$. La similitude des triangles EBG, DEH est prouvée. Il s'ensuit que $BG : EG = EH : HD$. Mais $BG = EF, HD = EI$ et donc $EF \times EI = EG \times EH$.

Si l'on substitue à EF,EG,EH,EI les perpendiculaires EF', EG',EH', EI' on a évidemment $\dfrac{EF}{EG} = \dfrac{EF'}{EG'}$ et $\dfrac{EH}{EI} = \dfrac{EH'}{EI'}$ et la même chose arrive si l'on prend les angles comme Newton le déclare. On est ramené au cas précédent.[25] □

24. *Cf.* (*MP*, vol. 4, p. 236).

25. Cette démonstration nous semble plus simple que celle suggérée par Whiteside : *cf.* (*MP*, vol. 4, p. 236, note 6).

Remarque 1 *Newton ne donne pas la Proposition réciproque, qui toutefois est presque évidente.* Si $ABCD$ est un trapèze qui peut être inscrit dans un cercle, et (avec la même structuration des données) $EF \times EI = EG \times EH$, le point E est sur le cercle par A, B, C, D.

En fait, l'égalité $\widehat{DHE} = \widehat{BGE}$ *est donnée par la simple considération du parallélisme, et ne dépend pas de l'hypothèse que E soit sur le cercle passant par* A, B, C, D. *De* $EF \times EI = EG \times EH$ *il s'ensuit que* $EF(= BG) : EG = EI(= HD) : EH$ *et donc les triangles EBG et DEH sont semblables. Donc* $\widehat{EBC} = \widehat{HED} = \widehat{EDC}$. *Les angles égaux* $\widehat{EBC}, \widehat{EDC}$ *sous-tendent le même segment EC et donc les points E,B,C,D sont sur un même cercle, qui ne peut être que le cercle passant par A,B,C,D.*

5 La *Veterum loca solida constituta*

Ce bref texte est composé de deux propositions seulement, que constituent la solution de deux problèmes.[26]

Problème 1 *Décrire une conique qui contient les trois points* A, B, C *et a son centre en* O.

Supposons donc qu'une conique soit donnée par les trois points A, B, C et son centre O.

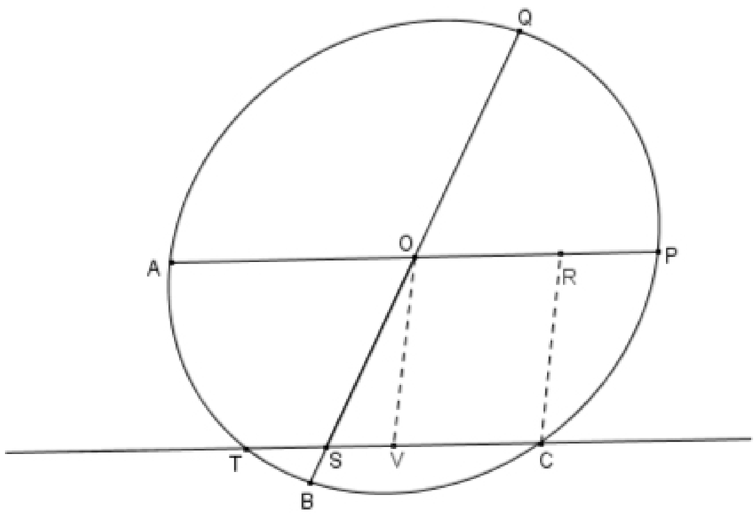

Figure 6. Une conique donnée par le centre et trois points

Traçons les droites AO, BO et prolongeons AO jusqu'au point P de façon que $AO = OP$ (nous devons imaginer que BO est aussi prolongée jusqu'à Q de façon que $BO = OQ$, mais Newton ne trace pas cette droite.[27] La parallèle CS à AP coupe OB en S. Soit T un point sur la ligne CS tel que

$$\frac{ST \times SC}{SB \times SQ} = \frac{AO^2}{BO^2}. \tag{2}$$

26. *Cf.* (*MP*, vol. 4, p. 274-283). Une analyse intéressante de ce texte est donné aussi dans (Sergio, 2006, Chapitre 7).

27. Comme Whiteside l'observe dans la note 12 à la page 278.

Il s'ensuit que le point T est déterminé et la III.17 d'Apollonius nous permet d'affirmer que ce point est sur la conique. Soit V le milieu de TC. OV donne la direction conjuguée de AP et une fois que CR est tracée parallèle à OV, le *latus rectum* l, relatif au diamètre AP est donné par la proportion

$$\frac{l}{AP} = \frac{RC^2}{AR \times RP}. \tag{3}$$

Le *latus rectum* l relatif au diamètre AP et le diamètre AP déterminent la conique.□

Problème 2 *Construire une conique qui contient le cinq points A, B, C, D, E.*

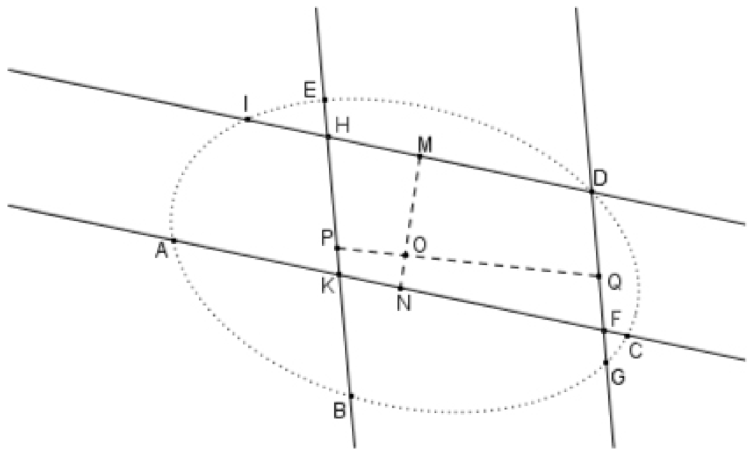

Figure 7. Une conique donnée par cinq points

Joignons A, C et B, E et soit K le point d'intersection de AC et BE. DI et DG sont tracées parallèles à AC et BE respectivement. AC et DG se coupent en F ; BE et DI se coupent en H. La proposition d'Apollonius peut être utilisée encore pour localiser deux points I et G de la conique sur DI et DG respectivement. On a, en effet

$$\frac{BK \times KE}{AK \times KC} = \frac{BH \times HE}{HI \times HD}. \tag{4}$$

Puisque les points A, B, C, E, K sont donnés, le rapport $\frac{BK \times KE}{AK \times KC}$ est donné et donc le point I est donné. De la même façon :

$$\frac{BK \times KE}{AK \times KC} = \frac{FG \times FD}{AF \times FC}. \tag{5}$$

Le point G est donné à son tour. Soit M, N les milieux de DI, AC et P, Q soit les milieux de BE, GD. L'intersection O de MN et PQ sera le centre de la conique, et nous pouvons utiliser le résultat du Problème 1.[28] □

Pour la solution de problème de Pappus il s'agit seulement de déterminer cinq points :

28. Naturellement, si MN et PQ sont parallèles, nous avons le cas de la parabole. Voir (MP, vol. 4, note 17, p. 280) où Whiteside discute ce cas.

Après ces prémisses, il ne reste qu'à rechercher cinq points par lesquels la figure passe pour mener à bien la composition du lieu solide.[29]

Puisque quatre points sont donnés immédiatement[30] il s'agit simplement d'utiliser la condition de Pappus pour trouver un cinquième point. Puisque la solution de Newton est reprise dans la *Solutio problematis Veterum de loco solido* sans changements essentiels, nous la donnerons dans la Section suivante.

6 La *Solutio problematis Veterum de loco solido*

Le texte de ce manuscrit commence par le théorème suivant.[31]

Théorème 1 (Prop. 1) *Si l'on mène d'un point P d'une conique aux quatre côtés étendus à l'infini AB, CD, AC, BD d'un quadrilatère inscrit dans cette conique un nombre égal de lignes droites PQ, PR, PS, PT qui forment chacune un angle donné avec chacun des quatre côtés du quadrilatère, le produit $PQ \times PR$ de deux lignes menées sur deux côtés opposés sera en raison donné au rectangle $PS \times PT$ des droites tirées aux deux autres côtés opposés.*[32]

La démonstration est conduite en considérant trois cas, dans un style qui évoque la stratégie utilisée (selon notre reconstruction) pour le problème du cercle (on peut voir la Section 4).

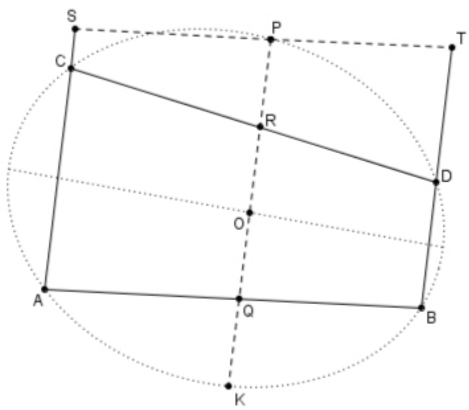

Figure 8. Proposition 1 : Le premier cas

Supposons au début que les côtés AC, BD soient parallèles et que PR, PQ soient à leur tour parallèles à BD pendant que PS, PT sont parallèles à un autre côté, par exemple AB, comme sur la Figure **??**.

La droite qui passe par les points milieux de A, C et B, D est un diamètre. Soit O le point d'intersection de ce diamètre avec PQ. PO sera une ordonnée à ce diamètre, puisque sa direction

29. *Cf.* (*MP*, vol. 4, p. 280).
30. Voir la Note 1.
31. Une analyse de ce texte se trouve aussi dans (Guicciardini, 2009, chapitre 5). Une analyse des propositions correspondantes contenues dans les *Principia* est dans (Milne, 1927, p. 102-114).
32. *Cf.* (*MP*, vol. 4, p. 282-284). L'énoncé est reproduit avec des différences minimales dans (Newton, 1687, p. 70). J'ai tenu compte pour ma traduction de celle de Madame du Châtelet : (Newton, 2005, p. 60).

est celle conjuguée. Si l'on prend $OK = PO$ dans la direction opposée on a un autre point K de la conique.

De la III.17 d'Apollonius il s'ensuit que le rapport

$$\frac{PQ \times QK}{AQ \times QB}$$

est donné. Mais $OQ = OR, QK = PR$ et par conséquent, puisque

$$AQ \times QB = PS \times PT,$$

il s'ensuit que

$$\frac{PQ \times QK}{AQ \times QB} = \frac{PQ \times PR}{PS \times PT}.$$

Le rapport $\frac{PQ \times PR}{PS \times PT}$ est donc donné.

Voyons le second cas. Les côtés AC et BD ne sont plus parallèles, mais PR, PQ sont encore pris parallèles à AC, pendant que PS, PT sont pris parallèles à AB.

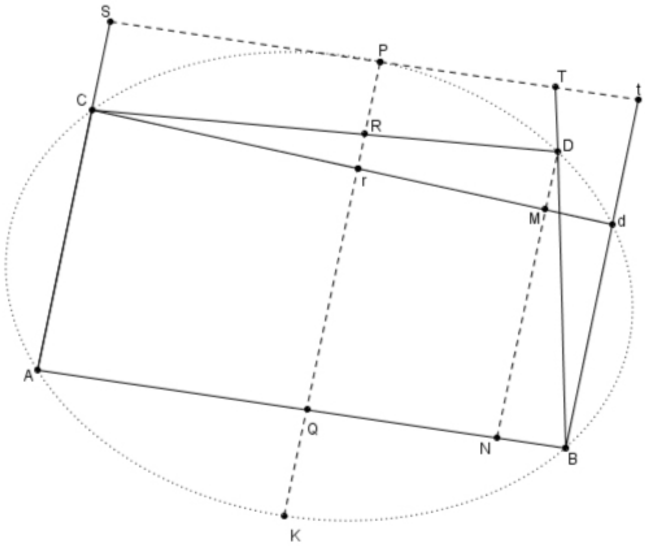

Figure 9. Proposition 1 : Le second cas

Menons Bd parallèle à AC, qui coupe la droite ST en t et la conique en d. Joignons les points C et d et soit r l'intersection de Cd et PQ. Enfin traçons la parallèle par D à la droite Bd et soient M et N les intersections avec Cd et AB.

Le triangle BTt est semblable au triangle DBN.

Il s'ensuit que $Bt : Tt = DN : BN$. Mais $Bt = PQ$, et donc $PQ : Tt = DN : BN$. Puisque $Rr : DM = CR : CD = AQ : AN$ et $AQ = PS$, on a $Rr : DM = PS : AN$ et $Rr : PS = DM : AN$. En composant les rapports, on a

$$\frac{PQ \times Rr}{PS \times Tt} = \frac{DN \times DM}{AN \times NB}. \tag{6}$$

Si l'on considère le quadrilatère $ANDC$, on peut utiliser ce que nous avons démontré dans le premier cas :

$$\frac{DN \times DM}{AN \times NB} = \frac{PQ \times Pr}{PS \times Pt}. \tag{7}$$

Puisque D est donné, la valeur du rapport au second membre ne dépend pas de la position de P. La comparaison de (6) et (7) donne

$$\frac{PQ \times Rr}{PS \times Tt} = \frac{PQ \times Pr}{PS \times Pt} \tag{8}$$

et donc $Pr : Rr = Pt : Tt$. et $(Pr - Rr) : Pr = (Pt - Tt) : Pt$. Puisque $Pr - Rr = PR$ et $Pt - Tt = PT$ on a $PR : Pr = PT : Pt$, c'est à dire

$$\frac{Pr}{Pt} = \frac{PR}{PT}. \tag{9}$$

Dans le deuxième membre de (7) on peut substituer au rapport $\dfrac{Pr}{Pt}$ le rapport $\dfrac{PR}{PT}$ et donc le rapport

$$\frac{PQ \times PR}{PS \times PT} \tag{10}$$

est donné.

Voyons le troisième cas.

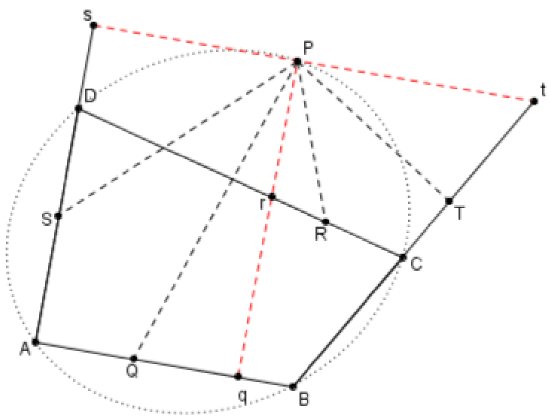

Figure 10. Proposition 1 : Le troisième cas

Sur la Figure 10, PQ, PR, PS, PT forment des angles arbitraires avec les côtés du quadrilatère (arbitraire). Mais Pq, Pr (en rouge sur la figure) sont parallèles à AD et Ps, Pt (encore en rouge dans la figure) sont parallèles à AB. Les angles des triangles PQq, PRr, PSs, PTt sont donnés et du cas précédent il s'ensuit que $\dfrac{Pq \times Pr}{Ps \times Pt}$ est donné. Mais les rapports

$$\frac{PQ}{Pq}, \frac{PR}{Pr}, \frac{PS}{Ps}, \frac{PT}{Pt}$$

sont aussi donnés et donc le rapport

$$\frac{PQ \times PR}{PS \times PT}$$

est donné.

Remarque 2 *Dans une étape intermédiaire de la démonstration du deuxième cas du Théorème 1, Newton a prouvé que* $\dfrac{PR}{PT} = \dfrac{Pr}{Pt}$. *Si nous imaginons que la conique soit donnée par les points* A, B, C, P, d *cette égalité donne une caractérisation des autres points* D *de la conique. On a un cas particulier (puisque* $AC||Bd$*) de la génération homographique. Le cas plus général est l'objet de la Proposition cinquième, que nous proposons avant la Proposition destinée à la détermination d'un cinquième point à partir de la condition de Pappus.*[33]

Théorème 2 (Prop. 5) *Si entre les points donnés* A, P *d'une conique arbitraire, un parallélogramme* $AQPS$ *est inscrit,*[34] *et si deux côtés* AQ, AS *sont prolongés jusqu'à couper la courbe en* B *et* C*, et qu'ensuite par les points* B *et* C *on mène les lignes* BD*,* CD *vers un cinquième point arbitraire* D *de la conique, et que ces lignes coupent les côtés opposés* PS *et* PQ *en* T *et* R*, la raison de* PR *à* PT *sera donnée. Et réciproquement si la raison de* PR *à* PT *est donnée, le point* D *sera sur une conique qui passe par les points* A, B, P *et* C*.*[35]

Nous nous limiterons à proposer la démonstration de la partie directe de l'énoncé. La partie réciproque s'obtient facilement en renversant les égalités.

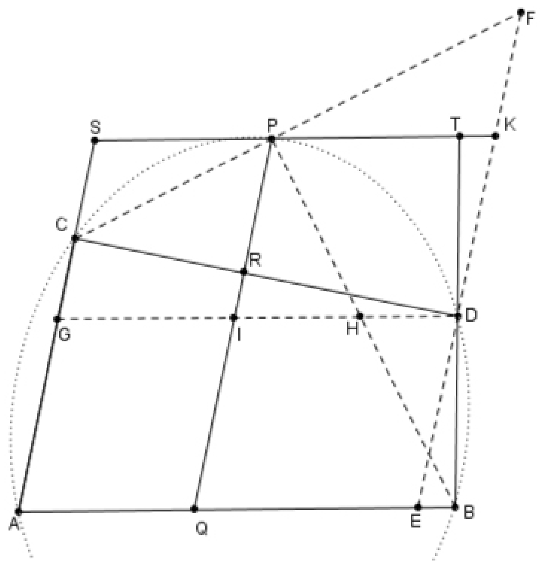

Figure 11. Proposition 5

33. Whiteside, dans (*MP*, vol. 4, p. 286-287, note 6) observe à la fin de la démonstration du deuxième cas que l'égalité des rapports « ...set in modern cross-ratio form yields the homographic definition of the conic (D) through A, B, C, d and P by $C(PDdA) = (PRr\infty) = (PTt\infty) = B(PDdA)$ ». Toutefois il ne considère pas le fait que A, B, C, P, d ne sont pas des points arbitraires, comme dans la Proposition 5.

34. Il faut voir la Figure 11 pour comprendre ce que Newton entend par 'inscrit'.

35. *Cf.* (*MP*, vol. 4, p. 290-92) et (Newton, 1687, p. 75-76), (Newton, 2005, p. 64-65).

Joignons C, P et B,P. La droite DG parallèle à AB coupe PB, PQ et CA en H, I, G. La droite DE parallèle à AC coupe PC, PS et AB en F, K et E. Par suite du Théorème 1 le rapport

$$\frac{DE \times DF}{DG \times DH} \tag{11}$$

est donné. Mais $DE(= IQ) : PQ = HB : PB = DH : PT$, c'est à dire $\dfrac{DE}{DH} = \dfrac{PQ}{PT}$. La substitution de $\dfrac{PQ}{PT}$ à $\dfrac{DE}{DH}$ dans le rapport (11) montre que le rapport

$$\frac{PQ \times DF}{DG \times PT} \tag{12}$$

est donné à son tour. On a encore $DF : PR = DC : RC = DG : PS(= IG)$. C'est à dire $\dfrac{DF}{DG} = \dfrac{PR}{PS}$. La substitution $\dfrac{PR}{PS}$ à $\dfrac{DF}{DG}$ dans le rapport (12) montre que le rapport

$$\frac{PQ \times PR}{PS \times PT} \tag{13}$$

est donné. Mais les droites PQ, PS sont données et donc le rapport de PQ à PS est donné. Il s'ensuit que le rapport de PR à PT est donné. □

Avant de voir l'utilisation de cette Proposition pour tracer une conique, voyons comment la condition de Pappus peut être exploitée pour avoir cinq points d'une section conique

Théorème 3 (Prop. 3) *Déterminer un point P tel que, si l'on conduit les quatre lignes PQ, PR, PS, PT sur quatre autres lignes données de position AB, CD, AC, BD selon des angles donnés, le rectangle $PQ \times PR$ soit en raison donnée au rectangle $PS \times PT$.*[36]

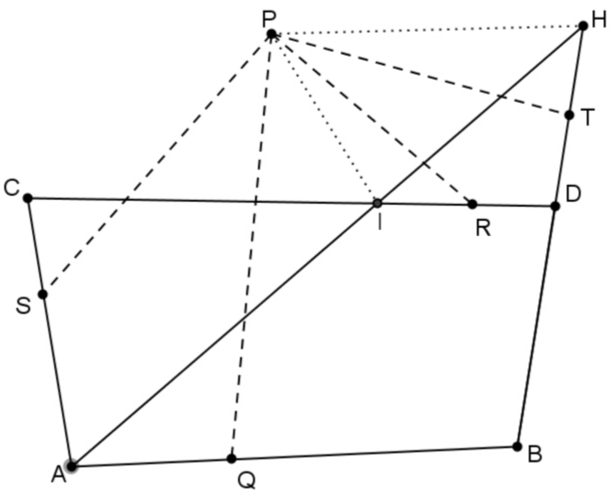

Figure 12. Un point de la section conique

Supposons que les données soient celles de la Figure 12 et traçons la ligne AH par A qui coupe la ligne CD en I et BD en H. Puisque tous les angles de la figure sont donnés $\dfrac{PQ}{PA}$ et $\dfrac{PA}{PS}$ sont

36. *Cf.* (*MP*, vol. 4, p. 288-290). Voir aussi (*MP*, vol. 6, p. 250-252) et (Newton, 1687, p. 74-75).

donnés, et il s'ensuit que le rapport $\dfrac{PQ}{PS}$ est donné. Par hypothèse $\dfrac{PQ \times PR}{PS \times PT}$ est donné et par conséquent le rapport $\dfrac{PR}{PT}$ est donné.

Puisque les rapports $\dfrac{PI}{PR}$ et $\dfrac{PT}{PH}$ sont donnés à leur tour, $\dfrac{PI}{PH}$ est donné[37] et enfin le point P est donné. $\square$

Tous ces résultats nous donnent une façon simple de déterminer une conique par cinq points.

Théorème 4 (Prop. 6) *Définir une section conique qui passe par cinq points.*[38]

Considérons la Figure 13, qui correspond aux données du Théorème 2.

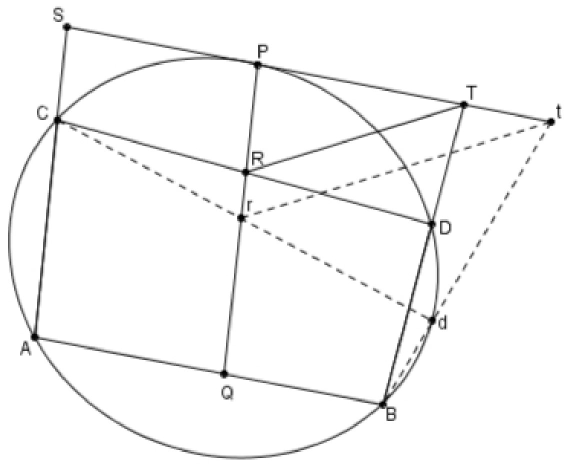

Figure 13. La génération homographique d'une conique

Menons un ligne arbitraire Cr par C. Une ligne rt parallèle à RT détermine un point t sur PS tel que $PR : PT = Pr : Pt$. La ligne Bt coupe la ligne Cr en un nouveau point d de la section conique. En variant la ligne Cr on peut décrire tous les points de la conique.[39]

Ce théorème a un rôle stratégique très important. Il est mis en œuvre dans les Théorèmes 5 et 6, pour démontrer la construction organique et pour une généralisation intéressante de la génération homographique.

Théorème 5 (Prop. 7) *Si deux lignes BM, CM conduites par les points donnés B, C se coupent en un point M d'une ligne MN donnée de position et si deux autres lignes BD, CD sont menées, formant des angles donnés $\widehat{MBD}, \widehat{MCD}$ avec les deux lignes précédentes menées par les points B, C ; je dis que les deux dernières lignes tracent, par leur intersection D un lieu solide. Réciproquement, si les lignes BD, CD tracent un lieu solide qui passe par les points B, C, G et quand ces*

37. $\frac{\cancel{PR}}{\cancel{PT}}\frac{PI}{\cancel{PR}}\frac{\cancel{PT}}{PH} = \frac{PI}{PH}$.

38. *Cf.* (*MP*, vol. 4, p. 294). Voir aussi (*MP*, vol. 6, p. 256-261) et (Newton, 1687, p. 79-81).

39. La proportion $PR : PT = Pr : Pt$ peut se changer en $PR : Pr = PT : Pt$, qui signifie, en termes de rapport anharmonique, que :

$$(PRr\infty) = (PTt\infty).$$

Les faisceaux des lignes centrés en B et C qui projettent le point variables d sont projectifs.

lignes se coupent en le point G du lieu les autres deux coïncident avec la ligne BC, le point M appartiendra à une ligne donnée de position.[40]

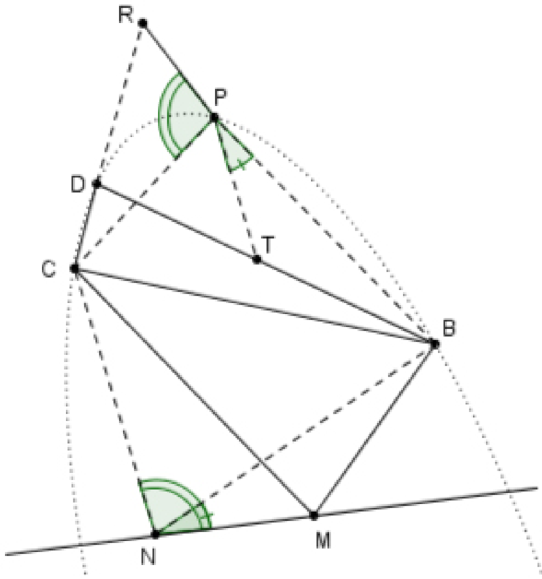

Figure 14. La démonstration de la construction organique 1

Soit donné le point N sur la ligne MN. Quand le point mobile M coïncide avec N, le point mobile D se trouve en P (donné). Joignons CN, BN, CP, BP. Par le point P menons les lignes PT, PR qui coupent BD en T et CD en R telles que $\widehat{BPT} = \widehat{BNM}, \widehat{CPR} = \widehat{CNM}$ (les angles $\widehat{BNM}$ et $\widehat{CNM}$ sont donnés). Comme l'observe Whiteside,[41] le choix de ces directions pour PT, PR correspond au complètement du parallélogramme, nécessaire pour utiliser le Théorème 2 par le point A. Ce dernier devient le point à l'infini de la ligne MN.

Par hypothèse on a donc $\widehat{MBD} = \widehat{NBP}$ et $\widehat{MCD} = \widehat{NCP}$. Si l'on soustrait les parties communes, on a $\widehat{NBM} = \widehat{PBT}$ et $\widehat{NCM} = \widehat{PCR}$. Il s'ensuit que le triangle NBM est semblable à PBT et le triangle NCM est semblable à PCR. On a donc

$$PT : NM = PB : NB \quad PR : NM = PC : NC. \tag{14}$$

Mais PB et NB sont donnés, ainsi que PC et NC. Il s'ensuit que le rapport $\frac{PR}{PT}$ et donné. En conséquence du Théorème 2 le point D décrit une conique.

Pour la partie réciproque nous utiliserons une nouvelle figure.[42]

40. *Cf.* (*MP*, vol. 4, p. 298-303). Voir aussi (*MP*, vol. 6, p. 254-57) et (Newton, 1687, p. 77-79).
41. *Cf.* (*MP*, vol. 4, p. 299, note 32).
42. Dans le manuscrit Newton utilise la même figure.

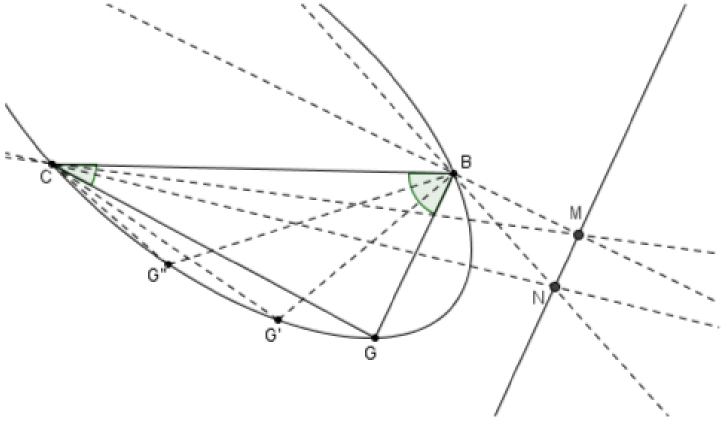

Figure 15. La démonstration de la construction organique 2

Imaginons que la conique de la Figure 15 soit donnée par la construction organique et soit G le point tel que les angles $\widehat{GBC}, \widehat{GCB}$ soient ceux donnés par la construction. De cette manière là, Newton fait en sorte que la conique engendrée par l'intersection des autres côtés des angles tournant qui projettent les points de la conique soit dégénérée. En fait cette conique doit contenir la lignes BC et donc elle est donnée par cette même droite et une autre ligne MN.[43]

Donc, en prenant deux autres points G', G'', avec les mêmes angles, par les intersections des autres côtés[44] on détermine les points M, N, et donc une droite MN. On démontre facilement que, si D est un point arbitraire de la conique projeté par les côtés CD, BD des angles donnés tournants, les autres côtés se coupent en un point D' sur la ligne MN (voir la Figure 16).[45] □

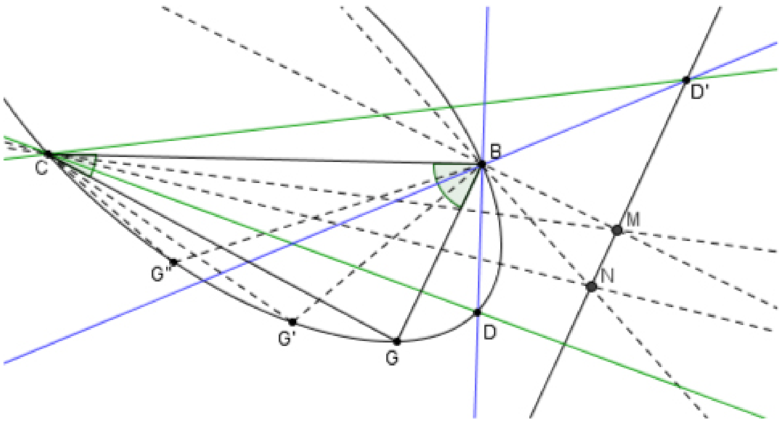

Figure 16. La démonstration de la construction organique 3

43. On peut voir l'explication très claire de Whiteside : *cf.* (*MP*, vol. 4, p. 298, note 30).
44. Par un procédé semblable à celui employé dans la Section 3.
45. Une démonstration algébrique de la construction organique est donnée dans (*MP*, vol. 5, p. 304-306). Une première tentative infructueuse est dans (*MP*, vol. 2, p. 152-55). *Cf.* (Guicciardini, 2009, chapitre 5). On peut voir aussi (Whiteside, 1961).

6.1 Une comparaison avec les *Principia*

L'incohérence des contenus de la Section 5 dans les *Principia* a été observé plusieurs fois. Newton lui même avait projeté d'en disposer les résultats dans un traité spécifique sur la géométrie des Anciens en le séparant des questions dynamiques et physiques.[46]

Nous ne voulons pas donner ici une analyse détaillée des différences entre la *Solutio problemati Veterum de Loco Solido* et le texte de la Section 5 des *Principia*,[47] mais simplement proposer quelques observations fonctionnelles à notre exposé.

En premier lieu, il faut souligner que Newton a cherché à atténuer le caractère de la *Solutio*, clairement consacrée à opposer à la solution cartésienne du problème de Pappus à quatre lignes la vraie (à son avis) solution des Anciens.[48] Le titre de la Section devient *Inventio Orbium ubi umbilicus neuter datus* et, dans la mesure du possible, *loci solidi* et *conicæ* deviennent trajectoires.[49]

Certains résultats qui ont un caractère plus explicitement projectif ne trouvent plus place dans le texte des *Principia*. En fait ils sont très intéressants en eux mêmes, mais leur importance pour les trajectoires des planêtes ne semble pas évidente, même à Newton.

Un bon exemple est donné par la Proposition 12.

Théorème 6 (Prop. 12) *Si deux lignes CD, BD en tournant autour des points donnés C, B coupent deux autres lignes données de position HI, HK et les longueurs de ces lignes données de positions sont réciproquement déterminables par* simplicem geometriam *:*[50] *le lieu d'intersection de deux lignes mobiles D sera une conique qui passe par les points C, B autour desquels elles tournent.*[51]

46. Nous avons cette information par le célèbre *memorandum* de Gregory (ULE. Gregory C 42). Voir (*MP*, vol. 7, p. 196-197), où Whiteside en donne aussi une traduction anglaise. On peut voir aussi (Guicciardini, 1999, p. 179-184) et (Di Sieno et Galuzzi, 1989).
47. Sur ce point on peut voir l'*Introduction* de Whiteside à (*MP*, vol. 6).
48. Mais le *Scholium* ajouté au Lemme XVIII (correspondant à la Proposition 2 de la *Solutio*) manifeste, implicitement, puisque Descartes n'est pas nommé, l'intolérance de Newton envers l'exemple du cercle de Descartes. On peut voir aussi (Di Sieno et Galuzzi, 1989).
49. Voir par exemple (*MP*, vol. 4, p. 294, Prop. 6) et (Newton, 1687, p. 79, Prop. XXII).
50. C'est à dire que ces longueurs sont données par une relation bilinéaire. Voir la note 52.
51. *Cf.* (*MP*, vol. 4, p. 308-313).

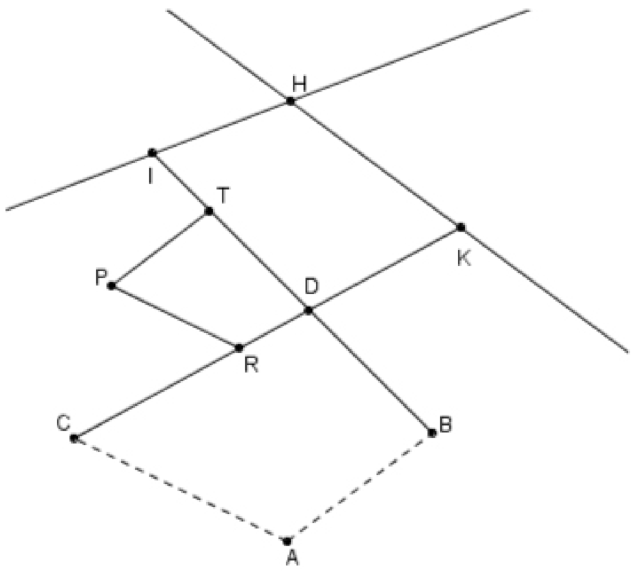

Figure 17. La Proposition 12

Sur la Figure 17, A et P sont deux points tracés par le mouvement du point D et $PR|||CA$, $PT|||AB$. Les lignes PR et PT sont données de position et HK est déterminé par PR par *simplicem geometriam* (c'est à dire que il y a une relation bilinéaire entre HK et PR). Cette relation s'étend à HI et donc à PT.[52] Si le point D vient à coïncider avec P, PR et PT deviennent nuls simultanément.[53] Si les point D vient à coïncider avec A, PR et PT deviennent dans le même temps infini.[54] Il s'ensuit que le rapport $\frac{PR}{PT}$ est donné. Le Théorème 2 nous assure que D décrit une conique. $\square$

Remarque 3 *La démonstration de ce théorème a un caractère projectif bien plus évident que les démonstrations des théorèmes précédents. En fait, ces considérations sur les limites sont spécifiques de la géométrie projective naissante et n'ont rien à faire avec la géométrie des Anciens,* bona pace *de Newton.*

7 L'*Arithmetica Universalis*

Dans l'*Arithmetica Universalis*, après la solution du problème de déterminer une conique par cinq points, une solution semblable à celles que nous avons vues, Newton propose une solution « per Algebram solam ».[55] Aux yeux d'un lecteur moderne la chose peut paraître banale. Mais en fait il s'agit d'une des premières caractérisations d'une courbe algébrique, à partir de la forme de son équation, en imposant le passage par un certain nombre de points donnés.

52. Soit $PR = x, PT = y$. On a donc à une relation de la forme $\alpha xy + \beta x + \gamma y + \delta = 0$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des constants.

53. Donc on doit avoir $\delta = 0$.

54. On doit avoir $\alpha = 0$.

55. *Cf.* (Newton, 1707, p. 215) et *Cf.* (*MP*, vol. 5, p. 314). En fait dans sa solution du *Problema astronomicun* (*cf.* (Newton, 1707, p. 182-189) et (*MP*, vol. 5, p. 266-279)) on trouve l'utilisation de l'équation d'une section conique de la forme $aa \perp bx \perp cxx = yy$ (où $\perp$ est utilisé pour $\pm$) de façon semblable. Mais ici les outils de l'algèbre sont assimilables à l'idée de l'analyse des Anciens et n'ont pas un relief théorique autonome. Sur les différentes solutions du *Problema astronomicum* on peur voir l'intéressante analyse donnée dans (Maronne, 2007, Partie III).

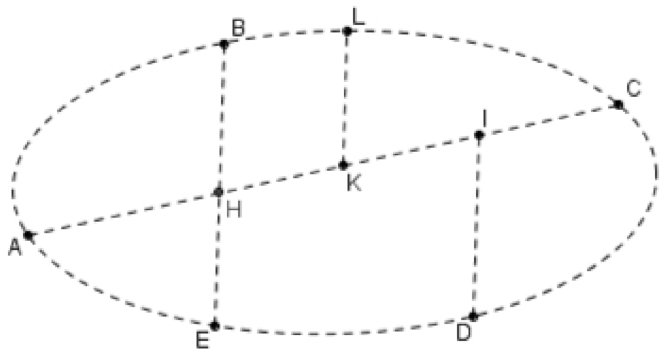

Figure 18. Une conique par cinq points « per Algebram »

Les points A, B, C, D, E sont donnés. On joint AC et BE et soit H le point d'intersection. On trace DI parallèle à BE qui coupe AC en I. Une nouvelle ligne KL, parallèle à BE à son tour, coupe AC en K et la conique en L. Newton pose $AK = x$, $KL = y$ et donne l'équation générale de la conique :

$$a + bx + cxx + dy + exy + yy = 0. \tag{15}$$

Après il déclare : « Supposons donc que le point L soit successivement en A, C, B, E, D et voyons ce qui s'ensuit. »[56] Si l'on a $A \equiv L$, en posant $x = 0$ et $y = 0$ dans (15) on a $a = 0$, ce qui réduit l'équation à

$$bx + cxx + dy + exy + yy = 0. \tag{16}$$

Un autre point convenable est évidemment C. Donc Newton pose $AC = f$, ce qui donne, en posant $x = f$ et $y = 0$ dans (16), $b = -cf$. Ce qui suit après est tout à fait clair. Cependant cette solution de Newton représente un pas important vers l'algébrisation de la géométrie.

8 Les dernières années

Dans les dernières années de la carrière scientifique de Newton, le problème de Pappus acquiert un rôle différent : il n'est plus un objet à traiter individuellement, en opposant (plus ou moins explicitement) sa solution à celle de Descartes. Il vient à être considéré à l'intérieur d'un discours méthodologique plus large où le vrai objectif est celui de construire une mathématique qui hérite de l'esprit de la mathématique classique. L'*analyse* doit être seulement une étape préliminaire à garder pour soi par le mathématicien. La *synthèse* finale doit seule être exposée.[57] En outre, non seulement le *style* de la mathématique ancienne doit être préservé, mais, dans la mesure du possible, les *outils* eux même de cette discipline doivent êtré employés.

Un bon exemple est donné par la solution du problème de Pappus dans l'*Analysis geometrica*, un manuscrit de 1691 reproduit dans (*MP*, vol. 7, p. 200-221).

56. *Ibid.*
57. On peut en trouver une exposition détaillée et profonde dans (Guicciardini, 2009).

La solution est toujours réduite à la détermination d'un cinquième point en plus des quatre donnés naturellement par le problème, mais cette fois c'est la *De sectione determinata* qui entre en scène, probablement par le moyen des notices sur ce texte données par Pappus.[58]

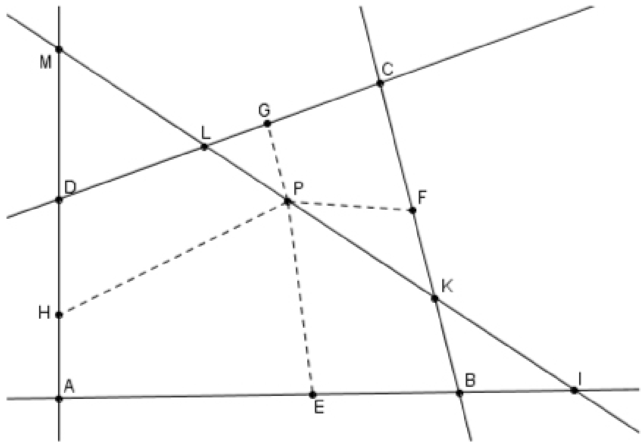

Figure 19. Newton et la "De Sectione Determinata"

Nous avons déjà rencontré le problème plusieurs fois.

Le lignes AB, BC, CD, DA sont donnés aussi bien que les angles

$$\widehat{PEB}, \widehat{PFC}, \widehat{PGC}, \widehat{PHD}$$

et l'on demande que $\dfrac{PE \times PF}{PG \times PH}$ soit donné. Mais cette fois Newton ne mène pas une ligne par un sommet du quadrilatère. Il choisit une ligne arbitraire MI et il cherche un point P sur cette ligne. Les rapports

$$\frac{PE}{PI}, \frac{PF}{PK}, \frac{PG}{PL}, \frac{PH}{PM}$$

sont donnés. Donc (en employant pour commodité un peu d'algèbre), on a aussi les rapports donnés

$$\frac{PE \times PF}{PI \times PK} = \lambda_1, \quad \frac{PG \times PH}{PL \times PM} = \lambda_2 \tag{17}$$

et donc

$$\frac{PI \times PK}{PL \times PM} \cdot \frac{PG \times PH}{PE \times PF} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \tag{18}$$

Mais le rapport $\dfrac{PG \times PH}{PE \times PF}$ est donné. Soit $\dfrac{PG \times PH}{PE \times PF} = \lambda$. Il s'ensuit que

$$\frac{PI \times PK}{PL \times PM} = \frac{\lambda_2}{\lambda \cdot \lambda_1} = \overline{\lambda}. \tag{19}$$

Nous sommes ramené au problème typique de la *De sectione determinata.* En termes modernes il s'agit simplement de résoudre une équation du second degré.[59] Encore une fois, Newton ne discute pas le fait qu'on a évidemment deux solutions.

58. Ou peut être par la reconstruction dans l'*Apollonius redivivus* de Anderson (Paris, 1612).

59. En termes de coordonnées : $I = (i), K = (k), L = (l), M = (m)$ et, en posant $P = (x)$, on a

$$(i - x)(k - x) = \overline{\lambda}(l - x)(m - x).$$

9 Conclusion

Newton a toujours considéré le problème de Pappus, dans le cas de quatre lignes, comme équivalent à la détermination d'une conique par cinq points. Il a complètement ignoré l'existence de deux solutions peut-être en considérant le fait que le choix d'une région du plan conduit naturellement à la détermination d'une seule d'entre elles. Mais il n'a jamais explicité cette stratégie.

Toutefois ce problème lui a donné l'occasion de produire sa magistrale construction organique et, strictement connexe avec cette construction, la génération homographique des coniques.

Toutefois ces résultats, soit sont restés à l'état de manuscrits, soit ont été édités de manière inadéquate avant l'édition de Whiteside ; ce qui ne leur a pas donné la possibilité d'avoir les conséquences mathématiques qui leur semblent inhérentes. En plus, la présentation des solutions du problème de Pappus comme la restauration de la « vraie mathématique » des Anciens a porté ombrage aux éléments novateurs. Si l'on regarde l'admirable Théorème 6, on voit que les éléments à l'infini ont un rôle considérable aussi bien que les relations bilinéaires. La connexion forcée aux mathématiques des Anciens a empêché ces travaux de trouver leur place propre dans le développement des mathématiques.

Références

G. Belgioioso, G. Cimino, P. Costabel et G. Papuli, éditeurs. *Descartes : il metodo e i Saggi. Atti del Convegno per il* 350^o *anniversario della pubblicazione del* Discours de la métode *e degli* Essais, Roma, 1990. Istituto della Enciclopedia Italiana.

M. Chasles : *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie.* Gautier-Villars, Paris, 1875. Seconde édition, conforme à la première.

R. Descartes : *Geometria à Renato Descartes anno 1637 Gallice edita ; postea autem Unà cum Notis Florimondi De Beaune [...]. Operâ atque Studio Francisci à Schooten[...].* Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios, Amstelædami, 1659–61.

S. Di Sieno et M. Galuzzi : La quinta sezione del primo Libro dei *Principia*. Newton e il problema di Pappo. *Archives internationales d'histoire des sciences*, 39:51–68, 1989.

M. Galuzzi : I *Marginalia* di Newton alla seconda edizione latina della *Geometria* di Descartes e i problemi ad essi collegati. *In* (Belgioioso *et al.*, 1990), pages 387–417, 1990.

M. Galuzzi et D. Rovelli : Nouveauté et modernité dans les mathématiques de Descartes. A paraître.

W. J. Greenstreet, éditeur. *Isaac Newton. 1642-1727*, London, 1927. G. Bell and Sons, LTD.

N. Guicciardini : *Reading the Principia.* Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

N. Guicciardini : *Isaac Newton on Mathematical Certainty and Method.* MIT Press, Cambridge, Mass., 2009.

T. L. Heath : *Apollonius of Perga. Treatise on Conic Sections. Edited in modern notation with introductions including an essay on the earlier history of the subject by T.L. Heath.* Cambridge at the University Press, Cambridge, 1896.

S. Maronne : La théorie des courbes et des équations dans la *Géométrie* cartesienne, 2007. Thèse de doctorat de l'Université Paris 7 en Épistémologie, Histoire des Sciences.

J. J. Milne : Newton's Contribution to the Geometry of Conics. *In Greenstreet (1927)*, pages 96–114, 1927.

I. Newton : *Philosophiæ naturalis Principia Mathematica.* Iussu Societatis regiae ac Typis Josephi Streater, 1687. Impression anastaltique Culture et Civilisation, Bruxelles, 1965.

I. Newton : *Arithmetica Universalis ; sive de Compositione et Resolutione Arithmetica Liber.* Typis Academicis, Cantabrigiæ, 1707.

I. Newton : *The Mathematical Papers of Isaac Newton,* edited by D. T. Whiteside. Cambridge University Press, Cambridge, 1967-1981.

I. Newton : *Principes mathématiques de la philosphie naturelle.* Dunod, Paris, 2005. Préface de Voltaire. Traduction par la Marquise du Châtelet.

M. Panza : *Newton et les origines de l'analyse : 1664-1666.* Blanchard, Paris, 2005.

B. Pascal : *Œuvres complètes*. Aux éditions du seuil, Paris, 1963. Préface d'Henri Gouhier. Présentation et notes de Louis Lafuma.

E. Sergio : *Verità matematiche e forme della natura da Galileo a Newton*. Aracne, Roma, 2006.

R. Taton : L'initiation de Leibniz à la géométrie (1672–1676). *Studia Leibnitiana Suppl., XVII*, pages 103–129, 1978. In (Taton, 2000) ; pp. 159-185.

R. Taton : *Études d'histoire des sciences*. Brepols, Turnhout, 2000.

C. Taylor : *An Introduction to the Ancient and Modern Geometry of Conics*. Deighton Bell and Co, Cambridge, 1881.

H. W. Turnbull : *The Correspondance of Isaac Newton*, volume 1. Cambridge University Press, Cambridge, 1959.

D. T. Whiteside : Patterns of Mathematical Thought in the Later Seventeenth Century. *Archive for history of exact sciences*, 1:197–388, 1961.