LA PREUVE CARTESIENNE DE LA QUADRATURE DU CERCLE

Davide CRIPPA
Equipe REHSEIS (CNRS - Université Paris Diderot)

9 septembre 2009

Résumé

Le problème de la quadrature du cercle, à savoir, le problème de construire un carré ayant même aire que celle d'un cercle donné, restait un problème ouvert parmi les mathématiciens du début du XVII^{ème} siècle. René Descartes (1596-1650) en donna une solution dans les années 1625-1628 dont il déclara lui-même qu'elle n'était pas acceptable.

Cet article examine cette solution, en s'appuyant sur une analyse donnée un siècle plus tard par Euler ainsi que sur une solution connue depuis l'antiquité et rapportée par Pappus. On s'interrogera ensuite sur les raisons qui ont amené Descartes à exclure les deux constructions en tant que non acceptables, par rapport à l'idéal d'exactitude explicité dans *La Géométrie* (1637).

1 La question de la quadrature du cercle

Pendant la première moitié du XVII^{ème} siècle le problème de savoir si la quadrature du cercle est possible, à savoir s'il est possible de construire géométriquement un carré d'aire égale à celle d'un cercle donné, restait un problème ouvert dans l'agenda des mathématiciens [13].

Il est peut être surprenant de voir que face à la prudence montrée par exemple par Marin Mersenne (1588-1648) [1], l'opinion de Descartes par rapport à la possibilité de la quadrature du cercle n'admet pas d'espace pour le doute. Ainsi, dans une lettre écrite en 1638, exposant à Mersenne quels genres de problèmes sont à placer hors de la géométrie, il juge de manière tranchante que la quadrature du cercle est impossible :

> Mais, pour les questions de Géométrie qu'ils ne peuvent soudre & croient ne pouvoir estre resolues par ma methode, qu'ils vous prometent de me proposer, je trouve que c'est un parti qui m'est desavantageux. Car premièrement, c'est contre le style des Geometres de proposer aux autres des questions qu'ils ne peuvent soudre eux memes. Puis, il y en a d'impossibles, comme la quadrature du cercle &c. ; il y en a d'autres qui, bien qu'ils soient possibles, sont toutefois au delà des colonnes que j'ay posees,

1. "Cette question est extrêmement difficile, car l'on trouve d'excellents géomètres qui soutiennent qu'il n'est pas possible de trouver un carré dont la surface soit égale à celle du cercle, et d'autres qui soutiennent le contraire (...) Quant à la quadrature du cercle, nul n'a démonstré qu'elle soit possible, ou impossible ; ce qui donne à certains l'éspérance de la rencontrer (...)". Mersenne [14].

non à cause qu'il faut d'autres regles ou plus d'esprit, mais a cause qu'il faut plus de travail (...) il y en a qui appartiennent à l'arithmetique et non a la Geometrie, comme celles de Diophante ... [2]

En examinant de plus près le problème, observons que la désignation d'un problème par le terme *impossible* demande une clarification. Des solutions à la quadrature du cercle avaient été produites depuis l'antiquité : ainsi, d'après le témoignage de Pappus dans le quatrième livre de la *Collection mathématique,* témoignage que Descartes connaissait dès ses débuts en mathématiques, les anciens géomètres avaient essayé de résoudre la quadrature du cercle par la construction de certaines courbes, telle que la quadratrice (dont l'introduction est généralement attribuée à Hippias,Voir *Encart 1*).

Figure 1

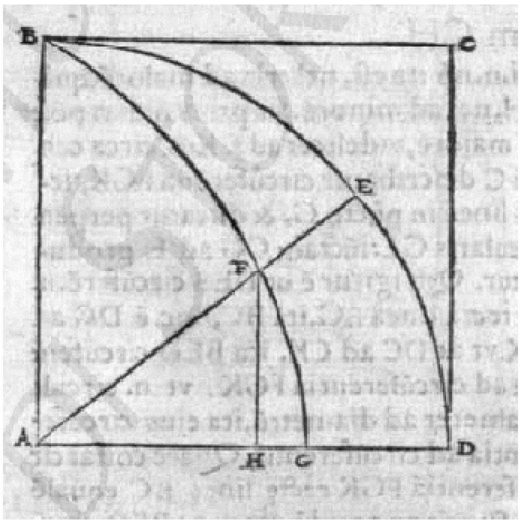


Figure extraite de Federicus Commandinus, editor. Pappus Alexandrini Mathematic collectiones a Federico Commandino [8].

Par ailleurs, parmi les manuscrits de Descartes publiés avec le titre *Excerpta ex MSS. R. Des-Cartes* dans le volume *Opuscola posthuma physica et mathematica* (Amstelodami, ex typographiâ P. & J. Blaeu, 1701 1701) [3], on peut trouver un fragment (le numéro 6), datable aux années 1625-1628, contenant une solution au problème de la quadrature du cercle, due à Descartes, et différente de celle de Pappus.

Dans cet article, je donnerai en premier lieu une reconstruction de la quadrature contenue dans le fragment 6 des *Opuscula.* Ensuite, je discuterai les raisons pour lesquelles Descartes n'accepta ni la solution que l'on trouve dans la *Collection mathématique* de Pappus, ni celle qu'il proposa lui même, comme légitimes par rapport à certains standards d'exactitude en force dans *La Géométrie* de 1637.

2. ([11], vol. II, p. 91).
3. [11], vol X, pp. 278-328

2 Ad quadrandum circulum

2.1 Discussion du fragment cartésien

Il est à noter que Descartes ne reviendra jamais sur son texte sur la quadrature du cercle au cours de sa carrière. La première référence à cette démonstration est attribuable à Leonhard Euler (1707-1783), qui lui dédie un commentaire publié en 1763 dans les comptes rendus de l'académie de St Petersburgh : *Annotationes in locum quendam Cartesii ad circuli quadraturam spectantem*[4].

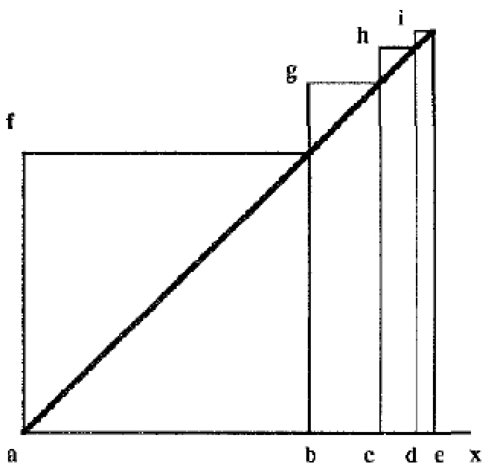
Le fragment dans lequel Descartes présente sa quadrature est bref, et il peut être cité en entier :

> CIRCULI QUADRATIO. Ad quadrandum circulum nihil aptius invenio quam si dato quadrato *bf* adiungatur rectangulum *cg* comprehensum sub lineis *ac* & *cb*,quod sit aequale quartae parti precedentis ; item rectangulum *dh*, factum ex lineis da, dc aequale quartae parti precedentis ; & eodem modo rectangulum ei, atque alia infinita usque ad *x* ; quae omnia simul aequanbantur tertiae parti quadrati *bf*. Et haec linea *ax* erit diameter circuli, cujus circonferentia aequalis est circumferentiae huius quadrati *bf*, est autem ac diameter circuli octagono, quadrato *bf* isoperimetro, inscripti ; *ad* diameter circuli inscripti figurae 16 laterum, ae diameter circuli inscripti figurae 32 laterum, quadrato *bf* isoperimetrae, & sic in infinitum[5].
>
> LA QUADRATURE DU CERCLE. Pour carrer le cercle, je ne trouve rien de plus apte que, étant donné un carré *bf*, d'ajouter le rectangle *cg* délimité par les lignes *ac* et *cb*, égale à la quatrième partie du précédent ; et ensuite le rectangle *dh*, formé par les segments *da, dc* égale à la quatrième partie du précédent, et de la même manière d'ajouter le rectangle *ei*, *et ajouter ainsi d'autres rectangles jusqu'à l'infini*, jusqu'à atteindre le point *x*. Tous ensembles, ils feront la troisième partie du carré *bf*. Et cette ligne *ax* sera le diamètre du cercle, dont la circonférence est égale au périmètre de ce carré *bf*. D'autre part, *ac* est le diamètre du cercle inscrit dans l'octagone isopérimètre au carré *bf*, ad le diamètre inscrit à la figure de 16 côtés, ae le diamètre du cercle inscrit dans la figure de 32 côtés, isopérimètre au carré *bf* ; et ainsi à l'infini.

4. Une copie des quatre premières pages de l'édition de 1701, contenant le fragment sur la quadrature, a été trouvé parmi les cartes de Huyghens dans la bibliothèque de Leyde (Huyg. 29a folia in-4) : voir aussi [11], vol X, p. 285. D'autre part, Euler se réfère au fragment cartésien par le titre de l'éditio *Princeps* de 1701 : "In Excerptis ex Manuscriptis CARTESII paucis quidem verbis refertur constructio quidem geometrica promptissime ad circuli veram dimensionem appropinquans...", ("dans les Excerpta, parmi les manuscrits de Descartes, une construction géométrique qui approxime très rapidement la vraie mesure du cercle est illustrée en peu de mots") ce qui paraît indiquer sa familiarité avec celle ci.

5. LA QUADRATURE DU CERCLE. Pour carrer le cercle, je ne trouve rien de plus apte que, étant donné un carré bf, d'ajouter le rectangle cg délimité par les lignes ac et cb, égale à la quatrième partie du précédent ; et ensuite le rectangle dh, formé par les segments da, dc égale à la quatrième partie du précédent, et de la même manière d'ajouter le rectangle ei, *et ajouter ainsi d'autres rectangles jusqu'à l'infini*, jusqu'à atteindre le point x. Tous ensemble, ils feront la troisième partie du carré bf. Et cette ligne ax sera le diamètre du cercle, dont la circonférence est égale au périmètre de ce carré bf. D'autre part, ac est le diamètre du cercle inscrit dans l'octagone isopérimètre au carré bf, ad le diamètre inscrit à la figure de 16 côtés, ae le diamètre du cercle inscrit dans la figure de 32 côtés, isopérimètre au carré bf ; et ainsi à l'infini.

Figure 2



Le texte se prête à être divisé en deux parties : dans la première, Descartes présente la construction d'une suite infinie des rectangles *cg, dh, ei...* tels que l'aire de chacun soit égal à $\frac{1}{4}$ du précedent, et l'aire du premier à un quart d'un carré donné *bf*, pour en conclure que la somme de leurs aires équivaut à un tiers de l'aire de *bf*[6]. Dans la deuxième, il affirme que la suite de ces rectangles, construits comme sur la figure, détermine les diamètres des cercles inscrits dans les polygônes réguliers de 2^n côtés (pour $n \geq 2$), isopérimètres au carré de périmètre donné *bf.* De cette manière le segment maximal ax déterminera la mesure du diamètre du cercle inscrit dans la figure isopérimètre d'aire majeure : ax sera donc, le diamètre du cercle isopérimètre au carré *bf*[7]

Le problème de Descartes n'est ni celui de la quadrature du cercle, ni celui de la rectification de la circonférence, et il peut être resumé ainsi : étant donné la mesure de la circonférence, il est demandé de trouver son diamètre. Néanmoins, notons que Descartes donne au fragment le titre : "CIRCULI QUADRATIO" (quadrature du cercle). L'équivalence entre les deux résultats peut être établie sur la base de la première proposition du traité archimédien de la *Mesure du cercle*, connue parmi les mathématiciens du XVII^{ème} siècle[8], et qu'on pourra formuler comme il suit (voir *Encart 2*) :

6. A savoir, Descartes nous donne la somme de la progression géométrique de raison $\frac{1}{4}$. Il est raisonnable de supposer que Descartes avait eu connaissance de sa résolution, soit par le biais de la quadrature de la parabole d'Archimède, soit à travers les calculateurs médiévaux. Ainsi C. Boyer observe : "It was apparent to him [Archimedes] that the series 1+1/4.... approached 4/3 in such a way that the difference could be made, by taking a sufficiently large number of terms, less than any specified quantity. He did not, however, go so far as to dene 4/3 as the sum of the infinite series, for this would have exposed his thought to the paradoxes of Zeno, unless he had invoked the precisely formulated concept of a limit as given in the nineteenth century. The Scholastic discussions of the fourtheenth century, on the other hand ; referred frequently to the infinite, both as actuality and potentiality..."([5], p. 77).

7. Ce résultat était *connu par* Descartes, qui le mentionne dans les *Regulae ad directionem ingenii.* [11] vol X, pp.388-389.

8. "La première édition du XVI^{ème} siècle fut donnée à Venise par Lucas Gauricus. Elle comporte le traité de la *Quadrature de la parabole* et celui de la *Dimension du cercle* dans une traduction latine que l'on a pu identifier récemment avec celle de Guillaume de Moerbeke, faite au XIII^{ème} siècle. Cette édition rarissime porte le titre : *Campani viri clarissimi Tetragonismus, id est circuli quadratura, Romae edita cum additionibus Gaurici ; Archimedis Syracusani Tetragonismus ; de quadratura circuli secundum Boetium.* Venetiis, 1503, pet. in-4°". [21], vol. I.

> Tout cercle a même aire que le triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs respectives le rayon et la circonférence de ce cercle. [9].

Sur la base de cette équivalence, si on connaît le rayon d'un cercle donné et la mesure de la circonférence, on peut construire une figure "rectiligne" d'aire égale à celle du cercle. Et comme le fragment de Descartes est censé offrir la mesure du rayon (ou du diamètre) à partir de celle de la circonférence, la quadrature du cercle peut être résolue par conséquent [10].

Par contre, aucune indication dans le texte rend explicite la relation entre la construction des rectangles dont les aires sont en succession géométrique, et le fait que leurs bases forment la suite des diamètres, respectivement, du cercle et des polygones réguliers à 8, 16, 32, 64 côtés, *sic in infinitum*, isopérimètres au carré bf de départ.

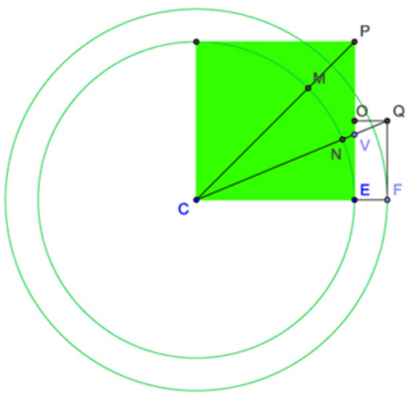
Afin de donner une explication de la manière dont les deux moments de la démonstration cartésienne s'agencent, j'utiliserai le commentaire donné par Euler en 1763.

2.2 Le commentaire d'Euler

Au préalable Euler énonce un problème qui une fois résolu expliquera la relation entre la construction cartésienne des rectangles et la succession des diamètres des cercles inscrits dans les polygones aux côtés croissants en mesure double. Le problème peut être énoncé comme il suit :

> Étant donné un cercle inscrit dans un polygone régulier à n cotés, trouver un deuxième cercle, tel que, si l'on circonscrit autour de celui-ci un polygone à $2n$ côtés, les deux polygones seront isopérimètres.

Figure 3



9. [1], p. 127.

10. En effet, l'aire d'un triangle est égale à la moitié de l'aire d'un parallélogramme ayant même base et même hauteur. Ensuite, un parallélogramme peut être transformé en un carré de même aire, en vertu de la proposition 14 du livre II des Eléments d'Euclide ("Construire un carré égal à une figure rectiligne"). Ce passage était considéré tout à fait automatique par les mathématiciens de l'antiquité, tant que le problème de la quadrature du cercle était réductible à celui de la "triangulation du cercle", en vertu de cette équivalence entre polygones.

En procédant par une analyse dans le style de la géométrie ancienne, Euler suppose le problème résolu. Ainsi, il donne la première circonférence MNE. Le cercle a pour centre C et rayon CE. Le segment EP est la moitié du côté d'un polygone regulier circonscrit à MNE. Euler construit ensuite QF, moitié du côté du deuxième polygone aux côtés doubles du premier, et CF, le rayon du cercle à déterminer. On aura par conséquent $QF = \frac{1}{2}EP$, et, puisque le cercle inscrit dans le polygone à $2n$ côtés est plus grand que le cercle MNE, on aura $CE < CF$. Soit O le milieu du segment EP, on aura donc que QO est parallèle à EF. Enfin, soit V le point d'intersection entre le rayon CQ et le coté EP. Comme V tombe entre O et E, on aura $EV < EO$. Euler peut ensuite déduire les égalités $\frac{EV}{CE} = \frac{FQ}{CF}$ et $\frac{EV}{CE} = \frac{EP}{CE+CP}$.

La première égalité peut être déduite de la similitude entre les triangles VCE et QFC, la deuxième demande un peu plus de travail [11].

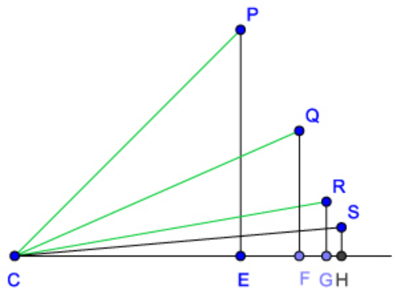
A partir de ces proportions, l'égalité suivante peut être facilement déduite : $CF.EF = \frac{1}{4}(CP^2 - CE^2) = \frac{1}{4}EP^2$. Puisque $FQ = \frac{1}{2}EP$, et que $\frac{FQ}{CF} = \frac{EP}{CE+CP}$, on aura de même : $CF = \frac{1}{2}(CE + CP)$. Ensuite, en enlevant CE des deux membres de la dérnière égalité on aura : $EF = \frac{1}{2}(CP - CE)$**.**

Par conséquent, le produit CF.EF sera égal à : $\frac{1}{4}(CP^2 - CE^2)$. Le point F sera finalement défini de telle manière que le rectangle de côtés CF et EF, soit égal à un quart du carré construit sur EP.

Comme on a EO=QF=$\frac{1}{2}$EP, que l'angle QCF= $\frac{1}{2}$PCF, et que EP est perpendiculaire à CF, le point F pourra être trouvé comme projeté ortogonal sur CE de l'intersection entre la droite CV, bissectrice de l'angle PCE, et la médiatrice du segment EP.

Une fois résolu le premier problème, Euler démontre la construction cartésienne. Soient CE, CF, CG, CH ... les rayons des cercles inscrits, respectivement, dans un carré, un octagone, un 16-gone, le 32-gone ... isopérimètres. Considérons ensuite les segments EP, FQ, GR, HS, respectivement, demi-côtés du carré, de l'octagone, du 16-gone... . On aura, sur la base du résultat précédent : $FQ = \frac{1}{2}EP$, $GR = \frac{1}{2}FQ = \frac{1}{4}EP$, $HS = \frac{1}{2}GR = \frac{1}{4}FQ = \frac{1}{8}EP$...

Figure 4



11. Il suffit de considérer : $\frac{EV}{CE} = \tan ECV$; $\frac{EP}{CE} = \tan 2ECV$; $\frac{EP}{CP} = \sin 2ECV$. Or, par la formule de duplication de la tangente on aura : $\tan 2ECV = \frac{2\tan ECV}{1-\tan^2 ECV}$, et $\sin 2ECV = \frac{2\tan ECV}{1+\tan^2 ECV}$. En posant $\tan ECV = t$ on aura : $\frac{EP}{CE} = \frac{2t}{1-t^2}$, $\frac{EP}{CP} = \frac{2t}{1+t^2}$. Par conséquent : $\frac{CE+CP}{EP} = \frac{1-t^2+1+t^2}{2t} = \frac{1}{t} = \frac{CE}{EV}$.

On sait aussi, du problème précédent, que : $CF.EF = \frac{1}{4}EP^2 = FQ^2$. De la même manière, on aura :

$$CG.FG = \frac{1}{4}FQ^2 = \frac{1}{4}CF.EF = GR^2 = \frac{1}{16}EP^2$$
$$CH.GH = \frac{1}{4}GR^2 = \frac{1}{4}CG.FG = HS^2 = \frac{1}{32}EP^2, \textit{ etc.}$$

En doublant les demi-côtés des polygones, nous pourrons définir une succession de points F, G, H, I ... tels que les rectangles construits de côtés CG, FG et CH, GH, etc. (que je noterai r(CG, FG), r(CH, GH), etc.) seront égaux à un quart des carrés respectifs de côté EP, QF, etc. (que je noterai q(EP), q(QF), etc.). De cette manière on aura :

$$r(CF, EF) = \frac{1}{4}EP^2$$
$$r(CG, FG) = \frac{1}{16}EP^2$$
$$r(CH, GH) = \frac{1}{32}EP^2$$

De cette manière, la somme des rectangles correspondra à la limite de la série géométrique de raison $\frac{1}{4}$, pour n tendant à l'infini, multipliée par l'aire du carré de côté EP : donc $\frac{1}{3}\mathrm{EP}^2$, comme dans la construction cartésienne. Notons aussi que la solution du problème précédent donne une manière de construire la succession des points F, G, H, I ... à la règle et au compas. Le point Q est obtenu par intersection entre la médiatrice de EP et la bissectrice de PCE. Le point R est obtenu par intersection entre la médiatrice de QF (moitié de EP) et la bissectrice de l'angle QCE (la moitié de PCE), etc. Ainsi chaque point est construit par intersection entre la médiatrice d'un segment de longueur $\frac{PE}{2^n}$ et la bissectrice d'un angle de mesure $\frac{PCE}{2^n}$. Enfin, les points E, F, G,... sont obtenus par projection orthogonale des points Q, R, S, ...

Je remarque que Euler tient à séparer le commentaire de la proposition cartésienne de ses développements analytiques, données dans une deuxième partie du commentaire, et que sa reconstruction du passage de Descartes ne présuppose aucune connaissance technique qui ne fusse disponible à Descartes lui-même. Il est donc possible que ce dernier ait suivi cette voie pour construire la succession de rectangles *cg, dh, ei ...*

Pour ce qui concerne l'ordre suivi par Descartes dans l'exposition de ses résultats, Pierre Costabel a voulu voir dans "la préférence explicite (...) pour la considération des aires le souci de justifier l'existence de la limite *Cx* avant même de passer à l'interprétation de cette limite comme mesure liée à un polygone régulier" [12]. Bien que les éléments pour conclure que Descartes puisse avoir abouti, à un certain moment de sa carrière, à une notion de passage à la limite sont insuffisants, on peut faire l'hypothèse, suggerée par Whiteside [13], qu'il se soit servi de la série de raison $\frac{1}{4}$ comme série de comparaison pour tester la convergence de la méthode des isopérimètres [14]. Selon cette hypothèse, Descartes aurait pu raisonner comme il suit : si l'aire de la figure formée par le carré *bf* et la succession des rectangles est égale à une quantité finie (notamment, $\frac{4}{3}bf$), sa base *Cx* sera égale à une quantité finie aussi (voir Figure 2). Comme on sait que la première condition vaut, on aura aussi la seconde, et donc, on pourra conclure que la succession des apothèmes tend vers *la limite Cx*, diamètre du cercle isopérimètre au carré de départ.

12. [9]
13. [22]
14. Un procédé similaire est appliqué, probablement tout à fait inconsciemment, par Brouncker. [22]

3 Le problème de l'exactitude

3.1 Exactitude et recévabilité

La solution d'un problème ainsi que son acceptation à l'intérieur d'une communauté mathématique ne dépendent pas seulement de l'absence d'erreurs dans le calcul ou de l'absence d'arguments fallacieux dans la structure logico argumentative : souvent, l'emploi de procédures de résolution dépend de leur recevabilité par rapport à des standards extra-mathématiques [15]. A ce propos, Henk Bos a montré que parmi les mathématiciens, entre XVI^{ème} et XVII^{ème} siècle, un ensemble de critères, qu'il appelle exactitude géométrique, a été au centre d'un important débât. Les points principaux de ce débât concernaient les moyens nécessaires et suffisants pour considérer un objet comme connu, accepter ou refuser une procédure de construction d'un object géométrique ou la solution d'un problème de géométrie. [16]

Dans les mathématiques du XVII^{ème} siècle, le problème de l'exactitude géométrique suit une double articulation [18] : il consisterait premièrement dans la fixation de procédures admissibles pour résoudre des problèmes, qui, tout en étant formulées par l'emploi de concepts introduits dans les livres géométriques des *Eléments*, résistent à une solution par la règle et le compas (comme la quadrature du cercle), et deuxièmement dans la détermination des conditions d'admissibilité de ces procédures.

Dans *La Géométrie* de Descartes, en particulier, les deux moments de la question sont entrelacés. Comme la solution d'un problème mathématique est conçue par celui-ci en termes de construction d'un point ou d'un lieu par des courbes, sa réponse au problème de l'exactitude consiste dans la formulation d'un critère de recevabilité des courbes, à son tour fondé sur des contraintes au niveau de leur construction. Le passage suivant illustre bien les considérations précédentes :

> Mais il est, ce me semble, très clair, que prenant comme on fait pour Géométrique ce qui est precis et exact, et pour mécanique ce qui ne l'est pas ; et considérant la Geometrie comme une science, qui enseigne généralement à connoitre la mesure de tous les cors, on n'en doit pas plutot exclure les lignes les plus composées que les plus simples, pourvu qu'on les puisse imaginer etre descrites par un mouvement continu ou par plusieurs qui s'entresuivent et dont les derniers soient entièrement reglés par ceux qui les précèdent, car par ce moyen on peut toujours avoir une connaissance exacte de leur mesure [17].

15. J'emploie le mot extra-mathématique en suivant l'usage de H. Bos : "it should be stressed that the answer to this question cannot be derived from axioms within an accepted corpus of mathematical knowledge (...) any answer to the question of acceptable means of constructions necesssarily has the nature of a chosen postulate : the reason for its choice lie outside the realm of proven argument. The question whether these reasons are correct or valid has, strictly speaking, no meaning. Mathematicians are free to accept or reject any proposed decision on the question of which means of construction are legitimate in geometry and which are not". [3], p. 8.

16. "The early modern mathematical literature offers an at first bewildering variety of geometrical constructions and of arguments about their legitimacy (...) these arguments concern a meta, or extra mathematical question ; therefore, they cannot be classified according to their correctness...". [3], p. 17.

17. [10], p. 316

La notion de constructibilité que Descartes déploie ici pourrait etre interprétée comme la tentative de prendre les clauses constructives fixées dans les postulats d'Euclide comme base pour des constructions récursives [18], aboutissant à d'autres courbes, dont le caractère effectif ne saurait pas être mis en doute. Bien évidemment, pour Descartes aussi, parmi les courbes reçues en géométrie on doit compter cercles et droites, construits à la règle et au compas. Ensuite, par ces mêmes constructions à la règle et au compas, on peut obtenir certaines configurations de droites et de cercles, qui formeront des sytèmes articulés. Si on soumet ces systèmes à des mouvements appropriés, certains de leurs points, forcés à se déplacer sur des trajectoires univoques, traceront de nouvelles courbes. Ces courbes *composées* seront recevables en géométrie. A leur tour, seront recevables toutes les courbes engendrées par des systèmes articulés et soumis à des mouvements qui combinent les courbes précédemment construites entre elles et avec cercles et droites. On appelera un tel critère de recevabilité, pour souligner sa continuité avec les clauses constructives euclidiennes, critère par *règle et compas reitérés* [17].

Mais qu'est ce que signifie être soumis à des mouvements appropriés ? Une caractérisation pourrait être la suivante : un système articulé est soumis à un mouvement approprié si les propriétés géométriques de la courbe tracée par ce système ne dépendent pas des caractéristiques cinématiques du mouvement. Ainsi, la construction de la quadratrice présentée par Pappus ne pourra pas garantir l'admissibilité de cette courbe en géométrie, parce que la trajectoire du point qui trace la courbe dépend de la vitesse des axes mouvants. Il n'est donc pas étonnant que sur cette base, Descartes ne reçoive pas comme acceptable la quadrature du cercle résolue par la quadratrice.

A la différence de cette construction, pourtant, la procédure appliquée par Descartes pour sa quadrature ne demande l'application d'aucune courbe, à part les droites et les arcs de cercle impliqués dans la construction des rectangles (nous avons en fait montré que chacun d'eux peut être obtenu par des bisections successives de segments et d'angles). Il s'agit donc d'une procédure euclidienne, à la règle et au compas. Il est vrai qu'elle pourrait être jugé approximée, et donc *non exacte*. Néanmoins cette conclusion, bien que *prima facie* raisonnable, invoque une justification : pour quelle raison cette procédure ne se conforme pas au critère de recevabilité précédemment exposé ?

D'autre part, tandis que ce critère établit qu'une courbe est recevable s'il existe un système articulé d'engendrement qui obéit à certains réquisits, Descartes imagine et expose, toujours dans *La Géométrie*, deux autres systèmes d'engendrement de courbes : la construction point par point, et celle par des cordes.

3.2 Constructions point par point

Dans cet article, je me limiterai à considérer le premier type de construction, qui est introduit premièrement en relation aux problèmes indeterminés, dans lesquels un lieu géométrique est à déterminer par des conditions, exprimées par une équation, que tous les points d'un lieu doivent satisfaire. La solution d'un problème indeterminée peut donc être construite comme Descartes l'explique :

> ..on peut prendre à discretion l'une des deux quantités inconnues x ou y et chercher l'autre par cete Equation .. mesme prenant successivement infinies diverses

18. cfr. [17]

grandeurs pour la ligne y on en trouvera aussi innies pour la ligne x, et ainsi on aura une infinité de divers poins...par les moyens desquels on décrira la ligne courbe demandée... ([10], p. 313).

En d'autres termes, une construction point par point d'un lieu est obtenue en prenant un nombre arbitraire de valeurs pour l'une des deux inconnues (par exemple, y), pour se ramener ainsi à une équation à une seule inconnue (par *exemple*, x) qui peut être résolue géométriquement, selon les méthodes illustrées au premier et au troisième livre. Par ce processus de construction on peut déterminer un réseau formé par un nombre arbitraire de points distribués sur une courbe.

Toujours au deuxième livre, Descartes présente la construction point par point comme méthode de construction générale des courbes, sans référence au contexte du problème de Pappus. Le cas traité dans la *Géométrie*, est celui de la construction des ovales. Parmi les différentes manière de construire ces courbes, je décrirai la suivante :

Figure 5

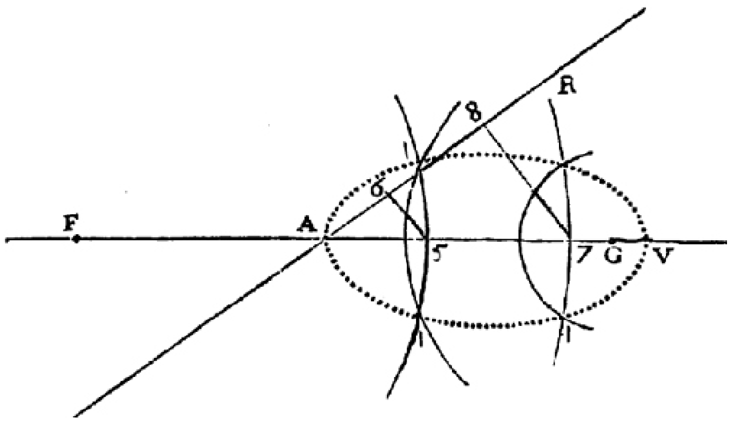


Figure extraite de La Géométrie, Descartes, [11] p. 352

Soient FG et AR deux lignes qui se croisent en A selon un angle donné. A gît entre F et G, de manière que le rapport entre AF et AG soit donné aussi (pris *à discretion*, observe Descartes). On pose ensuite AR = AG. Prenons le point 5, arbitrairement choisi sur AG, et traçons le cercle de centre F et rayon F5. Traçons le segment 56, perpendiculaire à AR, et ensuite le cercle de centre G et rayon R6. Les deux points d'intersection des deux cercles de rayon respectifs F5 et R6 appartiennent à l'ovale. Réitérant la même construction, en partant d'autres points arbitrairement choisis sur AG (comme 7), on peut déterminer un réseau formé par un nombre arbitraire de points distribués sur la même courbe. Ce n'est pas du tout immédiat de considérer ce procédé de construction autant exact et précis qu'un procédé de construction obtenu par un système articulé, puisque il faut vérifier, dans le cas des constructions point par point, que tous les points de la courbe ont été ainsi construits. De plus, lorsqu'il traita de ce type de construction, Descartes devait avoir à l'esprit les remarques de certains mathématiciens [19] qui avaient critiqué cette façon de construire une courbe parce qu'elle n'offre pas la courbe dans sa totalité, au contraire d'un *acte de mouvement*, qui donnerait la totalité des points d'une courbe sans laisser *de trous* dans son tracé.

19. Kepler et Snellius, entre autres. Voir [3]

3.3 Constructions génériques et spécifiques

Sur quel fondement Descartes s'appuie-t-il donc pour déduire la non recevabilité de la procédure de quadrature à partir de sa solution au problème de l'exactitude et en même temps la recevabilité de sa procédure de construction point par point des courbes ?

Pour répondre à cette question, je commencerai par montrer qu'en traitant des constructions point par point, Descartes distingue deux façons de construire une courbe :

> ...ayant expliqué la façon de trouver une infinité de poins par ou elles [les courbes] passent, je pense avoir assés donné les moyens de les décrire. Mesme, il est a propos de remarquer qu il y a grande diference entre cete façon de trouver plusieurs poins pour tracer une ligne courbe, et celle dont on se sert pour la spirale, et ses semblables. Car par [cete] dernière on ne trouve pas indifféremment tous les points de la ligne qu'on cherche, mais seulement ceux qui peuvent être determinés par quelque mesure plus simple, que celle qui est requise pour la composer, et ainsi a proprement parler, on ne trouve pas un de ses points, c'est à dire pas un de ceux qui luy sont tellement propres qu'ils ne puissent estre trouvés que par elle [20].

La première façon, dont la construction des ovales est un exemple permet de construire indifféremment tous les points : Henk Bos parle d'une méthode *générique* [21] ; alors que la deuxième n'offre qu'un sous-ensemble des points de la courbe, obtenus par des moyens plus simples que ceux demandés pour sa construction. Cette deuxième façon est appelée méthode *spécifique*, toujours par Henk Bos [22].

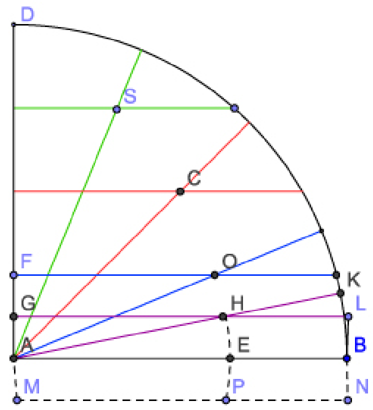
3.3.1 Clavius

Descartes, tout en faisant allusion à une méthode dont on se sert *pour la spirale* et ses semblables, ne donne aucun exemple de construction spécifique. Par ailleurs, de nombreuses études [23] ont montré qu'il avait probablement à l'esprit la construction point par point de la quadratrice, offerte par Christophorus Clavius (1538-1612) dans le livre VI de ses *Commentaria* aux *Eléments* d'Euclide, publiés en 1598 (le texte spécifique fut reédité dans la *Geometria practica* de 1604). Voici comment la construction de la quadratrice est décrite :

> quare nos Geometrice eandem lineam Quadratricem describemus hoc modo. Arcus BD in quotius partes aequales dividatur, & latus utrum AD, BC in totidem aequales partes. facillima divisio erit, si et arcus DB et utrumque latus AD, BC secetur primum bifariam, deinde utraque semissis iterum bifariam, etc., ita deinceps, quantum libuerit. Quo autem plures existerint divisiones, eo accuratius linea describebitur... [24] ([7], p. 321).

20. ([10], p. 339-340)
21. cfr. [3]
22. cfr. [3]
23. [20], et aussi [13]
24. Donc, on décrira la courbe quadratrice géométriquement de cette manière. L'arc BD sera divisé en tant de parties égales, et l'un des deux autres côtés AD, BC en autant de parties égales. Cette division sera très simple, si soit l'arc DB soit l'un de deux côtés AD, BC est premièrement bissecté, et ensuite, chaque partie est de nouveau bissectée, et ainsi de suite, autant que l'on voudra.

Figure 6



Les intersections des segments ainsi tracés formeront un réseau de points appartenant à une quadratrice. Dans ce passage, Clavius déclare offrir une construction géométrique de la quadratrice plus précise que celle présentée dans la *Collection* de Pappus. Il se refère, en particulier, à l'une des deux objections relatées par Pappus même et attribuées à Sporus : selon celle ci, le point d'intersection entre la quadratrice et l'axe ne peut pas être construit, puisque les deux segments en mouvement coincideront sur l'axe horizontal, et le tracé de la courbe cesserait avant de rencontrer celui-ci [25].

D'après Clavius, donc, cette construction offrirait le point d'intersection entre quadratrice et axe, sans besoin de recourir à la génération de la quadratrice par combinaisons de surfaces plectoides [26], présentée dans la *Collection Mathématique* [27]. Cependant, pour construire le point d'intersection, Clavius doit recourir à une astuce. Il demande de continuer la procédure de divisions successives de l'arc et du segment jusqu'à obtenir le segment AF et l'arc BK. Ensuite, Clavius demande de construire les segments BL, BN, AM de longueur égale à AG, et de tracer les segments MN et GL. L'intersection entre les segments GL et AK donnera alors le point H, appartenant par construction à la quadratrice. Clavius demande alors de tracer le segment MP égal à GH, et ensuite, de prolonger la quadratrice jusqu'au point P, en dessous de la base AB, par la même procédure : elle coupera la base dans le point E recherché (voir Figure 6). Clavius ajoute alors que, si on a construit les segments GH, AE, MP très proches l'un à l'autre, ce point E pourra être trouvé par l'intersection entre l'arc de cercle HP (de centre A) et le segment AB. Notons que cette procédure ne construit pas le point E, mais un point assez proche. Tout en étant conscient de ce fait, Clavius considérait que cette construction approchée détermine le point de la quadratrice lorsque l'erreur n'est pas perceptible par les sens :

25. Les objections de Sporus contre la construction de cette courbe sont en fait deux. D'après la première, la construction de la quadratrice se fonderait sur une circularité, puisque afin que les deux axes mouvants se trouvent au même moment sur le côté AD du cercle, il faut que les vitesses des mouvements soient dans le même rapport, ce qui demanderait, d'après Sporus, de connaître le rapport de la droite à l'arc, et donc, de pouvoir effectuer la rectification du cercle. La deuxième objection est ainsi rapportée par Pappus : l'extrémité de la ligne dont certains se servent pour la quadrature du cercle, c'est à dire le point où la ligne coupe la droite AD n'est nullement trouvé ([16], p. 193). Notons finalement que la première objection a été mise en doute par H. Bos [16], alors que la deuxième semble en effet fondée.

26. En faite, la quadratrice peut être obtenue par intersection entre une plectoide, à savoir une rampe spiraliforme, et un plan qui la coupe "diagonalement". Le projeté orthogonal de cette intersection offre la quadratrice.

27. Cfr. proposition XXXIII et XXXIV dans la *Collection*, [16]pp. 197-201.

... sed quia punctum E, in latere AB, invenire geometrice non potest, cum ibi omnis sectio rectarum cesset : ut illud sine notabili errore, quiscilicet sub sensum cadat, reperiamur ... [28].

En faveur de l'hypothèse qui considère cette discussion à la base de la distinction faite dans *La Géométrie* entre deux procédures de construction point par point, commençons à noter que l'étude de Clavius laissa une forte empreinte sur Descartes bien avant la composition du traité de 1637 [29].

Autour de 1614-1615, Isaac Beeckman (1588-1637), avec lequel Descartes collabora entre 1618 et 1619, fait référence dans son *journal* au même texte de Clavius sur la quadratrice en relation au problème pratique de construction de conduits d'eau d'inclinaison croissante. Tout particulièrement, Beeckman montre que la meilleure façon de disposer des tuyaux est telle que leurs extrémités appartiennent à une quadratrice, qu'il construit par la méthode de Clavius [30].

Ensuite, une lettre de 1629 adressée par Descartes à Mersenne témoigne que à cette époque le mathématicien connaissait certainement la construction point par point de la quadratrice donnée par Clavius :

> ... la ligne helice que vous ne m'avies point nommee & qui n'est pas une ligne plus receue en geometrie que celle qu'on appelle Quadratricem, pource qu'elle sert à carrer le cercle & mesme a diviser l'angle en toutes sortes de parties esgales, aussy bien que celle cy & a beaucoup d'autres usages que vous pourrés voir dans les Elemans d'Euclide commantés par Clavius. Car, encore qu'on puisse trouver une infinité de points par ou passe l'helice & la quadratrice ; toutefois on ne peut pas trouver geometriquement aucun des poins qui sont necessaires pour les effaits desirés tant de l'une et tant de l'autre...

Ces deux évidences sont importantes afin de montrer que Descartes connaissait donc très certainement l'étude de Clavius lorsqu'il commenta, au deuxième livre de La Géométrie, les constructions point par point spécifiques. Notons qu'en 1629 Descartes écrit que parmi les points qui ne peuvent pas être trouvés géométriquement, il y a ceux *nécéssaires pour les effets désirés.* Comme la quadrature du cercle peut être incluse parmi les effets désirés découlants de l'emploi de la quadratrice, on peut inférer que Descartes ait voulu souligner que le point E d'intersection

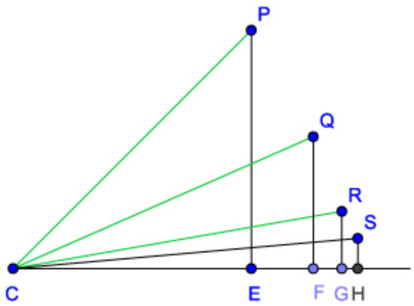
28. ... puisque le point E, sur le côté AB ne peut pas être trouvé géométriquement, puisque là-bas toute intersection des deux droites s'arrête, on le trouvera sans erreur remarquable, à savoir, sans erreur qui peut être perçue à travers les sens...[6]p. 321.

29. [20], p. 70

30. Ainsi le texte de Beeckman : "Pour placer les conduites de plus en plus raides, quand le dessus d'une conduite de trois pieds est quatre pouces plus haut que le dessous de la même conduite, ce dessous doit être plus que quatre pouces plus haut que le dessous de la conduite suivante de trois pieds. On y arrivera en placant les conduites le long d'une ligne que CLAVIUS, LIb. 7 Geom. Pract. appelle la linea quadratix. Vous pourriez égalemment pendre une corde du lieu où l'eau entre jusque là où elle sorte et placer les conduites le long d'elle ; mais dans ce cas plus elles montent d'en bas, plus elles sont raides/inclinées. Je vais montrer ces choses l'une après l'autre [dans l'original, le texte est jusqu'ici en hollandais]. Clavio, Geom pract. Lib 7, démontre que les points a, b, c sont sur la quadratrice. Puisque ha, bg, fc sont perpendiculaires à l'horizon, il est clair que l'angle had est majeur que l'angle gbe, tout ou en partie. Ainsi, il est de meme clair que l'angle gbe est égale à l'angle fce. Mais, puisque ce est produite au dessus de la ligne quadratrice, n'importe quelle ligne, tombant entre ce et cf, fait avec cf un angle mineur de l'angle gbe. ab est donc moins incliné que be, et cs moins que la ligne qui est tirée entre ce et cf [dans l'original, cette partie est en latin].[2]

entre quadratrice et axe, requis afin d'établir la proportion qui donne la quadrature du cercle, ne saurait pas être constructible par la procédure de construction employée par Clavius.

Observons aussi que les deux constructions de Clavius sont étroitement liées au fragment cartésien sur la quadrature du cercle. Il suffit de les comparer pour remarquer que la procédure de construction qui donne les points de la quadratrice dans la construction offerte par Clavius donne aussi les points P, Q, R... , à partir desquels on peut construire par simple projection orthogonale : E, F, G..., bases des rectangles dont la mesure de l'aire est en progression géométrique de raison un quart. Dans les deux cas, en fait, les points sont obtenus par bissections successives d'un angle droit et de l'un des côtés du carré de départ.



Pourtant, le point x dans la construction cartésienne (voir Figure 2) est déterminé différemment de son analogue E dans celle de Clavius. Ce dernier détermine E en construisant, par l'application de la procédure expliquée plus haut, un point qui s'approche tellement du premier point que la distance entre les deux tombe en dessous de notre seuil de perception. Au contraire, dans le fragment de Descartes la procédure de construction du point x, diamètre du cercle de périmètre donné, ne s'arrête pas à un seuil physique de perception : la distance entre le point x et le point qui donne l'apothème du polygone régulier à 2^n côtés peut toujours être raccourcie : il suffit, en théorie, de réitérer la même procédure pour obtenir l'apothème du polygone dont le nombre de côtés est le double du précédent. Pour cette raison, la quadrature du cercle cartésienne, à la différence de la construction de la quadratrice de Clavius, se fonde sur une procédure d'approximation infinie.

Derrière ces conclusions différentes, nous pouvons percevoir deux conceptions différentes de l'exactitude en géométrie. Pour Clavius, il y aurait un parallèle entre exactitude géométrique et précision pratique. Même si ce parallèle n'est jamais éclairci, on peut conclure à partir des exemples discutés que la précision obtenue dans les méthodes pratiques de dessin et de construction serait un critère suffisant pour décider de l'exactitude théorique d'un procédé ou d'une construction.

Au contraire, la notion d'exactitude que Descartes met en place, au moins dans *La Géométrie* de 1637, semble avoir une relation plus atténuée avec les méthodes de géométrie pratique. On peut le remarquer dans le cas des systèmes de tracement de courbes, qui bien que réalisables en pratique, restent des systèmes imaginés, mais aussi dans la distinction entre constructions point par point générique ou spécifique.

4 Non récévabilité de la quadrature du cercle

En fait, le caractère infini du procédé d'approximation qui figure dans le fragment sur la quadrature du cercle est fondamental pour saisir la distinction entre les deux façons de construire une courbe point par point. En revenant à l'exemple des ovales (voir Figure 5), je fais remarquer que dans ce cas chaque point du lieu est obtenu comme intersection entre deux courbes géométriques, déterminées à leur tour par l'application d'une suite finie de constructions exactes, à partir d'un point choisi arbitrairement sur une droite : cette caractéristique est généralisable à toute construction point par point générique.

Au contraire, la solution cartésienne à la quadrature du cercle montre, à cause de sa quasi-équivalence avec la construction point par point de la quadratrice donnée par Clavius, que le point E, intersection entre cette courbe et la droite AB, ne peut pas être construit en un nombre fini de pas par la même procédure qui donne les points C, O, H (voir Figure 6). Par conséquent, cette méthode, tout en trouvant un nombre infini de points de la quadratrice, ne trouve pas, comme Descartes le remarque, et contre l'opinion de Clavius, ce point E, nécessaire pour les effets désirés. D'où le caractère *spécifique* de cette construction point par point de la quadratrice.

5 Conclusions

Pour conclure, revenons aux deux questions soulevées plus haut : sur quel critère Descartes s'appuie-t-il pour déduire la non recevabilité de la procédure de quadrature, et, en même temps, la recevabilité de la procédure de construction point par point générique des courbes ?

Revenons au modèle d'exactitude introduit au § 3. Rappelons qu'une procédure de construction d'une courbe a été définie exacte si : (i) elle est une procédure à la règle et au compas, ou bien, (ii) elle se fonde sur des sytèmes articulés et soumis à des mouvements, qui combinent deux segments et un cercle pour construire de manière appropriée de nouvelles courbes non constructibles à la règle et au compas, ou encore (iii) elle se fonde sur des systèmes articulés et soumis à des mouvements qui combinent les courbes précédemment construites entre elles et avec des cercles et des segments.

On pourra préciser la solution cartésienne au problème de l'exactitude, en spécifiant, qu'un objet est *déterminé par une procédure exacte* si : (i) il s'agit d'une courbe engendrée par règle et compas réitérés ; (ii) dans le cas d'un point appartenant à un lieu, s'il est construit par intersection entre deux courbes construites par règle et compas réitérés, à partir d'un point arbitrairement choisi sur une droite. Cette dernière condition est équivalente à la suivante : un point est déterminé exactement s'il peut être relié par une chaîne finie de constructions par règle et compas réitérés à un point arbitrairement choisi (comme dans l'exemple des ovales).

Sur la base de (i) et de (ii) on peut conclure que :

– si les points d'un lieu sont construits par une procédure point par point générique, alors ils sont détérminés exactement [31].

31. En outre, Descartes semble voir un lien entre généricité du point construit et procédure par règle et compas reitérés. Ainsi nous pouvons lire dans *La Géométrie* l'affirmation suivante, qui n'est pas pourtant prouvée : "cette façon de tracer une ligne courbe en trouvant indifferemment plusieurs de ses points, ne s'estend qu'a celles qui peuvent aussy estre descrites par un mouvement regulier et continu..."[10].

– Dans le fragment sur la quadrature du cercle, le point x qui donne le diamètre du cercle isopérimètre au carré donné n'est pas déterminé exactement par la procédure de bissection successive du segment EP et de l'angle PCF (voir Figure 4).
– Il en est de même pour le point d'intersection entre quadratrice et base dans la construction point par point donnée par Clavius.

On pourra donc conclure que, par rapport à la solution cartésienne au problème de l'exactitude, comprenant un critère de recevabilité des courbes ainsi qu'un critère de détermination exacte d'un objet, ni la solution à la quadrature du cercle présentée par Pappus, ni celle offerte par Descartes dans le fragment 6 des *Opuscula Posthuma* seront recevables comme solutions géométriques du problème.

Notons que cette conclusion n'explique pas pourquoi Descartes considérait ce problème impossible, mais elle contribue à éclairer la signification du terme dans le contexte de la pratique cartésienne de solution de problèmes. Impossibilité donc, non pas comme absence de solution tout court, mais comme absence de solution conforme à un idéal d'exactitude, et donc, de géométricité.

Encart 1

Sur une démonstration de Pappus

Pour résoudre le problème de la quadrature du cercle, à savoir, de la construction d'un carré ayant même aire que celle d'un cercle donné, les géomètres de la Grèce ancienne ont inventé des courbes spéciales, telles que la spirale et la quadratrice. La construction et les propriétés des deux courbes sont discutées par Pappus au quatrième livre de la *Collection mathématique.* Dans cet encart, je me baserai sur le texte de Pappus pour montrer comment la quadratrice peut effectuer la quadrature du cercle.

Cette courbe, observe Pappus, peut être obtenue comme la trajectoire du point B, intersection entre le segment CB qui se déplace en rotation autour du centre C d'un cercle, et du segment BA, qui en même temps se déplace verticalement à même vitesse. Supposons donné le cercle de rayon *CD*, dont on veut construire le carré d'aire équivalente. En prenant CD et CB comme axes, on tracera, par le mécanisme décrit, une quadratrice qui intercepte CD en H. Parmi les propriétés de cette courbe remarquons la suivante : si un rayon CE quelconque est tracé à partir du centre, il interceptera la quadratrice en un point G tel que, si L est le projeté orthogonal de G sur le côté CD du carré, on aura la proportion suivante : CB :GL=arc(BD) :arc(ED) [16].

Afin d'obtenir la quadrature du cercle à partir de la quadratrice, Pappus commence par démontrer la proportion suivante : $arc(BD) : CD = CD : CH$.

La démonstration est donnée par l'absurde, selon le schéma suivant. On suppose, avec Pappus, que $arc(BD) : CD \neq CD : CH$. Donc, la quadratrice doit couper le segment CD en un autre point K qui satisfait la relation précédente. On aura par conséquent soit CK>CH, soit CK<CH, et : $arc(BD) : CD = CD : CK$.

Puisque ces deux cas mènent tous les deux à une contradiction, la proposition est démontrée. Précisons le premier cas (le deuxième peut être traité de manière analogue). Soit donc *CK* plus grand que CH ; avec le centre C et le rayon CK, on trace l'arc de cercle KFG, où G est le point d'intersection du cercle et de la quadratrice, et F un point sur CB. On demande ensuite de joindre C avec G, et de prolonger le segment en E, point de la circonférence de rayon CB ($=CD$).

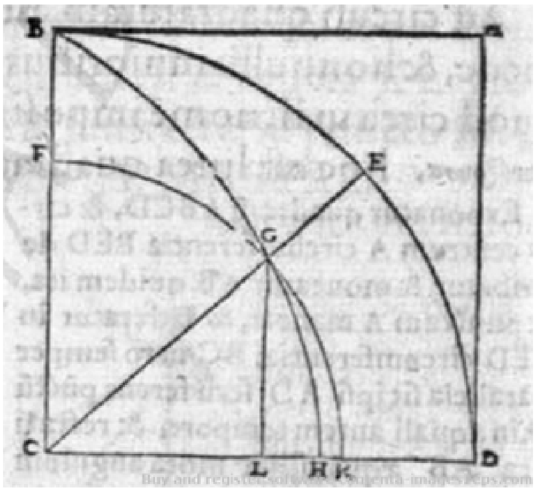


Figure extraite de Federicus Commandinus, editor. Pappus Alexandrini Mathematic collectiones a Federico Commandino [8].

Par hypothèse, on a que :
$CB(=CD) : CK = arc(DEB) : CB$
En même temps la proportion suivante vaut :
$CB : CK = arc(DEB) : arc(KGF)$ [32].
Finalement, on peut déduire, des proportions précédentes :
$arc(KGF) = CB$.
De même on aura : CB :GL=arc(KGF) :arc(GK). Puisque on a prouvé que arc(KGF)=CB, on peut ainsi conclure : $GL = arc(GK)$, qui est absurde. Une conclusion identique est obtenue si l'on suppose $CK < CH$.

Comme les longueurs de CB et CH sont connues, la longueur de l'arc BD pourra être déterminée. En multipliant par 4 les membres de l'égalité $arc(BD) : CD = CD : CH$, on obtiendra la mesure de la circonférence, à savoir, sa rectification. Pour passer de la rectification de la circonférence à la quadrature du cercle on se servira d'un théorème démontré par Archimède dans la *Mesure du cercle* (voir Encart 2)

32. Dans ce passage, Pappus utilise comme lemme la proportionnalité entre arcs de cercle et leurs rayons, démontrée dans un autre lieu de la *Collection Mathématique*.

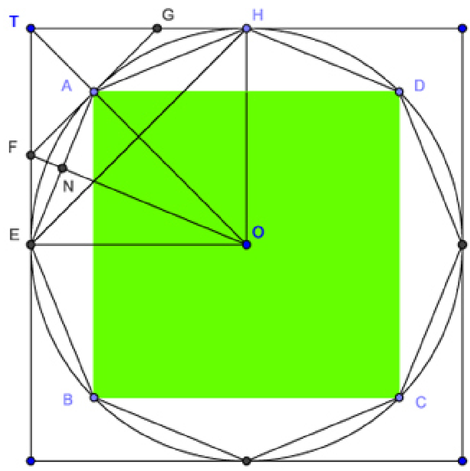
Encart 2

La première proposition de *La mesure du cercle* d'Archimède

J'ai cité l'énoncé de la proposition 1 du traité d'Archimède :

> Tout cercle a même aire que le triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs respectives le rayon et la circonférence de ce cercle.

Je donnerai dans la suite la démonstration de cette proposition, telle qu'elle se trouve dans le texte d'Archimède. Il s'agit d'un bel exemple d'emploi de la méthode d'exhaustion.



L'auteur considère avant tout le cercle donné Γ, passant par A, B, C, D, et le triangle K, et procède comme il suit. Si on suppose l'aire $S(\Gamma)$ du cercle inégale à celle S(K) du triangle, $S(\Gamma)$ doit être soit plus grand soit plus petite que $S(K)$. On considère la première possibilité, à savoir, que le cercle est plus grand que K.

On pourra donc écrire, pour simplifier, en notation moderne : $S(\Gamma) > S(K)$.

Ensuite, Archimède demande d'inscrire dans le cercle un carré, puis un octagone, puis un polygone de 16 côtés, etc... obtenus par bissections des segments précédents, jusqu'à obtenir un polygone régulier P tel que la différence entre l'aire du cercle et la sienne soit moindre que la différence entre l'aire du cercle et l'aire de K. Ce résultat peut être transcrit ainsi : $S(\Gamma) - S(P) < S(\Gamma) - S(K)$.

L'aire du polygone sera donc plus grande que l'aire du triangle K : S(P)>S(K). En même temps, le périmètre du polygone sera plus petit que la circonférence du cercle, et son apothème inférieur au rayon. Mais on sait que l'aire d'un polygone peut être calculée comme le démi-produit du périmètre fois l'apothème. Or, comme l'apothème de P et son périmètre sont inférieurs au rayon et à la circonférence du cercle, respectivement, son aire sera nécessairement inférieure à l'aire du triangle rectangle K, qui a pour côté deux segments de même longueur que le rayon et la circonférence du cercle, respectivement. Par cette voie, on obtient une contradiction.

Archimède peut donc explorer l'autre branche de l'alternative : $S(\Gamma) < S(K)$. On pourra ainsi exinscrire un carré au cercle Γ. Soit T le point de rencontre entre deux côtés adjacents, et tangents à la circonférence aux points E et H. On bissectera l'arc EH en A, et par A, on tracera la tangente FG au cercle Γ. L'angle TAG sera droit, et on obtiendra les inégalités suivantes :

TG>GA>GH. Archimède peut ensuite démontrer que l'aire la partie du triangle TEH qui gît en dehors du cercle est inférieure à la moitié de l'aire du triangle TEH. De la même manière, si on divise l'arc AH et on trace la tangente au point de bissection, cette droite retranchera de GAH une aire supérieure à la moitié. En continuant ce processus, on peut ainsi arriver au polygone P', tel que : $S(P\prime) - S(\Gamma) < S(K) - S(\Gamma)$.

On aura ainsi $S(P\prime) < S(K)$. Mais, puisque le périmètre du polygone est plus grand que la circonférence du cercle, et que son apothème est égal au rayon du cercle, il s'ensuit, comme pour le cas précédent, que l'aire du polygone dépasse celle du triangle K. On obtient ainsi une nouvelle contradiction.

Références

[1] Archimède, *La Mesure du Cercle*, tr. Ver Ecke, dans Archimède, *Oeuvres Complètes* vol I, pp. 127.

[2] Isaac Beeckman, *Journal tenu par Isaac beeckman de 1604 à 1634/publié avec une introduction et des notes par C. de Waard.* M. Nijhoff, la Haye, 1939-1953. Quatre volumes.

[3] Henk J. M. Bos, *Redefining Geometrical Exactness*, Sprnger, 2001.

[4] Henk J. M. Bos, *On the representation of curves in Descartes' Geometry*, Archive for History of Exact Sciences, 24 : 295-338, 1981.

[5] Carl Boyer, *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*, New York, Dover, 1959.

[6] Cristophorus Clavius, editeur. *Elementorum Libri XV accessit XVI de solidorum regolarium cuiuslibet intra quodlibet comparatione* [...]. apud Sanctium & Soc., Romae, 1589.

[7] Cristophorus Clavius, *Geometria Practica*, apud Typographeo Ioannis Albini, Moguntia, 1606.

[8] Federicus Commandinus, editor. *Pappus Alexandrini Mathematiccollectiones a Federico Commandino [. . .] in latini conversae[. . .].* apud H. Concordiam, Pisauri, 1588.

[9] Pierre Costabel, *Descartes et les mathématiques de l'infini*, Historia Scientiarum 29 : 1985, pp. 37-49.

[10] René Descartes, *Discours de la methode [...]. Plus la Dioptrique. Les Meteores. Et la Geometrie qui sont des essaies de cette Methode.* I. Maire, Leyde, 1637.

[11] René Descartes, *Oeuvres de Descartes.* Vrin, Paris, 1897-1910. Editées par C. Adam and P. Tannery. 12 volumes.

[12] Leonhard Euler, *Annotationes in locum quendam Cartesii ad circuli quadraturam spectantem*, dans *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 8, 1763, pp. 157-168. Aussi dans : Euler, *Opera Omnia* : Series 1, Volume 15, pp. 1 - 15.

[13] Paolo Mancosu, *Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventeenth century,* Oxford University Press, 1996.

[14] Marin Mersenne, *Les Questions Théologiques, Physiques, Morales et Mathématiques*, Henry Guenon. Reédité en *Questions inouies*, 1634/1985.

[15] Pappus. *Pappi Alexandrini Collectionis [...]*. Weidmann, Berolini, 1876-1878. 3 vols. Editées avec une traduction latine et un commentaire par F. Hultsch.13

[16] Pappus, *La Collection Mathématique,* Desclée de Brouwer, 1933, tr ; française par Ver Eecke P..

[17] Marco Panza, *Newton et les Origines de l'Analyse*, Blanchard, 2005.

[18] Marco Panza, *Manuscrit*, non publié.

[19] Roshdi Rashed, *Descartes et le moyen âge. Actes du colloque organisé à la Sorbonne du 4 au 7 juin 1996 /par le centre d'histoire et de philosophie arabes et médiévales ...,* ed. par Joel Biard et Roshdi Rashed. Paris J. Vrin, 1998.

[20] Chikara Sasaki, *Descartes' Mathematical thought*, Boston Studies ib the Philosophy of Science 237. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2003.

[21] Paul Ver Ecke, *Archimède, Oeuvres Complètes*, 2 tomes, Vaillant Carmanne, Liège, 1960 (première édition 1921).

[22] Derek T. Whiteside, *Patterns of Mathematical Thought in the later Seventeenth Century*, Archive for History of Exact Sciences, Vol. 1, 3 : 179-388, 1961.