
Le *Compendy de la praticque des nombres*, une arithmétique du XVe siècle à mi-chemin entre théorie et pratique commerciale.

Maryvonne Spiesser, Université Toulouse III

ANNEXE 2

ANALYSE MATHEMATIQUE DES PROBLEMES CITES AU II

Les méthodes décrites traduisent algébriquement la démarche suivie dans le *Compendy*.

1- La deuxième règle de compagnie : *demandants* et *baillants*

Une compagnie compte n personnes. Appelons-les P_1, P_2, ..., P_n. Chacune possède des deniers (notés x_i). Soit $G_1 = \{P_1, ..., P_p\}$, $G_2 = \{P_2, \ldots, P_{p+1}\}$, ..., $G_n = \{P_n, P_1, \ldots, P_{p-1}\}$. Chaque groupe G_i demande aux $n - p$ personnes restantes de céder a_i deniers de façon à posséder alors un multiple m_i de ce qu'il leur reste. Les x_i sont solutions du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_p + a_1 = m_1(x_{p+1} + \ldots x_n - a_1) \\ x_2 + x_3 + \ldots + x_{p+1} + a_2 = m_2(x_{p+2} + \ldots + x_n + x_1 - a_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n + x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1} + a_n = m_n(x_p + \ldots + x_{n-1} - a_n) \end{cases}$$

soit

(1) $$\sum_{k=i}^{k=p+i-1} x_k + a_i = m_i \left(\sum_{k=p+i}^{k=n+i-1} x_k - a_i \right) \qquad i = 1, 2, ..., n,$$

avec la convention : $x_j = x_{j-n}$ si $j > n$.

La résolution consiste à transformer chaque équation de façon à faire apparaître la somme S des inconnues. Il y a pour cela deux possibilités. La première fait intervenir les fractions $\dfrac{m_i}{m_i+1}$, la seconde fait intervenir les fractions $\dfrac{1}{m_i+1}$, compléments à l'unité des précédentes. Les étapes sont alors les suivantes :

<u>Première méthode</u>

Transformation de chaque équation en fonction de la somme S des x_i :

(2) $$\sum_{k=i}^{k=p+i-1} x_k + a_i = \frac{m_i}{m_i+1} S \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

En sommant ces n équations, on obtient :

(3) $$pS + \sum_{i=1}^{i=n} a_i = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_i}{m_i+1} S$$

et on en déduit S.

Les x_i sont alors les solutions (éventuelles) du système

$$\sum_{k=i}^{k=p+i-1} x_k = \frac{m_i}{m_i+1} S - a_i \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Deuxième méthode

La première étape conduit à :

(2') $$\sum_{k=p+i}^{k=n+i-1} x_k - a_i = \frac{1}{m_i+1} S \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Les étapes suivantes sont les mêmes que dans la première méthode.

Il est avantageux d'utiliser la première transformation lorsque $p = 1$, car l'équation (2) conduit directement à x_i :

(2) $$x_i + a_i = \frac{m_i}{m_i+1} S \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Au contraire, lorsque $p = n - 1$, (2') est préférable, pour la même raison :

(2') $$x_{n-1+i} - a_i = \frac{1}{m_i+1} S \quad i = 1, 2, ..., n.$$

($n - 1 + i$ est toujours compris modulo n).

2 - La règle d'une position : *n* personnes achètent un cheval

Une compagnie de n personnes veut acheter une marchandise mais aucune ne possède la somme requise. En reprenant les notations déjà utilisées, les membres de chaque groupe G_i demandent alors aux n - p autres personnes de leur céder une fraction $\frac{p_i}{q_i}$ $(0 < p_i < q_i)$ de leurs deniers de façon à réunir le montant exact a de cette marchandise.

Le système s'écrit :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_p + \dfrac{p_1}{q_1}(x_{p+1} + \cdots + x_n) = a \\ x_2 + \cdots + x_{p+1} + \dfrac{p_2}{q_2}(x_{p+2} + \cdots + x_n + x_1) = a \\ \vdots \\ x_n + x_1 + \cdots + x_{p-1} + \dfrac{p_n}{q_n}(x_p + \cdots + x_{n-1}) = a \end{cases}$$

ou encore

(4) $$\sum_{k=i}^{k=p+i-1} x_k + \frac{p_i}{q_i}\left(\sum_{k=p+i}^{k=n+i-1} x_k\right) = a \qquad i = 1, 2, ..., n$$

En procédant comme auparavant (on ajoute aux deux membres de chaque équation la somme adéquate), on arrive au système équivalent :

(5) $$\sum_{k=p+i}^{k=n+i-1} x_k = \frac{q_i}{q_i - p_i}(S - a) \qquad i = 1, 2, ..., n$$

Comme a n'est pas fixé dans l'énoncé, on peut donner une valeur arbitraire à $S - a$. C'est ce qui est appelé *position* dans le *Compendy*, ce qui justifie le rangement de ces problèmes (comme des suivants) sous le titre de « règle d'une position ». Une fois les x_i trouvés - quand il y a des solutions-, on en déduit S puis a.

N. B. : Comme pour le premier problème, on pourrait aussi exprimer les données à l'aide des fractions $\dfrac{p_i}{p_i - q_i}$, ce qui mènerait aux équations :

(5') $$\sum_{k=i}^{k=p+i-1} x_k - a = \frac{p_i}{p_i - q_i}(S - a) \quad i = 1, 2, ..., n$$

Ce n'est pas fait dans le *Compendy*. Notons que dans les équations (5'), les deux membres sont négatifs (car $0 < p_i < q_i$).

3 - La règle d'une position : *n* personnes ont trouvé une bourse

Un groupe de n personnes a trouvé une bourse. Les membres de chaque groupe G_i réunissant leurs deniers à l'argent de la bourse, possèdent alors m_i fois ce qu'ont les $n - p$ autres personnes. C'est exactement le même problème que le précédent ; il suffit de remplacer $\dfrac{p_i}{q_i}$ par $-m_i$ et a par son opposé :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_p + a = m_1(x_{p+1} + \cdots + x_n) \\ x_2 + \cdots + x_{p+1} + a = m_2(x_{p+2} + \cdots + x_n + x_1) \\ \vdots \\ x_n + x_1 + \cdots + x_{p-1} + a = m_n(x_p + \cdots + x_{n-1}) \end{cases}$$

soit

(6)
$$\sum_{k=i}^{k=p+i-1} x_k + a = m_i\left(\sum_{k=p+i}^{k=n+i-1} x_k\right) \qquad i = 1, 2, ..., n$$

puis, en fonction de S :

(7)
$$\sum_{k=i}^{k=p+i-1} x_k + a = \frac{m_i}{m_i+1}(S+a) \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

On peut exprimer également chaque équation en fonction des fractions $\frac{1}{m_i+1}$. Cela nous mène alors aux équations :

(7')
$$\sum_{k=p+i}^{k=n+i-1} x_k = \frac{1}{m_i+1}(S+a) \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Lorsque $p = 1$, les équations (7) permettent d'obtenir directement x_i. Lorsque $p = n - 1$, ce sont les équations (7') qui donnent les x_{n-1+i}.

4- Bilan relatif aux trois problèmes précédents

La résolution de ces trois problèmes selon la méthode indiquée (retour à S, S - a ou S + a) montre que les xi sont solutions d'un système dont la matrice est de type circulant, égale à

$$\begin{array}{c}
< \cdots\cdots \quad p \quad \cdots\cdots > \quad < \cdots \quad n-p \quad \cdots > \\
\begin{bmatrix}
1 & . & . & . & . & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\
0 & 1 & . & . & . & . & 1 & 0 & . & . & 0 \\
0 & 0 & 1 & . & . & . & . & 1 & 0 & . & 0 \\
0 & . & 0 & 1 & . & . & . & . & 1 & 0 & 0 \\
0 & . & . & 0 & 1 & . & . & . & . & 1 & 0 \\
0 & . & . & . & 0 & 1 & . & . & . & . & 1 \\
1 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & . & . & . & 1 \\
1 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & . & . & 1 \\
1 & . & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & . & 1 \\
1 & . & . & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 1 \\
1 & . & . & . & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}$$

(ou la même matrice avec échange des 0 et des 1).

On démontre que ce système admet une solution unique si et seulement si n et p sont premiers entre eux. Dans ce cas, det$A$ = p. Dans le cas contraire, il peut donc n'y avoir aucune solution ou bien une infinité.

Dans les deux derniers problèmes, la valeur de a n'est pas connue, et lorsque le système est régulier, il y a en fait une infinité de solutions proportionnelles.

5 - La règle de deux fausses positions : les progressions composées

Premier problème ou « première manière »

Sont données une progression arithmétique de premier terme a et de raison r, et une fraction $\frac{p}{q}$ comprise entre 0 et 1.

Il s'agit de partager de façon équitable une somme inconnue S entre un nombre inconnu n de personnes, en respectant les règles suivantes : la première part est égale à a, premier terme de la progression, auquel on ajoute la fraction $\frac{p}{q}$ de ce qui reste, soit $\frac{p}{q}$ ($S - a$). La seconde part est égale au deuxième terme de la progression augmenté de la même fraction de ce qui reste de la somme initiale après avoir effectué tous les prélèvements précédents. On suit le même schéma pour la troisième part, etc.

Tel que le problème est posé, nous ne connaissons pas le « nombre de parts », nous ne savons pas s'il est entier ou non. Nous ne connaissons donc pas le nombre d'équations (ce que nous avons rendu par des pointillés dans l'écriture du système). Algébriquement, en appelant x la valeur de chaque part, nous pouvons traduire les conditions posées par les équations :

$$\begin{cases} S = nx \\ x = a + \dfrac{p}{q}(S - a) \\ x = a + r + \dfrac{p}{q}[S - x - (a + r)] \\ \ldots \\ x = \cdots = a + (k-1)r + \dfrac{p}{q}[S - (k-1)x - (a + (k-1)r)] \\ \ldots \end{cases}$$

Pour passer d'une part à l'autre, on ajoute r et on retranche $\frac{p}{q}$ ($x + r$), dont les effets s'annulent puisque toutes les parts sont égales. Le système se réduit alors à deux équations, à savoir la première et l'équation unique obtenue en retranchant membre à membre deux équations consécutives. Le système précédent est donc équivalent à chacun des systèmes suivants :

$$\begin{cases} S = nx \\ x = a + \dfrac{p}{q}(S - a) \\ x = (\dfrac{q}{p} - 1)r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = nx \\ S = a + \dfrac{q}{p}(x - a) \\ x = (\dfrac{q}{p} - 1)r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = nx \\ x = (\dfrac{q}{p} - 1)r \\ S = a + \dfrac{q}{p}[(\dfrac{q}{p} - 1)r - a] \end{cases}$$

a, r, p et *q* étant donnés, on a donc la solution :

$$x=(\frac{q}{p}-1)r \quad ; \quad S=a+\frac{q}{p}[(\frac{q}{p}-1)r-a] \quad ; \quad n=\frac{S}{x}=\frac{\frac{q}{p}r-a}{r}$$

ou encore, en posant $q' = \frac{q}{p}$:

$$x = (q' - 1)r \; ; \; S = a + q'[(q' - 1)r - a] \; ; \; n = \frac{q'r - a}{r}$$

Deuxième problème ou « deuxième manière »

La première part est égale au premier terme de la progression auquel on ajoute $\frac{p}{q}S$. La seconde est égale au second terme de la progression augmenté de la fraction $\frac{p}{q}$ de ce qui reste après avoir prélevé la première part, et ainsi de suite. Par rapport au premier problème, on a simplement inversé l'ordre entre progression et fraction du « reste ». Les équations sont ici :

$$\begin{cases} S=nx \\ x=\frac{p}{q}S+a \\ x=\frac{p}{q}(S-x)+(a+r)= \\ \dots \\ x=\frac{p}{q}[(S-(k-1)x]+a+(k-1)r \\ \dots \end{cases}$$

Ce système est équivalent à :

$$S = nx \text{ et } \quad \begin{cases} S=nx \\ x=\frac{p}{q}S+a, \\ x=\frac{q}{p}r \end{cases}$$

d'où la solution :

$$x=\frac{q}{p}r \, ; S=\frac{q}{p}(\frac{q}{p}r-a) \, ; n=\frac{\frac{q}{p}r-a}{r},$$

ou encore, avec $q' = \frac{q}{p}$:

$$x = q'r\ ;\ \ S = q'(q'r - a)\ ;\ n = \frac{q'r - a}{r}.$$

Notons, pour les deux genres, que :

- Si $a \leq r$, les solutions sont toujours positives ;

- Si $a > r$, S et n ne sont positifs que si $\frac{p}{q} < \frac{r}{a}$.