Achille Brocot, mathématicien à ses heures

R. Mansuy*

Achille Brocot (1817-1874) semble davantage connu des amateurs d'horlogerie que des mathématiciens et pourtant cet amateur a fourni un joli travail [1] sur l'approximation rationnelle et laissé son nom à une structure arborescente représentant $\mathbb{Q}$ (conjointement avec le mathématicien allemand Moritz Stern pour un travail indépendant de celui de Brocot [3]). Reprenons quelques éléments biographiques de cet illustre inconnu.

1 L'horloger

Comme beaucoup d'artisans à l'époque, Achille Brocot n'a pas choisi sa vocation. Fils aîné de Louis-Gabriel Brocot, il collabore puis succède à son père (comme son fils lui succédera). Louis-Gabriel est un artisan ingénieux : remarqué dès 1826 pour une "pendule à sonnerie à râteau et à échappement à repos", il dépose de nombreux brevets entre 1840 et 1853. Le plus célèbre concerne une pièce de transmission entre un mouvement de balancier et un mouvement de rotation, désormais appelée échappement Brocot (les pendules munies de cet échappement sont bien cotées dans les salles de ventes). Baigné dans cette atmosphère de création, Achille va rapidement s'affirmer

Fig. 1 – Échappement Brocot

comme un inventeur astucieux : il améliore des échappements existants, perfectionne différentes pièces d'horlogerie, invente (avec son père ou à la suite de celui-ci) une suspension pour pendule qui portera le nom de la famille. Rapidement, il obtient un certain succès commercial (en 1860, 50000 suspensions de type Brocot sont vendues, tous fabricants confondus) et la petite entreprise montée rue Charlot en 1850 avec Antoine Jean-Baptiste Delettrez sera primée par une médaille de première classe à l'exposition universelle de 1857. Sa carrière d'horloger est jalonnée d'inventions et de réussites (des pendules de cheminée qui fonctionnent pendant un an sans intervention

*roger.mansuy@gmail.com

extérieure, des mécanismes de quantièmes, de lunaisons...) et se termine en même temps que son association avec Delettrez en 1870 et la cession de leurs brevets à Thielbe.

Les succès professionnels suffisent à assurer la postérité d'Achille Brocot. Pour justifier l'intérêt des mathématiciens pour cet horloger, il convient de s'intéresser à une commande de réparation assez spéciale.

2 Le mathématicien amateur

En effet, on lui amène, pour les remettre en état primitif, des pendules "comportant quelques indications astronomiques". Malheureusement une partie non-négligeable des mécanismes a disparu et il faut qu'Achille Brocot réinvente le mécanisme. A priori, rien de difficile, il suffit de regarder quelles sont les rotations nécessaires pour chacune des informations astronomiques puis de regarder comment les obtenir à partir du mouvement du balancier.

C'est sur ce dernier point que le bât blesse ; en effet, pour changer les vitesses de rotation, on utilise des engrenages. Les vitesses de départ et d'arrivée sont dans le même rapport que les nombres de dents des deux roues dentées. En construisant différents engrenages en série, on obtient le produit des rapports obtenus pour chacun des engrenages. Par conséquent, avec un système d'engrenages, on ne peut modifier la vitesse initiale que d'un rapport rationnel. Autre limitation, une roue dentée doit avoir un nombre raisonnable de dents (quatre au minimum et un maximum borné par les capacités techniques de construction). Par conséquent, il faut trouver une approximation du rapport recherché pour la pendule comme produit de fractions dont les numérateurs et dénominateurs (dans l'écriture irréductible) sont dans l'intervalle des entiers constructibles.

Achille Brocot connaît bien cette problématique ; aussi quand il se retrouve confronté à des temps de révolution de planètes, à la durée du jour sidéral ou du jour lunaire, il cherche dans les méthodes classiques de sa profession comment approcher ces valeurs. Le premier réflexe est d'utiliser les réduites de la méthode des fractions continues pour obtenir une approximation. Jean-Baptiste Schwilgué avait déjà utilisé cette technique pour reconstruire en 1842 la magnifique horloge astronomique de la cathédrale de Strasbourg. Achille Brocot est déçu par les résultats ainsi obtenus : "Le procédé le plus expéditif est sans contredit celui des fractions continues ; elles seules jouissent de la propriété de donner les nombres les plus réduits et les plus approchés ; mais d'une part l'usage de ce procédé n'est pas à la portée de la plupart des praticiens, et enfin ses ressources sont si limitées qu'il faut le plus souvent abandonner ses résultats pour aller à l'aventure chercher des nombres." Schématiquement, les réduites sont difficiles à obtenir pour un horloger peu versé dans les mathématiques et surtout donnent peu de rapports utilisables en horlogerie).

Face à cette difficulté, Achille Brocot va développer sa propre méthode d'obtention des approximations rationnelles. Il l'expose le 10 juin 1860 lors d'une séance de la société des horlogers (sa communication est publiée [1] en décembre de la même année, dans la Revue chronométrique, l'organe de la société) puis la publie en détail deux ans plus tard [2]. Dans ce dernier volume, Achille Brocot annonce qu'il cherche à "satisfaire également ceux qui aiment les démonstrations rigoureuses et ceux qui n'ont pas le loisir de les suivre" : double ambition de mathématicien et de vulgarisateur.

2.1 Les résultats mathématiques

Dans une première partie de cette monographie, sont rassemblées dix propositions, aujourd hui plus ou moins évidentes, nécessaires pour la méthode. Les voici, exprimées en termes modernes (avec la convention que toutes les variables sont des entiers naturels non-nuls) :

1. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors $ad = bc$.
2. Si $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, alors $ad > bc$.
3. Si $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} + \frac{1}{bd}$, alors $ad > bc + 1$.
4. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$.
5. Si $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, alors $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+d} > \frac{c}{d}$.

6. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}+\frac{1}{bd}$, alors, pour toute fraction $\frac{m}{n}$ strictement entre $\frac{c}{d}$ et $\frac{a}{b}$, on a $m>\max(a,c)$ et $n>\min(b,d)$.
7. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}+\frac{1}{bd}$, alors

$$\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}+\frac{1}{b(b+d)}\qquad\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}-\frac{1}{d(b+d)}$$

8. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}+\frac{1}{bd}$, alors $\frac{a+c}{b+d}$ est la fraction la plus simple entre $\frac{c}{d}$ et $\frac{a}{b}$.
9. Si $p=\frac{a}{b}-n=\frac{c}{d}+m$, alors $p=\frac{m\frac{a}{b}+n\frac{c}{d}}{m+n}$.
10. Si $\frac{c}{d}>\frac{a}{b}>\frac{e}{f}$, alors on a $\frac{c}{d}-\frac{a}{b}=\frac{bc-ad}{bd}$, $\frac{e}{f}-\frac{a}{b}=\frac{be-af}{bf}$ mais aussi :

$$\frac{c+e}{d+f}-\frac{a}{b}=\frac{(bc-ad)+(be-af)}{bd+bf}$$

Quelques commentaires s'imposent après ces lignes de calculs : l'idée principale d'Achille Brocot consiste, à partir d'une approximation par défaut $\frac{e}{f}$ et d'une approximation par excès $\frac{c}{d}$, puis à considérer la fraction médiane $\frac{c+e}{d+f}$. Parmi les résultats précédents, on note en particulier : 5. la fraction médiane est une meilleure approximation que l'une des deux approximations de départ ; 6. la fraction médiane est la fraction la plus "simple" de l'intervalle considéré ; 10. l'erreur d'approximation avec la fraction médiane est la fraction médiane des erreurs.

2.2 La méthode d'approximation

Munis de tous ces résultats, nous pouvons nous pencher sur la méthode récursive qu'Achille Brocot développe pour approcher un rapport donné :

Première étape : déterminer des approximations par excès et par défaut du rapport recherché.

Deuxième étape : calculer les erreurs commises par ces approximations.

Troisième étape : calculer la fraction médiane des approximations et la fraction médiane des erreurs. On recommence à la première étape avec la fraction médiane et l'approximation de départ (celle qui est de l'autre côté du rapport recherché).

L'algorithme est arrêté une fois obtenue une fraction qui répond à nos spécifications techniques.

Illustrons cette méthode sur un exemple donné par Achille Brocot dans l'exposé de 1860 : l'approximation de la fraction irréductible $\frac{191}{23}$. Dans un premier temps, remarquons que cette fraction est encadrée par $\frac{8}{1}$ et $\frac{9}{1}$ avec les erreurs $-\frac{7}{23}$ et $+\frac{16}{23}$. La fraction médiane est $\frac{8+9}{1+1}=\frac{17}{2}$ et l'erreur de cette approximation (qui est la médiane des erreurs) est $\frac{16-7}{23+23}=+\frac{9}{2\times 23}$. On en déduit que la fraction $\frac{191}{23}$ est entre $\frac{8}{1}$ et $\frac{17}{2}$. La nouvelle fraction médiane est $\frac{25}{3}$ avec l'erreur $+\frac{2}{3\times 23}$. Et on recommence... On rassemble les résultats des six premières étapes dans le tableau suivant (en plaçant les approximations successives de la plus petite à la plus grande) :

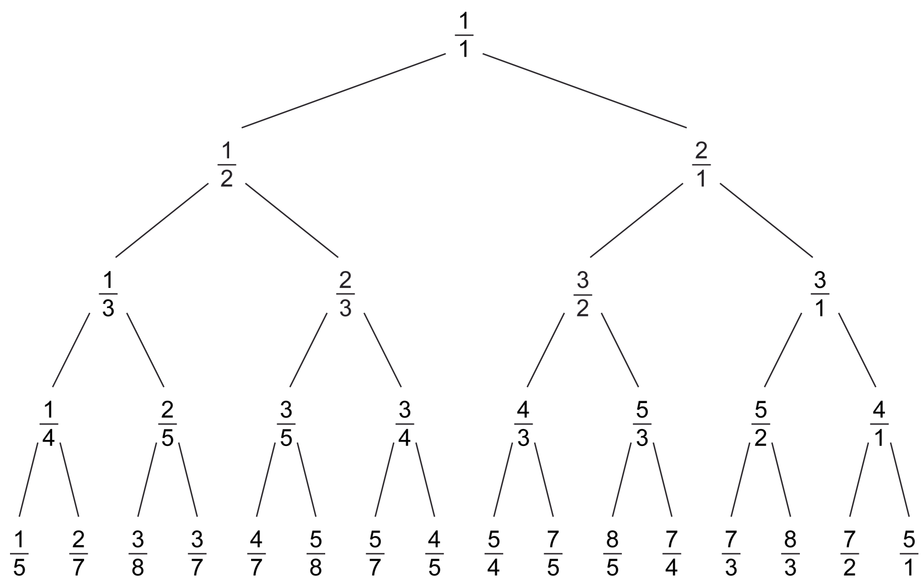
Approximations	$\frac{8}{1}$	$\frac{33}{4}$	$\frac{58}{7}$	$\frac{83}{10}$	$\frac{108}{13}$	$\frac{25}{3}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{9}{1}$
Erreurs	$-\frac{7}{23}$	$-\frac{5}{4\times 23}$	$-\frac{3}{7\times 23}$	$-\frac{1}{10\times 23}$	$+\frac{1}{13\times 23}$	$+\frac{2}{3\times 23}$	$+\frac{9}{2\times 23}$	$+\frac{16}{23}$

On peut donc obtenir valeur approchée de la fraction $\frac{191}{23}$ avec une roue à 83 dents et un pignon à 10 dents. Si cette approximation ne convient pas, on peut poursuivre avec les fractions $\frac{83}{10}$ et $\frac{108}{13}$. Les valeurs obtenues pour les numérateurs et les dénominateurs vont être de plus en plus grandes et cela peut sembler une nouvelle difficulté technique ; ce n'est qu'une apparence car l'approximation $\frac{1802}{217}$ (obtenue en poursuivant encore 9 fois[1] la procédure ci-dessus pour $\frac{191}{23}$) est très facilement constructible à l'aide de trois axes et quatre roues (à 7, 31, 34 et 53 dents) puisque $\frac{1802}{217}=\frac{34\times 53}{7\times 31}$.

[1]Á travers quelques exemples numériques, Achille Brocot développe quelques astuces de calculs pour réduire le nombre d'étapes, principalement en substituant une division à de nombreuses soustractions.

2.3 Aux racines de l'arbre de Stern-Brocot

La postérité a retenu l'usage de la fraction médiane à travers l'arbre de Stern-Brocot. Il s'agit d'un arbre (au sens informatique du terme) étiqueté par les rationnels strictement positifs où l'on obtient les individus de la $(n+1)$-ème génération comme fractions médianes d'individus des générations précédentes et des valeurs extrêmes $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{0}$. On obtient ainsi toutes les valeurs approchées de Brocot avec les valeurs de départ $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{0}$ (si on calcule toutes les fractions médianes à toutes les étapes). Voici par exemple, les quatre premières générations de cet arbre :



On peut remarquer (en fait c'est le principe de construction) que chaque fraction s'écrit comme la fraction médiane des fractions des générations précédentes les plus proches à gauche et à droite : par exemple, $\frac{3}{7}$ est la fraction médiane de $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{2}$. Pour que la construction soit complète, il faut "ajouter" formellement $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{0}$ aux extrémités gauche et droite de l'arbre.

On peut alors montrer que cet arbre contient une fois (et exactement une fois) chacun des rationnels strictement positifs ; par conséquent, on réalise une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Q}_+^*$ en énumérant les nœuds à l'aide d'un parcours en largeur de l'arbre. Cet aspect de la découverte de Brocot n'est bien évidemment pas dans les documents de l'horloger mais repose uniquement sur les propriétés énoncées ci-avant. Autre propriété importante (et intrinsèquement liée à la précédente), l'arbre de Stern-Brocot est un arbre binaire de recherche : étant donné un nœud quelconque de l'arbre étiqueté par la fraction $\frac{p}{q}$, tous les nœuds qui sont issus de son fils gauche (respectivement droit) sont étiquetés par fractions strictement inférieures (respectivement strictement supérieures) à $\frac{p}{q}$; cette propriété permet de localiser rapidement un rationnel dans l'arbre de Stern-Brocot, il suffit partant de la racine de le comparer à chaque nœud et de glisser vers la gauche ou vers la droite selon que la valeur que l'on cherche est inférieure ou supérieure à celle du nœud examiné.

3 Le vulgarisateur

La popularité de l'arbre de Stern-Brocot n'est guère surprenante quand on pense que le résultat est assez joli mais elle apparaît très naturelle lorsque l'on constate les efforts de vulgarisation d'Achille Brocot. En effet, il multiplie les exemples numériques mais aussi physiques (par exemple, les approximations pour les périodes de révolution des différentes planètes du système solaire, pour le temps sidéral, pour le temps lunaire...). Ensuite, il y a le souci de créer des tables de valeurs pour que l'horloger moyen puisse accéder à sa méthode même sans en comprendre le fonctionnement. Dans son volume de 1862, environ 50 pages sont consacrées à une table pour la conversion d'une écriture décimale en fraction[2] (cette table de toutes les fractions inférieures à 1 avec un dénominateur inférieur à 100 permet l'obtention des premières approximations). En fait, cette idée du recours aux tables n'est pas nouvelle pour Achille Brocot : les annales du conservatoire des arts et métiers [5] nous informent qu'il avait déjà écrit une table pour régler la longueur d'une tige de pendule en fonction du retard ou de l'allonge (avec des valeurs de réglage[3] pour un pas de 20 secondes de retard par heure ou par jour de fonctionnement) et avait même pour l'occasion construit une échelle pratique pour ajuster le pendule "dispensant de tout calcul" et "à la portée des praticiens".

Á ces efforts de vulgarisation auprès des collègues horlogers, ajoutons le souci de la diffusion de la méthode y compris à l'étranger : le mémoire de 1862 se termine par quelques pages d'une traduction en anglais du protocole d'utilisation de sa table.

Espèrons qu'après ce court texte, on va enfin réhabiliter l'horloger comme un véritable amateur de mathématiques !

Remerciements

Merci à Christian Pelletier (http ://horlojadis.canalblog.com/) pour la photographie d'échappement Brocot.

Références

[1] Brocot (Achille), Communication de M. Brocot : calcul des rouages par approximation, nouvelle méthode, *Revue chronométrique*, 3 (1861), p. 186-194 (daté de décembre 1860).

[2] Brocot (Achille), Calcul des rouages par approximation, nouvelle méthode, 1862, Brocot aîné (Paris).

[3] Stern (Moritz), Über eine zahlentheoretische Funktion, *Journal de Crelle*, 55 (1858), pp. 193–220

[4] Tardy, Dictionnaire des horlogers français, Tardy, 1972.

[5] Boquillon N., Horlogerie, *Annales du conservatoire impérial des arts et métiers*, vol. 3 (1862), pp. 185–192

[2] Il est amusant de voir que de nombreuses tables inverses (conversion de fractions en écriture décimale) avaient été publiées au début du siècle pour favoriser l'utilisation du système métrique.

[3] D'après les annales du CNAM, "le calcul lui a démontré que, pour une avance ou un retard d'une minute par heure, on se rapproche de très-près du pendule réglant en allongeant ou en raccourcissant le pendule essayé d'un trentième de sa longueur actuelle".