

## Table des matières du volume 1

<b>Préface</b>	<b>vii</b>
<b>Auteurs et rédacteurs</b>	<b>ix</b>
<b>Leçon 1. Jean-Pierre Kahane. Le théorème de Pythagore, l'analyse multifractale et le mouvement brownien</b>	<b>1</b>
Pythagore et son théorème . . . . .	1
La courbe de Pólya, et l'analyse multifractale . . . . .	5
Un autre aspect de la courbe de Pólya . . . . .	11
Le mouvement brownien . . . . .	13
Discussion . . . . .	18
Bibliographie . . . . .	25
<b>Leçon 2. Pierre Cartier. L'intégrale de chemins de Feynman : d'une vue intuitive à un cadre rigoureux</b>	<b>27</b>
Première partie : les intégrales de Daniell et de Wiener . . . . .	27
L'intégrale de Daniell . . . . .	27
Les chaînes de Markov . . . . .	31
L'intégrale de Wiener . . . . .	33
La notation de Feynman . . . . .	37
Seconde partie : l'intégrale de Feynman . . . . .	41
L'équation de la chaleur et l'intégrale de Wiener . . . . .	41
La formule de Feynman-Kac . . . . .	43
La mesure et l'intégrand, ou le mathématicien et le mécanicien . . . . .	46
L'intégrale de chemins de Feynman . . . . .	48
Un cadre axiomatique . . . . .	53
Discussion . . . . .	56
Bibliographie . . . . .	58
<b>Leçon 3. Vladimir I. Arnold. Nombres d'Euler, de Bernoulli et de Springer pour les groupes de Coxeter et les espaces de morsification : le calcul des serpents</b>	<b>61</b>
Première partie : la suite classique d'Euler-Bernoulli . . . . .	61
Le triangle d'Euler-Bernoulli . . . . .	61
Le calcul des serpents . . . . .	64
Morsification . . . . .	68
Seconde partie : les nombres d'Euler-Bernoulli des groupes de Coxeter . . . . .	76
Les groupes de Coxeter . . . . .	76

Les nombres de Springer . . . . .	79
Comment mettre les serpents dans les chambres . . . . .	84
Le cas des autres groupes de Coxeter . . . . .	89
Discussion . . . . .	95
Bibliographie . . . . .	96
<b>Leçon 4. Don Zagier. Quelques conséquences surprenantes de la cohomologie de <math>SL_2(\mathbb{Z})</math></b>	<b>99</b>
Premier exemple : valeurs de $\zeta(2n)$ . . . . .	100
Deuxième exemple : fonction cotangente . . . . .	102
Troisième exemple : fonctions thêta . . . . .	103
Le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ et sa cohomologie . . . . .	104
Les « relations de périodes » . . . . .	106
Formes modulaires . . . . .	109
Périodes des formes modulaires . . . . .	111
La fonction $C_\tau(X, Y; T)$ et les périodes . . . . .	113
Fonctions zêta doubles . . . . .	115
Les périodes des formes modulaires de Maass . . . . .	119
Autres applications . . . . .	121
Bibliographie . . . . .	122
<b>Leçon 5. Haïm Brézis. Tourbillons de Ginzburg-Landau, énergie renormalisée et effets de quantification</b>	<b>125</b>
Un problème impossible . . . . .	125
L'énergie de Ginzburg-Landau et la question de Matano . . . . .	129
Un analogue tridimensionnel . . . . .	131
Retour à la dimension 2 : conversation avec un physicien . . . . .	134
Solution du « problème impossible » . . . . .	136
Première méthode de renormalisation . . . . .	136
Autres méthodes de renormalisation : comment elles s'éclairent mutuellement . . . . .	138
Un phénomène de quantification . . . . .	140
Discussion . . . . .	141
Bibliographie . . . . .	143
<b>Leçon 6. Bernard Malgrange. Monodromie, phase stationnaire et polynôme de Bernstein-Sato</b>	<b>145</b>
Introduction . . . . .	145
Le polynôme de Bernstein-Sato . . . . .	145
Monodromie . . . . .	152
Premier ingrédient : homologie singulière . . . . .	152
Deuxième ingrédient : la construction de Milnor . . . . .	156
La définition de la monodromie. Le théorème de monodromie	158
« Idée » de la démonstration. Connexion de Gauss-Manin . . . . .	162

Questions . . . . .	168
Bibliographie . . . . .	168
<b>Leçon 7. John Coates. Courbes elliptiques</b>	<b>171</b>
Les nombres congruents . . . . .	171
Courbes elliptiques . . . . .	174
Quelques séries formelles . . . . .	177
Cohomologie de la courbe elliptique $E_D$ . . . . .	178
Arithmétique des courbes elliptiques . . . . .	181
Le carré symétrique d'une courbe elliptique . . . . .	183
Les fonctions $L$ . . . . .	188
Bibliographie . . . . .	190
<b>Leçon 8. Yves Meyer. Approximation par ondelettes et approximation non-linéaire</b>	<b>193</b>
Motivation . . . . .	193
Compression/restauration . . . . .	193
Débruitage . . . . .	194
Exemple historique en dimension 1 . . . . .	195
Le point de vue de Peller . . . . .	197
Signification du théorème de Peller . . . . .	198
Définition des espaces de Besov. Analyse de Littlewood-Paley . . . . .	198
Le contexte de la dimension 2 . . . . .	202
La généralisation du théorème de Peller par De Vore . . . . .	205
Un problème d'actualité : la schématisation d'une image par un petit nombre de contours (Mumford-Shah, Blake,...) . . . . .	211
Le théorème de Peller en dimension $n$ . . . . .	213
Les cadres $L^2$ et $L^p$ . . . . .	214
Théorème de Yuri Netrusov pour l'algèbre des bosses . . . . .	216
Définition de l'espace BMO (Bounded mean oscillation) . . . . .	216
Définition de l'algèbre des bosses . . . . .	216
Le débruitage optimal de David Donoho . . . . .	217
Discussion . . . . .	219
Appendice . . . . .	219
Bibliographie . . . . .	220
<b>Leçon 9. Henry Helson. Et les séries de Fourier devinrent Analyse harmonique</b>	<b>223</b>
De Fréchet à Hartman . . . . .	223
De Beurling à Kahane . . . . .	226
Angle entre le passé et le futur . . . . .	233
Bibliographie . . . . .	235

<b>Leçon 10. Yves Colin de Verdière. Réseaux électriques planaires</b>	<b>237</b>
Introduction . . . . .	237
Première partie. Réseaux électriques généraux . . . . .	238
Notations et définitions . . . . .	238
Réponse du réseau électrique . . . . .	240
Propriétés spéciales de la matrice $L$ . . . . .	241
Deuxième partie. Réseaux planaires . . . . .	244
Les réseaux planaires et leurs réponses . . . . .	244
Le problème inverse, le problème de l'équivalence . . . . .	248
Transformations électriques élémentaires . . . . .	249
Troisième partie. Grandes lignes de la preuve du théorème 2 . . . . .	252
La stratégie . . . . .	252
Le graphe médial . . . . .	257
Construction du graphe médial . . . . .	258
Transformations électriques élémentaires sur le graphe médial	260
Preuve de l'existence de chemins entre un graphe et un graphe	
minimal . . . . .	260
Preuve que la réponse impose la classe d'équivalence combi-	
natoire . . . . .	266
Graphes médiaux électriques . . . . .	270
L'injectivité de $\Phi_{\Gamma_1}$ . . . . .	272
Discussion . . . . .	274
Bibliographie . . . . .	276
<b>Leçon 11. Frédéric Pham. Caustiques : aspects géométriques</b>	
<b>et ondulatoires</b>	<b>277</b>
Introduction . . . . .	277
Premier exemple . . . . .	277
Deuxième exemple . . . . .	279
Première partie : aspect géométrique . . . . .	279
Troisième exemple . . . . .	280
Quatrième exemple . . . . .	281
Enveloppes et généricité . . . . .	281
Caustiques et catastrophes . . . . .	287
Seconde partie : aspect ondulatoire . . . . .	289
Le principe de Huygens-Fresnel . . . . .	289
La géométrie et l'onde exacte . . . . .	294
Résurgence . . . . .	298
Discussion . . . . .	300
Bibliographie . . . . .	303

<b>Leçon 12. Pierre-Louis Lions. Problèmes mathématiques de la mécanique des fluides compressibles</b>	<b>307</b>
Introduction, modèles, historique . . . . .	307
Introduction . . . . .	307
Modèles . . . . .	307
Historique . . . . .	311
Remarques . . . . .	312
Euler . . . . .	314
De Leonhard Euler à Peter Lax . . . . .	314
Résultats pour $N = 1$ . . . . .	318
Compacité par compensation . . . . .	319
Formulation cinétique . . . . .	321
Et les dimensions 2, 3, ... ? Spéculations . . . . .	322
Équations de Navier-Stokes . . . . .	324
Généralités . . . . .	324
Perte de régularité . . . . .	325
Existence globale . . . . .	326
Compacité . . . . .	326
Résumé et conclusion . . . . .	330
Questions . . . . .	331
Bibliographie . . . . .	331

## Table des matières du volume 2

<b>Préface</b>	<b>vii</b>
<b>Auteurs et rédacteurs</b>	<b>ix</b>
<b>Leçon 1. Gilles Godefroy. De l'irrationalité à l'indécidabilité</b>	<b>1</b>
Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre . . . . .	1
La suite de Fibonacci . . . . .	10
Du paradis que Cantor a créé pour nous... . . . . .	12
Le programme de Hilbert . . . . .	23
Le vertige contemporain . . . . .	25
Le théorème de Gödel . . . . .	25
Ensembles récursivement énumérables et ensembles récursifs . . . . .	28
Le théorème de Robinson-Matijasevic . . . . .	31
Bibliographie . . . . .	36
<b>Leçon 2. Jean-Yves Girard. La théorie de la démonstration, du programme de Hilbert à la logique linéaire</b>	<b>37</b>
La « crise des fondements » . . . . .	37
La théorie naïve des ensembles : grandeur et décadence . . . . .	37
Une crise de quoi ? . . . . .	39

Le programme de Hilbert . . . . .	40
Un chevalier blanc et une ontologie . . . . .	40
Le programme : un principe de conservation . . . . .	43
La chute . . . . .	44
Immersion . . . . .	44
Le(s) théorème(s) d'incomplétude de Gödel . . . . .	45
L'obstination . . . . .	48
Gentzen . . . . .	48
Avatars du théorème de Gödel . . . . .	50
Le <i>Hauptsatz</i> . . . . .	52
Toutes les mauvaises idées ne sont pas à jeter . . . . .	52
Les séquents . . . . .	53
L'élimination des coupures (le <i>Hauptsatz</i> ) . . . . .	59
Idée de la preuve . . . . .	61
Corollaires du <i>Hauptsatz</i> . . . . .	64
La cohérence de l'arithmétique de Peano . . . . .	64
La propriété de la sous-formule, et la programmation logique . . . . .	65
La contraction coupable . . . . .	67
La logique intuitionniste . . . . .	68
Don Camillo contre Peppone . . . . .	68
Le <i>Hauptsatz</i> et la propriété de la disjonction . . . . .	69
La lecture moderne de l'intuitionnisme . . . . .	71
L'interprétation fonctionnelle . . . . .	72
La sémantique des preuves . . . . .	72
Le $\lambda$ -calcul typé et l'isomorphisme de Curry-Howard . . . . .	73
Le paradigme de programmation fonctionnelle . . . . .	76
La nature des fonctions . . . . .	77
Une interprétation linéaire . . . . .	77
Le calcul des séquents linéaire . . . . .	80
Interprétation intuitive des connecteurs linéaires . . . . .	82
Les réseaux de démonstration . . . . .	89
Réseaux . . . . .	89
Le critère de correction . . . . .	90
Normalisation des réseaux . . . . .	92
Analogie électrique . . . . .	94
Des règles de la logique à la logique des règles . . . . .	95
La dualité . . . . .	95
La ludique . . . . .	97
Le pourquoi et le comment . . . . .	97
Bibliographie . . . . .	98

<b>Leçon 3. Gérald Tenenbaum. Qu'est-ce qu'un entier normal ?</b>	<b>101</b>
Nombres premiers et entiers au hasard . . . . .	101
Densités . . . . .	103
Conflit structural . . . . .	104
De Hardy-Ramanujan à Erdős-Kac . . . . .	105
Le modèle d'Erdős-Kubilius . . . . .	108
Un objet fractal . . . . .	111
Les limites du modèle d'Erdős-Kubilius . . . . .	112
Un modèle plus précis . . . . .	115
Exploitation heuristique du nouveau modèle . . . . .	116
Un point de vue « extérieur » sur la normalité : les suites de Behrend . . . . .	119
Transformées de Fourier de fonctions arithmétiques . . . . .	122
Sommes d'exponentielles . . . . .	124
Limitation théorique : un principe d'incertitude . . . . .	127
En guise de conclusion . . . . .	127
Questions . . . . .	129
Bibliographie . . . . .	130
<b>Leçon 4. François Morain. La cryptologie est-elle soluble dans les mathématiques ?</b>	<b>133</b>
Introduction : cryptographie, cryptanalyse, cryptologie . . . . .	133
Cryptographie symétrique . . . . .	134
Cryptographie asymétrique . . . . .	138
Le principe . . . . .	138
Quels problèmes choisir ? . . . . .	139
Sécurité d'un système . . . . .	140
Le chiffrement RSA . . . . .	141
Le principe . . . . .	141
Une première approche de la sécurité de RSA : le problème de la factorisation . . . . .	142
L'échange de clés de Diffie-Hellman . . . . .	148
Le principe . . . . .	148
Une approche de la sécurité de l'échange : difficulté du problème du logarithme discret . . . . .	149
Vers des preuves de sécurité . . . . .	159
Conclusion . . . . .	162
Bibliographie . . . . .	162
<b>Leçon 5. Michel Waldschmidt. Fonctions modulaires et transcendance</b>	<b>167</b>
Le théorème de Liouville . . . . .	167
Le nombre $\xi$ . . . . .	169
Exemples naturels de transcendance et d'indépendance algébrique . . . . .	171
Fonctions $\theta$ et modulaires . . . . .	173
Fonctions elliptiques . . . . .	176

Transcendance des valeurs des fonctions modulaires <i>via</i> les fonctions elliptiques . . . . .	178
Le théorème stéphanais et les théorèmes de Nesterenko . . . . .	181
Problèmes ouverts . . . . .	185
Questions . . . . .	192
Bibliographie . . . . .	195
<b>Leçon 6. Guy David. Ensembles uniformément rectifiables</b>	<b>197</b>
Introduction . . . . .	197
Rectifiabilité uniforme . . . . .	199
Un critère particulier : inégalité de Poincaré (ou de Sobolev) dans le complémentaire . . . . .	208
Un exemple d'application : la fonctionnelle de Mumford-Shah en traitement d'images . . . . .	209
Quoi de neuf depuis la Leçon ? . . . . .	212
Bibliographie . . . . .	213
<b>Leçon 7. Claude Bardos. Observation à hautes et basses fréquences, contrôlabilité, décroissance locale de l'énergie et mesures de défaut</b>	<b>215</b>
Le problème de la détection . . . . .	215
L'observation et sa stabilité . . . . .	215
Hautes fréquences : optique géométrique . . . . .	216
Basses fréquences : diffraction . . . . .	220
Mathématisation . . . . .	221
Notations . . . . .	221
Le problème de l'observation (ou de l'unicité) . . . . .	222
Le problème de l'observation stable . . . . .	222
Applications . . . . .	224
Contrôlabilité exacte . . . . .	224
Stabilisation . . . . .	225
Scattering . . . . .	225
Quelques résultats . . . . .	226
1. Scattering. La conjecture de Lax et Phillips . . . . .	226
2. Stabilisation . . . . .	227
La stratégie de la preuve du théorème de l'observation stable . . . . .	232
Étape 1 : traduction géométrique . . . . .	232
Étape 2 : estimations élémentaires et mesures de défaut . . . . .	236
Étape 3 : relations entre les mesures $\mu$ et $\nu$ . . . . .	238
Étape 4. Propagation de la mesure au voisinage des points glissants . . . . .	241
Esquisse de la preuve de Robbiano . . . . .	244
Conclusions . . . . .	245
Postface (par Claude Bardos) . . . . .	245
Bibliographie . . . . .	247

<b>Leçon 8. Max Karoubi. Topologie et formes différentielles</b>	<b>251</b>
Quelques rappels classiques : formes différentielles, cohomologie de de Rham, lien avec la topologie, et un problème ouvert . . .	251
Formes différentielles . . . . .	251
L'algèbre différentielle graduée $\Omega^*(X)$ . . . . .	252
Lemme de Poincaré et cohomologie de de Rham . . . . .	253
Lien avec la topologie : $H^1(X)$ et $\pi_1(X)$ . . . . .	255
Les groupes d'homotopie supérieurs $\pi_n(X)$ , $n > 1$ . . . . .	256
La théorie de Quillen-Sullivan . . . . .	258
Les algèbres différentielles graduées (ADG) et leurs quasi-isomorphismes . . . . .	258
Le théorème de Quillen-Sullivan sur $\mathbb{R}$ . . . . .	259
Passer des réels aux rationnels . . . . .	260
Passer de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{Z}$ . . . . .	262
Cohomologie à coefficients entiers et théorie de Quillen-Sullivan tressée . . . . .	263
Un calcul différentiel non commutatif . . . . .	263
Cohomologie tressée d'un complexe simplicial . . . . .	264
ADG tressées . . . . .	266
Lien avec la topologie . . . . .	268
Bibliographie . . . . .	270
<b>Leçon 9. Jean-Marc Fontaine. Nombres <math>p</math>-adiques, représentations galoisiennes et applications arithmétiques</b>	<b>271</b>
Nombres $p$ -adiques . . . . .	271
Représentations galoisiennes . . . . .	276
Exemples de représentations galoisiennes . . . . .	280
Cohomologie de de Rham et structures de Hodge . . . . .	285
Structures de Hodge $p$ -adiques . . . . .	287
Représentations $\ell$ -adiques géométriques . . . . .	292
Bibliographie . . . . .	297
<b>Leçon 10. Marc Hindry. Géométrie et équations diophantiennes</b>	<b>301</b>
Introduction . . . . .	301
Hauteur sur l'espace projectif . . . . .	302
Estimation du nombre de points de hauteur donnée par des constructions géométriques usuelles. . . . .	304
Invariants géométriques et nombre de points rationnels . . . . .	305
Diviseurs, groupe de Picard . . . . .	305
Hauteur associée à un diviseur . . . . .	306
Formes différentielles ; diviseur canonique . . . . .	307
Cas des courbes projectives lisses . . . . .	309
Et en dimension supérieure ? . . . . .	311
Le nombre de points rationnels de hauteur bornée . . . . .	313

Remarques supplémentaires . . . . .	315
Bibliographie . . . . .	315
<b>Leçon 11. Michel Raynaud. Courbes algébriques et groupe fondamental</b>	
<b>Surfaces (point de vue topologique) . . . . .</b>	<b>317</b>
Tores, surfaces compactes, genre . . . . .	317
Le groupe fondamental (point de vue topologique) . . . . .	320
Surfaces de Riemann . . . . .	323
Passage au point de vue algébrique . . . . .	324
Courbes algébriques sur $\mathbb{C}$ . Le groupe fondamental algébrique	324
Courbes algébriques sur un corps algébriquement clos . . . . .	328
Courbes en caractéristique nulle . . . . .	329
Cadre arithmétique . . . . .	330
Courbes en caractéristique positive . . . . .	331
La courbe générique . . . . .	336
Appendice . . . . .	340
Minilexique . . . . .	340
Bibliographie . . . . .	343
<b>Leçon 12. Michael S. Keane. Marches aléatoires renforcées</b>	
Les probabilités classiques . . . . .	347
L'apport de Markov . . . . .	348
Processus non markoviens : une mémoire d'éléphant . . . . .	349
Le bar ou la plage : l'émergence des opinions . . . . .	350
Retour inattendu à Markov . . . . .	352
Marches aléatoires classiques . . . . .	354
Autres problèmes . . . . .	357
Questions . . . . .	359
Bibliographie . . . . .	360